S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 2, стр. 1002–1015 (2026) УДК 519.63
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.061 MSC 35K20

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

А.К. Баззаев

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: This work is devoted to the construction and analysis of finite-difference schemes for a boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a one-dimensional parabolic equation. The differential problem under consideration arises in the mathematical modeling of the technological process of gettering, which is used, for example, for removing impurities from silicon wafers. A family of weighted finite-difference schemes is investigated. By means of the energy inequality method, an a priori estimate is obtained for the discrete problem, from which the stability of the finite-difference schemes and the convergence of the numerical solution to the exact solution follow. The bibliography contains 25 references.

Keywords: parabolic equation, boundary value problem, a priori estimate, approximation, stability of a finite-difference scheme, convergence of a finite-difference scheme, nonlocal boundary condition, nonlocal boundary value problem.

Bazzaev, A.K., On the Numerical Solution of a Problem for a Parabolic Equation with a Nonlocal Boundary Condition.

© 2026 Баззаев А. К.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2026-1324.

Поступила 19 ноября 2025 г., опубликована 23 ноября 2026 г.

1 Введение

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью. Нелокальные краевые задачи возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почвогрунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по-видимому, работы Камынина Л.И. [1] и Чудновского А.Ф. [2]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [3] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [4], [5], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [6], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [7], Гордезиани Д.Г. [8], Нахушева А.М. [9], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [10] и др.

В целом, исследование моделей процессов переноса в различных природных системах представляет одно из быстро развивающихся направлений современной математики. Повышенный интерес к данной проблеме объясняется тем, что процессы переноса имеют самое широкое распространение в природе и технике. Теория процессов переноса опирается в своих исследованиях на ряд основополагающих аксиом классической термодинамики необратимых процессов. Однако некоторые из них накладывают серьезные ограничения на область применения этой теории. Процессы переноса по своей сути нелокальны и имеют место в системах, которые, строго говоря, не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Задачи для параболических уравнений с интегральными и другими нелокальными условиями имеют длительную историю. Одни из первых постановок задач теплопроводности с заданием интегральных характеристик решения восходят к работам Дж. Р. Кэннона [11] и Л. И. Камынина [1]. Существенное развитие теория неклассических и нелокальных краевых задач получила в работах Н. И. Ионкина [4, 5], В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [6], Н. И. Ионкина, Е. И. Моисеева [7], Д. Г. Гордезиани [8], А. М. Нахушева [9], А. П. Солдатова и М. Х. Шханукова [10] и других авторов.

Чудновский А.Ф. в работе [2] обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right), \ 0 < x < \ell, \ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

где $D(w)$ — коэффициент диффузивности, w — влажность в долях единицы, x — глубина.

Для уравнения (1) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$D\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \int_0^{\alpha} w dx, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0, \tag{3}$$

$$w(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \ell. \tag{4}$$

Нелокальное условие (2) означает, что поток влаги через поверхность $x = 0$ равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до α, условие (3) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы $x = \ell$ и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (4).

Непосредственно для параболических уравнений задачи с условиями, связывающими граничные значения решения с его интегральными характеристиками, исследовались Л. А. Муравьем и А. В. Филиновским [12]. Для соответствующих нелокальных задач были получены результаты о корректной разрешимости в энергетических пространствах, а также получены заменяющие принцип максимума двусторонние равномерные оценки решения задачи.

В работе [11] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи (5) — (8), если $E(t)$ и $X(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, T]$.

В работе [1] в более общей постановке для аналогичной задачи установлена однозначная разрешимость в предположении, что $E(t)$ и $X(t)$ удовлетворяют условию Гельдера.

В работе [13] исследована задача для параболического уравнения с неклассическими краевыми условиями. Для рассматриваемой задачи исследовано семейство разностных схем с весами. Приведен алгоритм нахождения численного решения. На основании принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, доказаны устойчивость и сходимость разностного решения к точному в равномерной метрике.

