S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 2, стр. 952–962 (2026)
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.058

УДК 519.234
MSC 62G08

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНО-ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИИ УСЛОВНОЙ ДИСПЕРСИИ В НЕОДНОРОДНОЙ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ

Ю.Ю. Линке

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: This paper considers the problem of estimating the conditional variance function in a heteroscedastic nonparametric regression model. New universal local linear kernel estimators for this function are proposed and the consistency of these estimators has been proven. The only requirement for the design is that they forms a partition of the domain of the regression and conditional variance functions with the mesh size tending to zero with high probability. This condition includes both the case of fixed design, without the requirement of regularity, and the situation of random design, without the requirement of any form of weak dependence of the variables.

Keywords: nonparametric heteroscedastic regression, conditional variance function, universal local linear kernel estimators, consistency, fixed design, random design.

Linke, Y.Y., Universal local linear estimates for the conditional variance function in a heteroscedastic nonparametric regression.

© 2026 Линке Ю.Ю.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2024-0001).

Поступила 25 июня 2026 г., опубликована 20 ноября 2026 г.

1 Введение

Рассматривается неоднородная модель непараметрической регрессии, когда наблюдения $X_1, \dots, X_n$ представимы в виде

$$X_i = f(z_i) + \sigma(z_i)\xi_i, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

где неизвестные скалярные функции $f(t)$ и $\sigma(t)$, $t \in [0,1]$, непрерывны. В модели (1) мы будем предполагать, что регрессоры $\{z_i;\ i = 1, \dots, n\}$ — это случайные величины с известными значениями, возможно зависящие от n. Таким образом, модели с детерминированными регрессорами мы также включаем в рассмотрение. Погрешности $\{\xi_i;\ i = 1, \dots, n\}$ — независимые одинаково распределенные центрированные случайные величины с единичным вторым моментом, не зависящие от регрессоров $\{z_i;\ i = 1, \dots, n\}$. Нас интересуют близкие к минимальным условия на регрессоры в задаче оценивания функции условной дисперсии $\sigma^2(t)$.

Оценки для функции условной дисперсии могут иметь как самостоятельный интерес, так и использоваться в качестве вспомогательных (например, при построении доверительных границ для регрессионной функции; см. подробности в работах, указанных в библиографии). В непараметрической регрессии задаче оценивания функции условной дисперсии (при тех или иных ограничениях на параметры модели) посвящена обширная литература (в качестве ориентира см., например, работы [1]–[26], в большинстве из которых рассматриваются оценки ядерного типа). Отметим, что модели со случайными и детерминированными регрессорами исследуются, как правило, отдельно. При этом в первом случае регрессоры удовлетворяют той или иной форме слабой зависимости (см., например, [1]–[20]; в работах [1]–[10] регрессоры независимы и одинаково распределены), а во втором предполагается выполненным некоторое условие регулярного плотного заполнения регрессорами области задания функций дисперсии и регрессии (например, эквидистантный план; см. детали в [21]–[24]). В [25] и [26] используется универсальное условие на регрессоры, позволяющее модели с детерминированными и случайными регрессорами исследовать в едином подходе: относительно регрессоров требуется лишь, чтобы они асимптотически (с ростом n) плотно заполняли область задания функций регрессии и условной дисперсии. Это условие включает в себя оба типа регрессоров, при этом без требования той или иной формы их слабой зависимости или регулярности. По существу, это условие является необходимым для восстановления функций регрессии, условной дисперсии и их производных. Важно подчеркнуть, что при таком условии на регрессоры в оценивании не задействован характер их зависимости.

