S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 2, стр. 903–918 (2026)
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.056

УДК 517.983.22
MSC 47B91

ОБ ОПЕРАТОРАХ СВЕРТКИ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ С ОБРАТНЫМИ СДВИГАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

П.А. Иванов, С.Н. Мелихов

Представлено И.В. Подвигиным

Abstract: Operators of the commutant of the system $\mathcal{D}_0$ of partial backward shift operators in the Fréchet space of all holomorphic functions on a polycylindrical domain Ω in $\mathbb{C}^N$ containing the point 0 are studied. An integral representation for them and a criterion of their invertibility are proved. It is established that for the product of circular domains, every such operator is an operator of infinite order with constant coefficients. When the characteristic function of an operator of the commutant of the system $\mathcal{D}_0$ is a nonzero function with separable variables, we prove the possibility of the synthesis in its kernel and the existence of a continuous linear right inverse to this operator.

Keywords: convolution operator, backward shift operator, space of holomorphic functions.

Ivanov, P.A., Melikhov, S.N. On convolution operators commuting with backward shifts in spaces of holomorphic functions.

© 2026 Иванов П.А, Мелихов С.Н.

Исследование выполнено в Южном федеральном университете за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00062, https://rscf.ru/project/25-21-00062/.

Поступила 11 марта 2026 г., опубликована 2 ноября 2026 г.

1 Введение

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $1 \le j \le N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций, наделенное топологией равномерной сходимости на компактах Ω. В данной работе изучаются линейные непрерывные операторы в $H(\Omega)$, перестановочные со всеми операторами частного обратного сдвига $D_{j,0}(f)(t) = \frac{f(t)-f(t_1,\ldots,t_{j-1},0,t_{j+1},\ldots,t_N)}{t_j}$, $1 \le j \le N$. В [1] было получено их представление в виде обобщенной свертки. Именно, в [1] установлено, что все они (и только они) имеют вид $B_\varphi(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$, где φ — линейный непрерывный функционал на $H(\Omega)$, а T_z — операторы, ассоциированные с системой $\mathcal{D}_0$. Отметим, что операторы обратного сдвига, T_z, B_φ тесно связаны с интерполирующей функцией А.Ф. Леонтьева, используемой в теории рядов экспонент и при исследовании операторов свертки, задаваемых обычными сдвигами, с произведением Дюамеля (см. [1], [2]).

В этой статье упомянутое выше представление B_φ конкретизировано в интегральной форме. При этом используется реализация топологического сопряженного к $H(\Omega)$ пространства $H(\Omega)'$ с помощью преобразования Коши в виде пространства ростков $H_0(C\Omega)$ голоморфных функций на $C\Omega = (\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_1) \times \cdots \times (\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_N)$, доказанная Х. Тильманом [3]. Полученное интегральное представление является основным аналитическим средством исследования операторов B_φ. Если $H(\Omega)'$ отождествить с $H_0(C\Omega)$, то сопряженным к B_φ является оператор умножения на функцию $t_1 \cdots t_N \widetilde{\varphi}(t)$, где $\widetilde{\varphi}$ — преобразование Коши функционала φ. Данный факт позволяет применить стандартные результаты о делимости функций многих комплексных переменных, голоморфных на открытом множестве в $\mathbb{C}^N$. Специфика рассматриваемой ситуации состоит в том, что в ней возникает проблема деления ростков голоморфных функций на компактном подмножестве $\overline{\mathbb{C}}^N$ с переменной областью голоморфности.

В настоящей работе доказана сюръективность любого ненулевого оператора B_φ и в терминах поведения функции $\widetilde{\varphi}$ установлен критерий обратимости B_φ в $H(\Omega)$. Введены операторы бесконечного порядка с постоянными коэффициентами из коммутанта. Если Ω является произведением открытых кругов в $\mathbb{C}$ с центром в точке 0, то он состоит в точности из операторов B_φ такого вида.

В случае, когда $\widetilde{\varphi}$ является функцией с разделяющимися переменными, показана возможность синтеза в ядре B_φ. Для такого ненулевого функционала φ доказано также наличие линейного непрерывного правого обратного у $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$. Это следует из дополняемости главного идеала, порожденного функцией $t_1 \cdots t_N \widetilde{\varphi}(t)$ в пространстве $H_0(C\Omega)$.