В работе [14] исследуется семейство разностных схем с весами для уравнения диффузии дробного порядка с неклассическими краевыми условиями. Приведен алгоритм нахождения численного решения. С помощью принципа максимума для разностной задачи получена априорная оценка, из которой следует устойчивость разностных схем и сходимость численного решения к точному в норме C с порядком, равным погрешности аппроксимации.

Значительное развитие теория разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений получила в работах А. И. Кожанова и его соавторов. В работе [15] исследована разрешимость начально-краевой задачи для линейных параболических уравнений с нелокальным

граничным условием, связывающим значения решения на боковой границе со значениями некоторого линейного оператора от решения; доказаны существование и единственность регулярного решения.

В работах А. И. Кожанова и А. В. Дюжевой дальнейшее развитие получили задачи с интегральными нелокальными условиями. В [16] исследованы нелокальные аналоги второй начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка и получены теоремы существования и единственности регулярных решений. В работе [17] рассмотрены нелокальные задачи с интегральным смещением для параболических уравнений высокого порядка. В [18] исследован интегральный аналог первой начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка, в котором граничные значения решения интегральным образом связаны со значениями решения внутри области.

В более поздних работах А. И. Кожанова развивается теория пространственно-нелокальных задач с условиями типа Самарского–Ионкина. В [19] исследованы нелокальные по пространственной переменной краевые задачи для одномерных параболических уравнений с обобщенным условием Самарского–Ионкина и доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений. В работе А. И. Кожанова и А. М. Абдрахманова [20] аналогичные вопросы изучены для квазипараболических уравнений. Разрешимости пространственно-нелокальных задач для параболических уравнений с произвольным направлением эволюции посвящена работа [21]. Связь подобных нелокальных задач с обратными задачами для уравнения теплопроводности исследуется также в [22]. Дальнейшее развитие методов исследования задач типа Ионкина для различных классов уравнений, включая параболические, представлено в [23].

2 Постановка задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = \{(x,t) :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим краевую задачу для одномерного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$p(t)u(1,t) + \int\limits_0^1 u(x,t)dx = p_0\varphi(1) + \int\limits_0^1 \varphi(x)dx,\ 0 \le t \le T, \tag{8}$$

где $\varphi(x)$, $k(t)$, $p(t)$, $f(x,t)$ — заданные функции. Предполагается, что

$$\varphi(x) \in C[0;1],\ k(t),\ p(t) \in C^1[0;T],\ f(x,t) \in C(\overline{Q}_T),$$

причем

$$0 < c_0 \le k(t) \le c_1 < \infty,\ 0 < c_2 \le p(t) \le c_3 < \infty,$$

c_0, c_1, c_2, c_3 — заданные положительные числа, $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T\}$.

Особенностью задачи (5) — (8) является наличие нелокального граничного условия (8). В отличие от классических краевых условий, задающих значение искомой функции или ее потока непосредственно на границе области, условие (8) связывает граничное значение $u(1,t)$ с интегральной характеристикой решения во всей пространственной области.

Рассматриваемая задача возникает, в частности, при математическом моделировании технологического процесса внешнего геттерирования, используемого при очистке полупроводниковых материалов от примесей. В данной интерпретации функция $\varphi(x)$ задает начальное распределение концентрации примеси в пластине $0 \le x \le 1$, а $u(x,t)$ — распределение концентрации в момент времени t. Коэффициент диффузии $k(t)$ может зависеть от изменяющейся во времени температуры процесса, откуда и возникают ограничения на коэффициент $k(t)$ и зависящий от $k(t)$ коэффициент $p(t)$.

Условие (7) означает отсутствие диффузионного потока через левую границу пластины $x = 0$. Если бы поток отсутствовал также через правую границу $x = 1$, то при отсутствии источников и стоков естественным законом сохранения являлось бы условие постоянства полного количества вещества

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

Следует отметить, что нелокальные параболические задачи возникают также при исследовании процесса теплопередачи. Так, например, в работе [1] рассматривается задача о распространении тепла в тонком нагретом стержне $0 \le x \le 1$, если задано количество тепла на части стержня $0 \le x \le X(t),\ 0 \le t \le T$. Этот процесс приводит к изучению граничной задачи для уравнения (5) с нелокальным краевым условием

$$\int_0^{X(t)} u(x,t)dx = E(t),\ 0 \le t \le T,$$

где $E(t),\ X(t)$ — известные функции.