В данной работе предложен новый класс универсальных ядерных оценок, относящихся к локально–линейным, и доказана состоятельность этих оценок при указанном выше универсальном условии на регрессоры в терминах плотных данных. Отметим, что в [25] и [26] введены и

исследуются только локально–постоянные оценки для функции условной дисперсии. Хорошо известно, что локально–линейные оценки могут иметь преимущества перед локально–постоянными (см., например, [14]), что обосновывает введение нового класса оценок в данной работе. Отметим, что используемое в работе универсальное условие на регрессоры было ранее предложено в задаче оценивания регрессионной функции и ее производных (см. [27]–[33]). Близкие универсальные условия на регрессоры в терминах плотных предложены также в [34]–[35] в различных регресссионных постановках задачи оценивания характеристик случайного процесса. Особенностью предлагаемых в данной статье и в работах [25]–[35] универсальных ядерных оценок являются конструкций интегральных сумм Римана в структуре этих оценок. Отмеченное обстоятельство открывает возможность при исследовании оценок использовать близость интегральных сумм и соответствующих интегралов, а не предельные теоремы теории вероятностей, и позволяет использовать универсальные, обладающие рядом преимуществ и близкие к минимальным условия на регрессоры в терминах плотных данных.

2 Основной результат

Прежде чем определить новый класс оценок для функции условной дисперсии, введем ряд предположений и обозначений.

($\mathbf{A}_1$) *Наблюдения* $X_1, \dots, X_n$ *представимы в виде* (1), *где неизвестные функции* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *и* $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ *непрерывны. Регрессоры* $\{z_i;\ i = 1, \dots, n\}$ *представляют собой набор наблюдаемых случайных величин со значениями в* $[0,1]$, *имеющих, вообще говоря, неизвестные распределения, не обязательно независимых или одинаково распределенных. Случайные величины* $\{z_i;\ i = 1, \dots, n\}$ *могут зависеть от* n, *т.е. могут рассматриваться в схеме серий. Погрешности* $\{\xi_i\}$ *независимы и одинаково распределены,* $\mathbb{E}\xi_1 = 0$ *и* $\mathbb{E}|\xi_1|^2 = 1$. *Погрешности* $\{\xi_i\}$ *не зависят от дизайна* $\{z_i\}$.

При построении оценок нам потребуются две ядерные функции $K(\cdot)$ и $\widetilde{K}(\cdot)$, условия на которые приведены в следующих двух предположениях.

($\mathbf{A}_2$) *Ядерная функция* $K(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *является плотностью симметричного распределения с носителем на* $[-1,1]$, *т.е.* $K(t) \geq 0$, $K(t) = K(-t)$ *и при всех* $t \in [-1,1]$ *и* $\int_{-1}^{1} K(t)dt = 1$. *Функция* $K(t)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $1 \leq L < \infty$.

($\mathbf{A}_3$) *Ядерная функция* $\widetilde{K}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *является плотностью симметричного распределения с носителем на* $[-1,1]$ *и удовлетворяет условию Липшица с константой* $1 \leq \widetilde{L} < \infty$.

Положим $K_h(t) = h^{-1}K(h^{-1}t)$ и $\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t) = \widetilde{h}^{-1}K(\widetilde{h}^{-1}t)$, где через $h = h_n$ и $\widetilde{h} = \widetilde{h}_n$ обозначены размеры окон, являющиеся параметрами сглаживания в ядерных методах. Таким образом, $K_h(t)$ и $\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t)$ — плотности распределения на $[-h,h]$.

Обозначим через $z_{n:1} \le \ldots \le z_{n:n}$ элементы вариационного ряда, построенного по выборке $\{z_i;\, i = 1, \ldots, n\}$. Положим

$$z_{n:0} := 0, \quad z_{n:n+1} := 1, \quad \Delta z_{ni} := z_{n:i} - z_{n:i-1}, \quad i = 1, \ldots, n+1.$$

Отклики из (1), относящиеся к порядковой статистике $z_{n:i}$, обозначим через X_{ni}. Условимся, что всюду в дальнейшем все пределы, если не оговорено иное, берутся при $n \to \infty$. Введем теперь предположение, касающееся регрессоров, и являющееся центральным условием работы.

($\mathbf{A}_4$) *Имеет место предельное соотношение* $\delta_n := \max\limits_{1 \le i \le n+1} \Delta z_{ni} \xrightarrow{p} 0$.