Рассмотрение в данной статье класса (только) полицилиндрических областей Ω существенно связано со следующим обстоятельством. При определении операторов T_z требуется, чтобы для любых точек $t, z \in \Omega$

всякая точка из $\mathbb{C}^N$, каждая координата которой равна соответствующей координате t или z, также принадлежала Ω. Это так в том и только в том случае, когда область Ω полицилиндрическая. Кроме того, в данной работе систематически используется аналог двойственности Силвы–Кете–Гротендика пространств голоморфных функций одной комплексной переменной. Он основан на многомерном преобразовании Коши, применимом в случае полицилиндрических областей.

2 Предварительные сведения

Приведем сведения об операторах частного обратного сдвига и перестановочных с ними операторах из [1], [2]. Далее для $N \in \mathbb{N}$ символ P_N обозначает множество $\{1, \cdots, N\}$ первых N натуральных чисел. Для произвольных $t, z \in \mathbb{C}^N$, $\sigma \subset P_N$ введем точку $t_{\sigma,z} \in \mathbb{C}^N$:

$$(t_{\sigma,z})_j := \begin{cases} t_j, & j \in P_N \backslash \sigma, \\ z_j, & j \in \sigma. \end{cases}$$

Если $\sigma = \{j\}$, то $t_{j,z} := t_{\sigma,z}$; $t_{\emptyset,z} = t$.

Положим $\partial_j := \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in P_N$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N, \beta = (\beta_j)_{j=1}^N \in \mathbb{N}_0^N$ будем писать $\alpha \le \beta$, если $\alpha_j \le \beta_j$, $1 \le j \le N$. Как обычно, полагаем $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_N^{\alpha_N}$ (считаем, что $c^0 = 1$ для любого $c \in \mathbb{C}$), $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$, $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_N!$, $z \in \mathbb{C}^N$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Ниже Ω — полицилиндрическая область в $\mathbb{C}^N$: $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — области в $\mathbb{C}$, содержащие 0; $H(\Omega)$ — пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах Ω. Для $f \in H(\Omega)$, $j \in P_N$, $t \in \Omega$ пусть

$$D_{j,0}(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_{j,0})}{t_j}, & t_j \ne 0, \\ \partial_j f(t_{j,0}), & t_j = 0. \end{cases}$$

Все операторы $D_{j,0}$, $j \in P_N$, линейны и непрерывны в $H(\Omega)$. Они попарно перестановочны. Полагаем $D_0^\alpha := D_{1,0}^{\alpha_1} \cdots D_{N,0}^{\alpha_N}$, $z \in \Omega$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Для мономов $f_\beta(t) := t^\beta$, $t \in \mathbb{C}^N$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, в $H(\Omega)$ выполняются равенства $D_0^\alpha(f_\beta) = f_{\beta-\alpha}$, если $\alpha \le \beta$, и $D_0^\alpha(f_\beta) = 0$ в противном случае.

С системой $\mathcal{D}_0$ можно ассоциировать операторы T_z, $z \in \Omega$ (эта идея восходит, в частности, к З. Биндерману [4]): для $j \in P_N$, $f \in H(\Omega)$

$$T_{j,z}(f)(t) := \begin{cases} \frac{t_j f(t) - z_j f(t_{j,z})}{t_j - z_j}, & t_j \ne z_j, \\ z_j \partial_j f(t_{j,z}) + f(t_{j,z}), & t_j = z_j, \end{cases}$$

и $T_z = T_{1,z} \cdots T_{N,z}$. Операторы $T_{j,z}$, T_z, $j \in P_N$, $z \in \Omega$, линейны и непрерывны в $H(\Omega)$.