В рассматриваемой модели часть примеси может концентрироваться на правой границе пластины ($p(t) = \alpha \cdot (1 + \beta k^{-\gamma}(t))$ — коэффициент сегрегации, $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ - положительные параметры). Поэтому закон баланса принимает нелокальную форму (8), содержащую одновременно граничное значение $u(1,t)$ и интеграл от решения по всей пластине. В соответствующих моделях коэффициент $p(t)$ характеризует сегрегационные свойства процесса и может зависеть от коэффициента диффузии.

К настоящему времени вопросы существования, единственности и регулярности решений широкого класса нелокальных задач для параболических уравнений исследованы достаточно подробно. Вместе с тем аналитическая разрешимость непрерывной задачи сама по себе не дает эффективного алгоритма нахождения ее решения. Поэтому актуальным остается построение и исследование численных методов для таких задач, причем наличие интегрального условия (8) требует специального учета нелокальной связи при построении разностного аналога и исследовании его устойчивости.

Цель настоящей работы состоит в построении и исследовании разностного метода решения задачи (5) — (8). Для этого строится однопараметрическое семейство разностных схем с весами, предлагается разностный аналог нелокального граничного условия, методом энергетических неравенств получается априорная оценка сеточного решения и на ее основе исследуется устойчивость разностной схемы. Далее оценивается погрешность аппроксимации и устанавливается сходимость разностного решения к решению исходной дифференциальной задачи.

Тем самым настоящее исследование дополняет существующую аналитическую теорию построением и обоснованием численного метода ее решения.

3 Разностная схема

Введем по пространственной переменной x на отрезке $[0,1]$ сетку $\overline{\omega}_\hbar = \{x_i = i\hbar :\ i = 0, 1\ \ldots, N\}$ с шагом $\hbar$, где

$$\hbar = \begin{cases} h = \dfrac{1}{N}, & \text{i} = 1,\ 2,\ \ldots,\ \text{N-1;} \\ \dfrac{h}{2}, & \text{i} = 0,\ \text{N.} \end{cases}$$

На отрезке $[0,T]$ также введем сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau :\ j = 0, 1\ \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = \dfrac{T}{j_0}$ по переменной t. На множестве $\overline{Q}_T$ рассмотрим сетку

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j),\ i = 0, 1, 2, \ldots, N;\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0\}.$$

Дифференциальное уравнение (5) аппроксимируем разностным уравнением

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1}, \tag{9}$$

где

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau},\ y_i^{(\sigma)} = \sigma\hat{y}_i + (1-\sigma)y_i,$$

$$\Lambda y = k^{j+1} y_{\bar{x}x},\ a_i = 0.5(k_{i-1} + k_i),\ k_i = k(\bar{t}),$$

$$f_i = f_i^j = f(x_i, \bar{t}),\ \varphi_i = \varphi(x_i),\ \bar{t} = t_j + 0.5\tau,$$

$$\hat{y} = y_i^{j+1},\ y = y_i^j,\ \check{y} = y_i^{j-1},\ y_{\overline{x},N} = \frac{y_N - y_{N-1}}{h}.$$

Начальное условие (6) заменим разностным

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

К (9), (10) необходимо присоединить разностный аналог для граничных условий (7) — (8). Разностный аналог для (7) имеет вид:

$$y_{x,0} = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N. \tag{11}$$

Условие (11) имеет первый порядок аппроксимации. Применяя известный прием повышения порядка аппроксимации граничных условий на решениях уравнения (5) (см. [25], Гл. II, §1, п. 7 с. 84), получим:

$$y_{\bar{t},0} = \frac{k^{j+1} y_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0. \tag{12}$$

Граничное условие (8) аппроксимируем следующим образом:

$$p^{j+1} y_N^{j+1} + \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar. \tag{13}$$