Перейдем к определению ядерных оценок. При оценивании функции условной дисперсии нам потребуется оценка для регрессионной функции f, в качестве которой мы будем использовать следующую универсальную локально-линейную оценку, предложенную в [28]:

$$f^*_{n,h}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{w_{n2}(t) - (t - z_{n:i}) w_{n1}(t)}{w_{n0}(t) w_{n2}(t) - w^2_{n1}(t)} X_{ni} K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}, \tag{2}$$

где

$$w_{nj}(t) = \sum_{i=1}^{n} (t - z_{n:i})^j K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}, \quad j = 0, 1, 2.$$

В (2) и далее мы считаем, что $0/0 = 0$. Отметим, что ядерная оценка (2) является первой координатой двумерной точки, на которой достигается минимум

$$\min_{(a,b)} \sum_{i=1}^{n} \left(X_{ni} - a - b(t - z_{n:i})\right)^2 K_h(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}.$$

Таким образом, оценки (2) в известном смысле близки к классическим локально–линейным оценкам, но во взвешенном методе наименьших квадратов используются иные веса, определяемые порядковыми статистиками, построенными по набору регрессоров, а вместо исходных наблюдений X_i участвуют наблюдения X_{ni}, ассоциированные с соответствующими порядковыми статистиками.

Наконец, для любого $\widetilde{h} \in (0, 1)$ введем в рассмотрение следующий класс оценок для функции условной дисперсии $\sigma^2(t)$:

$$\widehat{\sigma^2}_{n,h,\widetilde{h}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i}(t) \big(X_{ni} - f^*_{n,h}(z_{n:i})\big)^2 \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{n,i}(t) &= \frac{\widetilde{w}_{n2}(t) - (t - z_{n:i}) \widetilde{w}_{n1}(t)}{\widetilde{w}_{n0}(t) \widetilde{w}_{n2}(t) - \widetilde{w}^2_{n1}(t)}, \\ \widetilde{w}_{nj}(t) &= \sum_{i=1}^{n} (t - z_{n:i})^j \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}, \quad j = 0, 1, 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что ядерная оценка (3) является первой координатой двумерной точки, на которой достигается минимум

$$\min_{(a,b)} \sum_{i=1}^{n} \Big(\big(X_{ni} - f^*_{n,h}(z_{n:i})\big)^2 - a - b(t - z_{n:i}) \Big)^2 \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i}) \Delta z_{ni}.$$

Таким образом, предлагаемый класс оценок по сути близок к классическим локально–линейным ядерным оценкам для функции условной дисперсии (см., например, [14]). Но во взвешенном методе наименьших квадратов мы используем другие веса, задаваемые спейсингами и порядковыми статистиками, построенными по набору регрессоров, а также используем ассоциированные с порядковыми статистиками наблюдения $\{X_{ni}\}$ вместо исходных $\{X_i\}$.

Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A_1)–(A_4) *и* $\mathbb{E}|\xi_1|^4 < \infty$, *а последовательности положительных чисел* $h = h_n \to 0$ *и* $\widetilde{h} = \widetilde{h}_n \to 0$ *таковы, что*

$$h^{-2}\,\mathbb{E}\delta_n \to 0 \qquad \text{и} \qquad \widetilde{h}^{-1}\,\mathbb{E}\delta_n \to 0. \tag{5}$$

Тогда для любого фиксированного $t \in (0,1)$ *имеет место предельное соотношение*

$$\widehat{\sigma^2}_{n,h,\widetilde{h}}(t) \xrightarrow{\;p\;} \sigma^2(t).$$

Таким образом, единственное условие на регрессоры, гарантирующее состоятельность универсальной локально–линейной оценки $\widehat{\sigma^2}_{n,h,\widetilde{h}}(t)$ для функции условной дисперсии $\sigma^2(t)$ — это условие (A_4) асимптотически плотного заполнения регрессорами отрезка $[0,1]$, т.е. области задания функций $f(t)$ и $\sigma^2(t)$. Подробные обсуждения условия (A_4) можно найти в [26] и [27]–[29]. Отметим также, что при выводе теоремы 1 существенно используется равномерная состоятельность универсальной локально–линейной ядерной оценки $f^*_{n,h}(t)$ для функции $f(t)$. Нам потребуется следующее утверждение, являющееся следствием теоремы 1 в [28].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (A_1), (A_2) *и* (A_4), *а последовательность положительных чисел* $h = h_n \to 0$ *такова, что*

$$h^{-2}\,\mathbb{E}\delta_n \to 0.$$

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\sup_{t\in[0,1]} \big|f^*_{n,h}(t) - f(t)\big| \xrightarrow{\;p\;} 0.$$

3 Доказательство теоремы 1

В этом разделе для удобства и не оговаривая это отдельно считаем, что выполнены все условия теоремы 1. Положим

$$c \equiv c(\widetilde{K}) = \frac{\widetilde{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_1^2}{96\widetilde{L}(6\widetilde{L} + \widetilde{\kappa}_2 + \widetilde{\kappa}_1/2)} < \frac{1}{864\widetilde{L}} < 1, \tag{6}$$

где символ $\widetilde{\kappa}_j$, $j = 1, 2$, обозначает j-й абсолютный момент распределения с плотностью $\widetilde{K}(t)$:

$$\widetilde{\kappa}_j = \int_{-1}^{1} |u|^j \widetilde{K}(u)du.$$

Легко видеть, что силу четности ядра $\widetilde{K}$ разность $\widetilde{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_1^2$ представляет собой дисперсию невырожденного распределения, тем самым она строго положительна. При выводе оценки в (6) мы учли, что $c < \widetilde{\kappa}_2/(96\widetilde{L} \cdot 6\widetilde{L})$, при этом $\widetilde{\kappa}_2 \le 2\widetilde{L}/3$.

Положим

$$A_{n,\widetilde{h}}(t) = \{i : |t - z_{n:i}| \le \widetilde{h}, 1 \le i \le n\} \tag{7}$$

и заметим, что справедливы оценки

$$\sum_{i \in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \Delta z_{ni} \le 2\widetilde{h} + \delta_n, \qquad \sup_{s \in [0,1]} \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(s) \le \widetilde{L}\widetilde{h}^{-1}. \tag{8}$$

Мы неоднократно также будем использовать тот факт, что

$$\mathbb{P}\big(\delta_n > c\widetilde{h}\big) \le (c\widetilde{h})^{-1}\mathbb{E}\delta_n \to 0. \tag{9}$$

Отметим, что в (8) и (9) мы воспользовались соответственно условиями (A_3) и (5).

Нам потребуются две вспомогательные леммы. В основе первой из них лежит близость между интегральными суммами Римана и соответствующими интегралами.

Лемма 1. *При $\widetilde{h} < 1/2$ на подмножестве элементарных исходов, определяемых соотношением $\delta_n \le c\widetilde{h}$, справедливы неравенства*

$$\sup_{t \in [0,1]} |\widetilde{w}_{nj}(t)| \le 3\widetilde{L}\widetilde{h}^j, \quad j = 0, 1, 2,$$

$$\inf_{t \in [0,1]} (\widetilde{w}_{n0}(t)\widetilde{w}_{n2}(t) - \widetilde{w}_{n1}^2(t)) \ge \frac{1}{8}(\widetilde{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_1^2)\widetilde{h}^2.$$

Кроме того, в приведенных условиях при любом $t \in (0, 1)$ для всех $i \in A_{n,\widetilde{h}}(t)$ выполнено

$$|\beta_{n,i}(t)| \le \frac{48\widetilde{L}^2}{\widetilde{\kappa}_2 - \widetilde{\kappa}_1^2} \equiv \widetilde{\kappa}. \tag{10}$$