Таким образом дифференциальной задаче (5) — (8) поставим в соответствие однопараметрическое по $\sigma,\ 0 \le \sigma \le 1$ семейство разностных схем:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{14}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{15}$$

$$y_{\bar{t},0} = \frac{k^{j+1} y_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{16}$$

$$p^{j+1} y_N^{(\sigma)} + \sum_{i=0}^{N} y_i^{(\sigma)} \hbar = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar,\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1. \tag{17}$$

4 Устойчивость разностной схемы

Так как для нелокальных краевых задач, вообще говоря, не установлен принцип максимума Самарского [24, 25], то априорную оценку для решения разностной задачи будем получать с помощью метода энергетических неравенств [25].

Для упрощения дальнейших выкладок запишем схему в следующем виде:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \Lambda y^{(\sigma)} + f_i^{j+1},\ i = 1, 2, \ldots, N-1,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{18}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{19}$$

$$y_{\bar{t},0}^{j+1} = \frac{(ky)_{x,0}^{(\sigma)}}{0.5h} + f_0,\ j = 0, 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \tag{20}$$

$$y_{\bar{t},N}^{j+1} = -\frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] + \\ + \frac{C}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)},\ j = 0,1,2,\ldots,j_0-1, \tag{21}$$

где $C = p_0\varphi_N + \sum\limits_{i=0}^{N}\varphi_i\hbar$, или, что то же самое:

$$y_{\bar{t}}^{j+1} = \overline{\Lambda}y^{(\sigma)} + \overline{F}^{j+1}, \tag{22}$$

$$y_i^0 = \varphi_i,\ i = 0,1,2,\ldots,N, \tag{23}$$

$$\overline{\Lambda}y = \begin{cases} \Lambda y = (ky_{\bar{x}x,i})^{(\sigma)},\ i = 1,2,\ldots,N-1; \\ \Lambda^- y = \dfrac{(ky_{x,0})^{(\sigma)}}{0.5h},\ i = 0; \\ \Lambda^+ y = -\dfrac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum\limits_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right],\ i = N, \end{cases} \tag{24}$$

$$F = \begin{cases} f_i, & \text{i=1,2,...,N-1;} \\ f_0, & \text{i=0;} \\ \dfrac{C}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}, & \text{i=N,} \end{cases} \tag{25}$$

$$C = p_0\varphi_N + \sum_{i=0}^{N}\varphi_i\hbar.$$

Введем скалярное произведение

$$[u,v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar,$$

а также норму

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Умножим уравнение (22) скалярно на $y^{(\sigma)}$, тогда получим

$$[y_{\bar{t}}^{j+1}, y^{(\sigma)}] - [\overline{\Lambda}y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}] = [F^{j+1}, y^{(\sigma)}]. \tag{26}$$

Преобразуем каждое слагаемое в (26).

$$[y_{\bar{t}}^{j+1}, y^{(\sigma)}] = \frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2 + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2. \tag{27}$$

$$[\overline{\Lambda}y^{j+1}, y^{(\sigma)}] = \left(\Lambda y^{(\sigma)}, y^{(\sigma)}\right) + \Lambda^- y^{(\sigma)}\, y^{(\sigma)}\hbar + \Lambda^+ y^{(\sigma)}\, y^{(\sigma)}\hbar = \\ = -\sum_{i=1}^{N} k_i\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2 h + k_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} y_N^{(\sigma)} - \\ - \frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y_N^j + \sum_{i=0}^{N-1} y_i^{(\sigma)}\hbar\right] y_N^{(\sigma)} 0.5h. \tag{28}$$

Подставим (27), (28) в (26), тогда получим

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|^2_{\bar{t}} + \tau\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\|y^{j+1}_{\bar{t}}\|^2 + \sum_{i=1}^{N} k_i\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)^2 h - k_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} y^{(\sigma)}_N +$$

$$+\frac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y^j_N + \sum_{i=0}^{N-1} y^{(\sigma)}_i \hbar\right] y^{(\sigma)}_N 0.5h = [F^{j+1}, y^{(\sigma)}]. \tag{29}$$

Оценим теперь слагаемые, входящие в (29).