Доказательство. Первые два утверждения доказаны в лемме 1 в [28]. Из этих утверждений и определений (4) и (7) следует оценка (10). □

Лемма 2. *Имеют место предельные соотношения*

$$\Sigma_{n,1} \equiv \sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})\Delta z_{ni}\big(|\xi_i| - \mathbb{E}|\xi_1|\big) \xrightarrow{p} 0,$$

$$\Sigma_{n,2} \equiv \sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})\Delta z_{ni}\big(\xi_i^2 - 1\big) \xrightarrow{p} 0,$$

$$\Sigma_{n,3} \equiv \sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \beta_{n,i}(t)\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})\Delta z_{ni}\big(\xi_i^2 - 1\big) \xrightarrow{p} 0$$

Доказательство. В силу (8) на множестве элементарных исходов $\delta_n \le c\widetilde{h}$ при $\widetilde{c} < 1$ выполнено

$$\sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})\Delta z_{ni} \le 3\widetilde{L}, \tag{11}$$

а потому

$$\sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \widetilde{K}^2_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})(\Delta z_{n:i})^2 \le 3\widetilde{L}^2\delta_n\widetilde{h}^{-1}.$$

Таким образом, на указанном множестве элементарных исходов для любого $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\big(|\Sigma_{n,1}| > \varepsilon\big) \le \frac{\mathbb{V}ar|\xi_1| \sum_{i\in A_{n,\widetilde{h}}(t)} \widetilde{K}^2_{\widetilde{h}}(t-z_{n:i})(\Delta z_{n:i})^2}{\varepsilon^2} \le$$

$$\le \frac{3\widetilde{L}^2\mathbb{V}ar|\xi_1|\,\delta_n}{\varepsilon^2\,\widetilde{h}}, \tag{12}$$

где символ $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}$ обозначает условную вероятность при фиксации σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной случайными величинами $\{z_i;\, i = 1,\dots,n\}$. При выводе (12) мы использовали также неравенство Чебышева. Следовательно, для любого фиксированного $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|\Sigma_{n,1}| > \varepsilon) = \mathbb{P}\big(|\Sigma_{n,1}| > \varepsilon,\ \delta_n \le c\widetilde{h}\big) + \mathbb{P}\big(|\Sigma_{n,1}| > \varepsilon,\ \delta_n > c\widetilde{h}\big) \le$$

$$\le \mathbb{E}I\big(\delta_n \le c\widetilde{h}\big)\mathbb{P}_{\mathcal{F}_n}\big(|\Sigma_{n,1}| > \varepsilon\big) + \mathbb{P}(\delta_n > c\widetilde{h}) \le$$

$$\le \frac{3\widetilde{L}^2\mathbb{V}ar|\xi_1|\mathbb{E}\delta_n}{\varepsilon^2\,\widetilde{h}} + \mathbb{P}(\delta_n > c\widetilde{h}).$$

Для завершения доказательства первого утверждения леммы остается использовать условие (5) и соотношение (9). Вывод второго и третьего утверждений с очевидными изменениями повторяет вывод первого. В последнем случае нужно дополнительно использовать оценку (10). □

Перейдем к доказательству теоремы 1. Регрессионное уравнение (1) можно переписать в виде

$$X_{ni} = f(z_{n:i}) + \sigma(z_{n:i})\xi_i, \qquad i = 1,\dots,n.$$

Здесь мы учли независимость и одинаковую распределенность погрешностей $\{\xi_i\}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\big(X_{ni} - f^*_{n,h}(z_{n:i})\big)^2 = \big(f^*_{n,h}(z_{n:i}) - f(z_{n:i})\big)^2 + \\ +2\big(f(z_{n:i}) - f^*_{n,h}(z_{n:i})\big)\sigma(z_{n:i})\xi_i + \sigma^2(z_{n:i})\xi_i^2.$$

Кроме того, в силу определений, введенных в (4), выполнено

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i}(t)\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i})\Delta z_{ni} = 1.$$