С помощью неравенства Юнга с параметром $\varepsilon_1 > 0$ для $-k_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} y^{(\sigma)}_N$ получаем:

$$|-k_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} y^{(\sigma)}_N| \le \frac{k_N}{2}\left(\varepsilon_1\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2\right) \le$$

$$\le \frac{c_1\varepsilon_1}{2}\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},N}\right)^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon_1}\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2. \tag{30}$$

Оценим теперь нелокальное слагаемое, используя неравенство Коши – Буняковского:

$$\left|\frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y^j_N + \sum_{i=0}^{N-1} y^{(\sigma)}_i \hbar\right] y^{(\sigma)}_N\right| \le$$

$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)|y^j_N| + \|y^{(\sigma)}\|\sqrt{\sum_{i=0}^{N-1}\hbar}\right]|y^{(\sigma)}_N| \le$$

$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)|y^j_N| + \|y^{(\sigma)}\|\right]|y^{(\sigma)}_N|. \tag{31}$$

так как $\sum\limits_{i=0}^{N-1}\hbar = 1 - 0.5h < 1$.

Применяя к (31) неравенство Юнга с параметром $\varepsilon_2 > 0$, а также учитывая, что $p^{j+1} \ge c_2 > 0$, $p^{j+1} + 0.5h \ge c_2$, получаем:

$$\left|\frac{0.5h}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)y^j_N + \sum_{i=0}^{N-1} y^{(\sigma)}_i \hbar\right] y^{(\sigma)}_N\right| \le$$

$$\le \frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_3+0.5h)^2(y^j_N)^2 + \|y^{(\sigma)}\|^2\right) + \frac{\varepsilon_2}{2}\left(y^{(\sigma)}_N\right)^2\right). \tag{32}$$

Для правой части также с помощью неравенства Юнга получаем оценку:

$$[F^{j+1}, y^{(\sigma)}] \le \|F^{j+1}\|\|y^{(\sigma)}\| \le \frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2 + \frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \tag{33}$$

Подставим теперь все оценки (30) — (33) в неравенство (29), тогда получим

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2+\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2+\sum_{i=1}^{N}k_i\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2h\leq\leq$$

$$\frac{c_1\varepsilon_1}{2}\left(y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\right)^2+\frac{c_1}{2\varepsilon_1}\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2+$$

$$+\frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_2+0.5h)^2(y_N^j)^2+\|y^{(\sigma)}\|^2\right)+\frac{\varepsilon_2}{2}\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2+\frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \tag{34}$$

Выберем ε_1 достаточно малым, например, $\varepsilon_1=\dfrac{c_0}{c_1}$, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2+\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2+\frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2h\leq$$

$$\leq\frac{c_1^2}{2c_0}\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2+\frac{0.5h}{\sigma\tau c_2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}\left((c_2+0.5h)^2(y_N^j)^2+\|y^{(\sigma)}\|^2\right)+\frac{\varepsilon_2}{2}\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2+\frac{1}{2}\|y^{(\sigma)}\|^2. \tag{35}$$

Оценивая далее нелокальный член и другие слагаемые, содержащие $y_N^{(\sigma)}$ и $y^{(\sigma)}$, выбирая ε_2 достаточно большим, а также после приведения подобных слагаемых, получаем:

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2+\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2+\frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2h\leq$$

$$\leq M_1\left(y_N^j\right)^2+M_2\|y^{(\sigma)}\|^2+M_3\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2+\frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2, \tag{36}$$

где M_1, M_2, M_3 — положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

При $\sigma\geq\dfrac{1}{2}$ слагаемое $\tau\left(\sigma-\dfrac{1}{2}\right)\|y_{\bar{t}}^{j+1}\|^2\geq 0$, поэтому в (36) его можно отбросить.

$$\frac{1}{2}\|y^{j+1}\|_{\bar{t}}^2+\frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2h\leq$$

$$\leq M_1\left(y_N^j\right)^2+M_2\|y^{(\sigma)}\|^2+M_3\left(y_N^{(\sigma)}\right)^2+\frac{1}{2}\|F^{j+1}\|^2. \tag{37}$$

Умножим неравенство (37) на 2τ и просуммируем по всем j' от 0 до j, тогда получим

$$\|y^{j'+1}\|^2-\|y^0\|^2+c_0\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\right)^2h\leq$$

$$\leq 2\tau \sum_{j'=0}^{j} \left(M_1 \big(y_N^{j'}\big)^2 + M_2 \|y^{(\sigma)}\|^2 + M_3 \big(y_N^{(\sigma)}\big)^2 + \frac{1}{2}\|F^{j'+1}\|^2 \right). \tag{38}$$

Оценим слагаемые в правой части (38):

$$\|y^{(\sigma)}\|^2 = \|\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j\|^2 \leq 2\sigma^2 \|y^{j+1}\|^2 + 2(1-\sigma)^2 \|y^j\|^2.$$

Аналогично для граничного значения

$$\|y_N^{(\sigma)}\|^2 = \|\sigma y_N^{j+1} + (1-\sigma)y_N^j\|^2 \leq 2\sigma^2 (y_N^{j+1})^2 + 2(1-\sigma)^2 (y_N^j)^2.$$

Учитывая, что $(y_N^j)^2 \leq \|y^j\|^2$, из (38) получаем

$$\|y^{j'+1}\|^2 - \|y^0\|^2 + c_0\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \leq$$

$$\leq 2\tau \sum_{j'=0}^{j} \Big[\big(M_1 + 2(M_2+M_3)(1-\sigma)^2\big)\|y^{j'}\|^2 + 2\big(M_2+M_3\big)\sigma^2 \|y^{j'+1}\|^2 \Big] +$$

$$+\tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \tag{39}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = M_1 + 2(M_2+M_3)(1-\sigma)^2, \ B = 2\big(M_2+M_3\big)\sigma^2.$$

С учетом введенных обозначений неравенство (39) примет вид:

$$\|y^{j'+1}\|^2 - \|y^0\|^2 + c_0\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \leq$$

$$\leq 2\tau \sum_{j'=0}^{j} \Big[A\|y^{j'}\|^2 + B\|y^{j'+1}\|^2 \Big] + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2 =$$

$$= 2\tau \Big[A\|y^0\|^2 + (A+B) \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + B\|y^{j'+1}\|^2 \Big] + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \tag{40}$$

Из (40) имеем:

$$(1-2\tau B)\|y^{j'+1}\|^2 + c_0\tau \sum_{j'=0}^{j} \sum_{i=1}^{N} \big(y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\big)^2 h \leq$$

$$\leq (1+2\tau A)\|y^0\|^2 + 2\tau(A+B) \sum_{j'=1}^{j} \|y^{j'}\|^2 + \tau \sum_{j'=0}^{j} \|F^{j'+1}\|^2. \tag{41}$$

При достаточно малых τ $(1-2\tau B>0 \Rightarrow \tau<\dfrac{1}{2B})$, разделим обе части последнего неравенства (41) на $(1-2\tau B)>0$, тогда получим:

$$\|y^{j'+1}\|^2+\frac{c_0}{1-2\tau B}\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)^2h\le\frac{1+2\tau A}{1-2\tau B}\|y^0\|^2+$$

$$+\frac{2\tau(A+B)}{1-2\tau B}\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2+\frac{\tau}{1-2\tau B}\sum_{j'=0}^{j}\|F^{j'+1}\|^2. \tag{42}$$

Введем обозначения

$$C_1=\frac{1+2\tau A}{1-2\tau B},\ C_2=\frac{2\tau(A+B)}{1-2\tau B},\ C_3=\frac{\tau}{1-2\tau B},\ C_4=\frac{c_0}{1-2\tau B}.$$