Таким образом, для оценки $\widehat{\sigma^2}_{n,h,\overline{h}}(t)$ из (3) справедливо представление

$$\widehat{\sigma^2}_{n,h,\widetilde{h}}(t) - \sigma^2(t) = I_{n,1} + 2I_{n,2} + I_{n,3}, \tag{13}$$

где

$$I_{n,1} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i}(t)\big(f^*_{n,h}(z_{n:i}) - f(z_{n:i})\big)^2\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i})\Delta z_{ni},$$

$$I_{n,2} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i}(t)\big(f(z_{n:i}) - f^*_{n,h}(z_{n:i})\big)\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}\sigma(z_{n:i})\xi_i, \tag{14}$$

$$I_{n,3} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{n,i}(t)\big(\sigma^2(z_{n:i})\xi_i^2 - \sigma^2(t)\big)\widetilde{K}_{\widetilde{h}}(t - z_{n:i})\Delta z_{ni}.$$

Покажем малость по вероятности каждого из трех слагаемых в правой части тождества (13). Подчеркнем, что ввиду свойств плотности $\widetilde{K}_h(\cdot)$, область суммирования для трех величин в (14) совпадает с множеством $A_{n,\widetilde{h}}(t)$ из (7), что является принципиальным моментом для дальнейшего анализа.

В силу (10) и (11) на множестве элементарных исходов $\delta_n \le c\widetilde{h}$ справедлива оценка

$$|I_{n,1}| \le 3\widetilde{L}\widetilde{\kappa} \sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)|^2.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big(|I_{n,1}| > \varepsilon\big) \le \mathbb{P}\big(|I_{n,1}| > \varepsilon,\ \delta_n \le c\widetilde{h}\big) + \mathbb{P}\big(|I_{n,1}| > \varepsilon,\ \delta_n > c\widetilde{h}\big) \le \\ \le \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)|^2 > \varepsilon(3\widetilde{L}\widetilde{\kappa})^{-1}\right) + \mathbb{P}\big(\delta_n > c\widetilde{h}\big) \to 0 \tag{15}$$

ввиду утверждения теоремы 2 и соотношения (9), что доказывает сходимость $I_{n,1} \xrightarrow{p} 0$.

Рассмотрим $I_{n,2}$. Положим $\sigma_0 = \sup_{t\in[0,1]} \sigma(t)$ и заметим, что $\sigma_0 < \infty$ в силу условия (A_1). Далее, на множестве элементарных исходов $\delta_n \le c\widetilde{h}$ справедлива оценка

$$|I_{n,2}| \le \widetilde{\kappa}\sigma_0 \sup_{t\in[0,1]} |f^*_{n,h}(t) - f(t)|\big(\Sigma_{n,1} + 3\widetilde{L}\mathbb{E}|\xi_1|\big), \tag{16}$$

где величины $\widetilde{\kappa}$ и $\Sigma_{n,1}$ определены в леммах 1 и 2. При выводе мы этого соотношения мы использовали также утверждение (10) леммы 1 и оценку (11). Аналогично (15), предельное соотношение $I_{n,2} \xrightarrow{p} 0$ следует теперь из (16), утверждений теоремы 2, леммы 2 и сходимости (9).

Наконец, с учетом определения величин $\Sigma_{n,2}$ и $\Sigma_{n,3}$ (см. лемму 2), соотношения (11) и утверждения (10) леммы 1, для третьего слагаемого $I_{n,3}$ на множестве элементарных исходов $\delta_n \le c\widetilde{h}$ имеем

$$|I_{n,3}| \le \widetilde{\kappa}\omega_{\sigma^2}(\widetilde{h})\big(|\Sigma_{n,2}| + 3\widetilde{L}\big) + \sigma^2(t)\,|\Sigma_{n,3}|\,, \tag{17}$$

где $\omega_{\sigma^2}(\cdot)$ — модуль непрерывности функции $\sigma^2(t)$. Аналогично (15), оценка (17) вместе со вторым утверждением леммы 2, соотношением (9) и свойством $\omega_{\sigma^2}(\widetilde{h}) \to 0$ при $\widetilde{h} \to 0$, гарантирует сходимость $I_{n,3} \xrightarrow{p} 0$.

Таким образом, мы установили малость по вероятности всех слагаемых в правой части тождества (13), что завершает доказательство теоремы 1.

References

[1] Y. Shen, C. Gao, D. Witten, F. Han, *Optimal estimation of variance in nonparametric regression with random design*, Ann. Stat., **48**:6 (2020), 3589–3618. Zbl 1460.62053

[2] J. Sun, Y. Gai, L. Lin, *Weighted local linear composite quantile estimation for the case of general error distributions*, J. Stat. Plann. Inference, **143**:6 (2013), 1049–1063. Zbl 1428.62166

[3] J.S. Racine, K. Li, *Nonparametric conditional quantile estimation: A locally weighted quantile kernel approach*, J. Econom., **201**:1 (2017), 72–94. Zbl 1391.62061

[4] W. Xu, H. Lin, T. Tong, R. Zhang, *A new method for estimating Sharpe ratio function via local maximum likelihood*, J. Appl. Stat., **51**:1 (2024), 34–52. Zbl 1566.62797

[5] Z. Li, Y. Gong, L. Peng, *Empirical likelihood Intervals for conditional value-at-risk in heteroscedastic regression models*, Scand. J. Stat., **38**:4 (2011), 781–787. Zbl 1246.91063

[6] K. Yu, M.C. Jones, *Likelihood-based local linear estimation of the conditional variance function*, J. Am. Stat. Assoc., **99**:465 (2004), 139–144. Zbl 1089.62507

[7] S. Jin, L. Su, Z. Xiao, *Adaptive nonparametric regression with conditional heteroskedasticity*, Econ. Theory, **31**:6 (2015), 1153–1191. Zbl 1442.62743

[8] L. Cai, S. Wang, *Oracle-efficient global inference for variance function in nonparametric regression with missing covariates*, Stat. Sin., **33**:1 (2023), 281–302. Zbl 7688211

[9] C. Park, J. Huh, *Nonparametric estimation of a log-variance function in scale-space*, J. Stat. Plann. Infer., **143**:10 (2013), 1766–1780. Zbl 1279.62095

[10] Q. Song, L. Yang, *Spline confidence bands for variance functions*, J. Nonparametr. Stat., **21**:5 (2009), 589–609. Zbl 1165.62317

[11] L.-H. Chen, M.-Y. Cheng, L. Peng, *Conditional variance estimation in heteroscedastic regression models*, J. Stat. Plann. Infer., **139**:2 (2009), 236–245. Zbl 1149.62032

[12] N.H. Chan, L. Peng, D. Zhang, *Empirical-likelihood-based confidence intervals for conditional variance in heteroskedastic regression models*, Econ. Theory **27**:1 (2011), 154–177. Zbl 1401.62143

[13] K. Yu, *Nonparametric multiplicative heteroscedasticity in multi-dimensional regression*, J. Korean Stat. Soc., **46**:3 (2017), 404–412. Zbl 1368.62103