С учетом этих обозначений последнее неравенство (42) примет вид:

$$\|y^{j'+1}\|^2+C_4\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)^2h\le$$

$$\le C_1\|y^0\|^2+C_2\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2+C_3\sum_{j'=0}^{j}\|F^{j'+1}\|^2. \tag{43}$$

Применяя теперь к неравенству (43) дискретный аналог леммы Гронуолла (см. [24], стр. 171) при малых τ, получаем окончательную оценку:

$$\max_{0\le j\le j_0}\|y^{j+1}\|^2+\tau\sum_{j'=0}^{j}\sum_{i=1}^{N}\left(y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\right)^2h\le M\left(\|y^0\|^2+\tau\sum_{j'=0}^{j}\|F^{j'+1}\|^2\right), \tag{44}$$

где $M=const$, не зависящая от h и τ.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Разностная схема (14) — (17) при малых τ и $\sigma\ge\dfrac{1}{2}$ устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (14) — (17) справедлива оценка (44).*

5 Погрешность аппроксимации

Для погрешности $z=y-u$ получаем задачу:

$$z^{j+1}_{\bar{t}}=\overline{\Lambda}z^{(\sigma)}+\overline{\psi}^{j+1}, \tag{45}$$

$$z^0_i=0,\ i=0,1,2,\dots,N, \tag{46}$$

$$\overline{\Lambda}z=\begin{cases}\Lambda z=(kz_{\bar{x}x,i})^{(\sigma)},\ i=1,2,\dots,N-1;\\ \Lambda^-z=\dfrac{(kz_{x,0})^{(\sigma)}}{0.5h},\ i=0;\\ \Lambda^+z=-\dfrac{1}{\sigma\tau(p^{j+1}+0.5h)}\left[(p^{j+1}+0.5h)z^j_N+\sum\limits_{i=0}^{N-1}z^{(\sigma)}_i\hbar\right],\ i=N,\end{cases} \tag{47}$$

$$\overline{\psi} = \begin{cases} \Lambda u^{(\sigma)} + f_i - u_{\overline{t}}^{j+1}, & \text{i=1,2,...,N-1;} \\ \Lambda^{-} u^{(\sigma)} + f_0 - u_{\overline{t},0}^{j+1}, & \text{i=0;} \\ \dfrac{C}{\sigma\tau(p^{j+1} + 0.5h)} + \Lambda^{+} u^{(\sigma)} - u_{\overline{t},N}^{j+1}, & \text{i=N,} \end{cases} \tag{48}$$

$$C = p_0 \varphi_N + \sum_{i=0}^{N} \varphi_i \hbar.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *При достаточно гладком решении $u(x,t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$ разностная схема (14) — (17) имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$ при $\sigma = 0.5$ (схема Кранка-Николсона) и $O(\tau + h^2)$ при $\sigma \neq 0.5$.*

6 Сходимость разностной схемы

Из теоремы 1 и теоремы 2 следует

Теорема 3. *Пусть решение задачи (5) — (8) удовлетворяет условию гладкости: $u(x,t) \in C^{4,2}(\overline{Q}_T)$. Тогда при достаточно малых шагах сетки τ и $\sigma \geq \dfrac{1}{2}$ решение разностной задачи (14) — (17) сходится к решению дифференциальной задачи (5) — (8) и имеет точность, совпадающую с порядком погрешности аппроксимации.*

References

[1] L.I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., **4**:6 (1964), 33–59. Zbl 0206.39801

[2] A.F. Chudnovskii, *Some corrections in the formulation and solution of heat and moisture transfer problems in soil*, Collection of Works on Agrophysics, **23**, Gidrometeoizdat, 1969, 41–54.

[3] A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii, *On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems*, Sov. Math. Dokl., **10** (1969), 398–400. Zbl 0187.35501

[4] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differ. Equations, **13** (1977), 204–211. Zbl 0403.35043

[5] N.I. Ionkin, *Uniform convergence of a difference scheme for a non-stationary non-local boundary value problem*, Current problems in applied mathematics, Work Collect., Moscow State University Press, Moscow, 1989. Zbl 0708.65083

[6] V.A. Il'in, E.I. Moiseev, *A nonlocal boundary value problem for the Sturm-Liouville operator in a differential and a difference treatment*, Sov. Math., Dokl., **34** (1986), 507–511. Zbl 0643.34016

[7] N.I. Ionkin, E.I. Moiseev, *A problem for the heat-transfer equation with two-point boundary conditions*, Differ. Equations, **15** (1980), 915–923. Zbl 0431.35046

[8] D.G. Gordeziani, *On Methods for solving a class of nonlocal boundary value problems*, Preprint, Institute of Applied Mathematics, Tbilisi State University, Tbilisi, 1981.

[9] A.M. Nakhushev, *A nonlocal problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their applications to the prediction of ground moisture*, Sov. Math., Dokl., **19** (1978), 1243–1247. Zbl 0433.35043

[10] A.P. Soldatov, M.Kh. Shkhanukov, *Boundary value problems with general nonlocal Samarskij condition for pseudoparabolic equations of higher order*, Sov. Math., Dokl., **36**:3 (1988), 507–511. Zbl 0701.35092

[11] J.R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155–160. MR0160437

[12] L.A. Muravei, A.V. Filinovskii, *On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation*, Math. USSR, Sb., **74**:1 (1993), 219–249. Zbl 0774.35031

[13] N.I. Ionkin, E.A. Valikova, *The maximum principle for a particular nonlocal nonself-adjoint boundary value problem*, Differ. Equations, **31**:7 (1995), 1180–1187. Zbl 0864.35046

[14] A.K. Bazzaev, *On the difference solution of a nonlocal boundary value problem for a fractional diffusion equation*, Comput. Math. Math. Phys., **65**:6 (2025), 1173–1180. Zbl 1570.65218

[15] A.I. Kozhanov, *On the solvability of a boundary-value problem with a non-local boundary condition for linear parabolic equations*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **30** (2004), 63–69.

[16] A.I. Kozhanov, A.V. Dyuzheva, *The second initial-boundary value problem with integral displacement for second-order hyperbolic and parabolic equations*, Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **25**:3 (2021), 423–434. Zbl 1499.35438

[17] A.I. Kozhanov, A.V. Dyuzheva, *Non-local problems with integral displacement for highorder parabolic equations*, Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **36** (2021), 14–28. Zbl 1472.35213

[18] A.I. Kozhanov, A.V. Dyuzheva, *Integral analogue of the first initial-boundary value problem for second-order hyperbolic and parabolic equations*, Math. Notes, **111**:4 (2022), 562–570. Zbl 1487.35006

[19] A.I. Kozhanov, *Nonlocal problems with generalized Samarskii-Ionkin condition for some classes of nonstationary differential equations*, Dokl. Math., **107**:1 (2023), 40–43. Zbl 1518.35431

[20] A.I. Kozhanov, A.M. Abdrakhmanov, *Spatially nonlocal boundary value problems with a generalized Samarskii-Ionkin condition for quasi-parabolic equations*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **20**:1 (2023), 110–123. Zbl 1546.35126

[21] A.I. Kozhanov, *Initial-boundary value problems with generalized Samarskii-Ionkin condition for parabolic equations with arbitrary evolution direction*, J. Math. Sci., New York, **274**:2 (2023), 228–240. Zbl 1532.35308

[22] A.I. Kozhanov, T.N. Shipina, *Linear inverse problems for the heat equation and nonlocal boundary value problems with generalized Samarskii-Ionkin condition*, Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser., **29**:3 (2023), Paper No. 64. Zbl 1523.35299

[23] A.I. Kozhanov, *To the question of the solvability of the Ionkin problem for partial differential equations*, *Mathematics*, **12**:3 (2024), Article No 487.

[24] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0304.65003

[25] A.A. Samarskii, *Theory of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1989. Zbl 0874.65077

Alexander K. Bazzaev
North Ossetia State University,
44 – 46 Vatutin Street,
362025, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia;
Vladikavkaz Institute of Management,
14 Borodinskaya Street,
362025, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Email address: a.k.bazzaev@yandex.ru