[14] J. Fan, Q.W. Yao, *Efficient estimation of conditional variance functions in stochastic regression*, Biometrika, **85**:3 (1998), 645–660. Zbl 0918.62065
[15] F.A. Ziegelmann, *Nonparametric estimation of volatility functions: the local exponential estimator*, Econ. Theory, **18**:4 (2002), 985–991. Zbl 1109.62358
[16] Z. Zhao, W.B. Wu, *Confidence bands in nonparametric time series regression*, Ann. Stat., **36**:4 (2008), 1854–1878. Zbl 1142.62346
[17] R. Kulik, C. Wichelhaus, *Nonparametric conditional variance and error density estimation in regression models with dependent errors and predictors*, Electron. J. Stat., **5** (2011), 856–898. Zbl 1274.62244
[18] D. Li, W. Liu, Q. Wang, W.B. Wu, *Simultaneous confidence bands in nonlinear regression models with nonstationarity*, Stat. Sin., **27**:3 (2017), 1385–1400. Zbl 1372.62013
[19] Y. Wang, M. Tang, *Local M-estimation for conditional variance in heteroscedastic regression models*, Commun. Stat. Theory Methods, **44**:1 (2015), 48–62. Zbl 1311.62060
[20] Y. Yang, Y. Xu, Q. Song, *Spline confidence bands for variance functions in nonparametric time series regressive models*, J. Nonparametric Stat., **24**:3 (2012), 699–714. Zbl 1254.62098
[21] T.T. Cai, M. Levine, L. Wang, *Variance function estimation in multivariate nonparametric regression with fixed design*, J. Multivariate Anal., **100**:1 (2009), 126–136. Zbl 1151.62029
[22] L.D. Brown, M. Levine, *Variance estimation in nonparametric regression via the difference sequence method*, Ann. Stat., **35**:5 (2007), 2219–2232. Zbl 1126.62024
[23] G. Boente, M. Ruiz, R.H. Zamar, *On a robust local estimator for the scale function in heteroscedastic nonparametric regression*, Stat. Probab. Lett., **80**:15-16 (2010), 1185–1195. Zbl 1190.62081
[24] L. Wang, L.D. Brown, T.T. Cai, M. Levine, *Effect of mean on variance function estimation in nonparametric regression*, Ann. Stat., **36**:2 (2008), 646–664. Zbl 1133.62033
[25] I.S. Borisov, Yu.Yu. Linke, *Universal kernel-type estimators for the conditional variance in heteroscedastic models of nonparametric regression*, Sib. Adv. Math., **35**:4 (2025), 277–286. Zbl 1587.62092
[26] Yu.Yu. Linke, *Universal kernel estimators in a heteroscedastic nonparametric regression model*, Math. Notes, **120**:5 (2026), 887–901.
[27] I.S. Borisov, Yu.Yu. Linke, P.S. Ruzankin, *Universal weighted kernel-type estimators for some class of regression models*, Metrika, **84**:2 (2021), 141–166. Zbl 1461.62046
[28] Y. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya, S. Shalnova, *Universal local linear kernel estimators in nonparametric regression*, Mathematics, **10**:15 (2022), Article No. 2693.
[29] Yu.Yu. Linke, I.S. Borisov, P.S. Ruzankin, *Universal kernel-type estimation of random fields*, Statistics, **57**:4 (2023), 785–810. Zbl 7729075
[30] Y. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya, S. Shalnova, *Multivariate universal local linear kernel estimators in nonparametric regression: uniform consistency*, Mathematics, **12**:12 (2024), Article No. 1890.
[31] Y. Linke, I. Borisov, P. Ruzankin, V. Kutsenko, E. Yarovaya, S. Shalnova, *Multivariate universal local linear kernel estimators in nonparametric regression: simulations and real data processing*, Sankhya A, (2025), 1–28.
[32] Yu.Yu. Linke, I.S. Borisov, *Approximation of smooth regression functions of multiple variables by universal kernel estimators*, Theory Probab. Appl., **71**:1 (2026), 1–12. Zbl 8198663
[33] S.S. Petrenko, Yu.Yu. Linke, *Universal local linear kernel estimators for the derivative of a regression function*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **22** (2025), 1382–1393.

[34] Yu.Yu. Linke, *Kernel estimators for the mean function of a stochastic process under sparse design conditions*, Siberian Adv. Math., **32**:4 (2022), 269–276. MR4590405
[35] Yu.Yu. Linke, I.S. Borisov, *Universal nonparametric kernel-type estimators for the mean and covariance functions of a stochastic process*, Theory Probab. Appl., **69**:1 (2024), 35–58. Zbl 7842544

Yuliana Yurievna Linke
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: linke@math.nsc.ru