Определим функционалы

$$\varphi_\alpha(f) := \partial^\alpha f(0), \quad f \in H(\Omega), \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

где $\partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\cdots\partial z_N^{\alpha_N}}$. Ясно, что $\varphi_\alpha \in H(\Omega)'$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Символ $|\sigma|$ обозначает количество элементов множества $\sigma \subset P_N$. Считаем, что $|\emptyset| = 0$. В дальнейшем $\mathbf{1}$ — мультииндекс, каждая координата которого равна 1,

Лемма 1. [1, леммы 2.3, 2.4] *(i) Пусть области Ω_j, $j \in P_N$, односвязны и содержат 0. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$ справедливо равенство*

$$D_0^\alpha(f)(z) = \frac{1}{\alpha!}\varphi_\alpha(T_z(f)).$$

(ii) $T_z(f)(t) = \frac{1}{(t-z)^{\mathbf{1}}} \sum\limits_{\sigma\subset P_N} (-1)^{|\sigma|} t^{\mathbf{1}}_{\sigma,z} f(t_{\sigma,z}), \quad f \in H(\Omega)$, $t, z \in \Omega$, $t_j \neq z_j$, $j \in P_N$.

Для локально выпуклого пространства E через $\mathcal{L}(E)$ обозначим пространство всех линейных непрерывных операторов в E, символом E' — топологическое сопряженное к E, а через E'_b — сильное сопряженное к E пространство. Пусть $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ — множество всех операторов $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$ таких, что $BD_{j,0} = D_{j,0}B$ в $H(\Omega)$ для любого $j \in P_N$. Ясно, что $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ совпадает с множеством всех операторов $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, перестановочных с каждым оператором D_0^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Ниже $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$ — множество всех операторов $B \in \mathcal{L}(H(\Omega))$, для которых $BT_z = T_z B$ в $H(\Omega)$ для любого $z \in \Omega$.

Теорема 1. [1, теорема 3.1] *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Следующие условия равносильны:*
(i) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.
(ii) $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$.
(iii) Существует функционал $\varphi \in H(\Omega)'$ такой, что

$$B(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \ f \in H(\Omega).$$

Для любого оператора $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0) = \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{T})$ функционал $\varphi \in H(\Omega)'$, как в (iii), единственен.

Основная цель данной работы — изучение свойств операторов свертки

$$B_\varphi(f)(z) = \varphi(T_z(f)), \quad z \in \Omega, \ f \in H(\Omega), \varphi \in H(\Omega)'.$$

3 Интегральное представление, сюръективность и обратимость операторов B_φ в $H(\Omega)$

3.1. Интегральное представление операторов B_φ в $H(\Omega)$. Одним из основных аналитических средств исследования операторов из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ является их интегральное представление. Для кривых L_j, $j \in P_N$, в $\mathbb{C}$ введем их прямое произведение $L := L_1 \times \cdots \times L_N$. Если γ — замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, то $\operatorname{Int}\gamma$ — внутренность γ, а $\operatorname{Ext}\gamma$ — внешность γ в $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Считаем всюду далее замкнутые жордановы кривые

ориентированными положительно. Для замкнутых жордановых кривых L_j, $j \in P_N$, в $\mathbb{C}$ полагаем

$$\operatorname{Int} L := \operatorname{Int} L_1 \times \cdots \times \operatorname{Int} L_N, \ \operatorname{Ext} L := \operatorname{Ext} L_1 \times \cdots \times \operatorname{Ext} L_N.$$

Если L_j — спрямляемые кривые, то для функции f, голоморфной в некоторой окрестности $L = L_1 \times \cdots \times L_N$ в $\mathbb{C}^N$,

$$\int\limits_L f(t)dt := \int\limits_{L_N} \cdots \int\limits_{L_1} f(t)dt_1 \cdots dt_N$$

(этот интеграл понимается как повторный). Из свойства голоморфной зависимости интеграла от параметра (см., например, [5, часть II, гл. 1, § 3, п. 6, лемма]) следует, что он существует. Из теоремы Фубини вытекает, что он не зависит от порядка интегрирования. (Это верно для кусочно–гладких кривых, а аппроксимация кусочно–гладкими кривыми позволяет установить такую независимость и для произвольных спрямляемых кривых L_j.)

Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие 0. Приведем сведения о реализации сопряженного к $H(\Omega)$ пространства с помощью преобразования Коши. Пусть $C\Omega := (\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_1) \times \cdots \times (\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_N)$. Символом $H_0(C\Omega)$ обозначим пространство всех ростков голоморфных на $C\Omega$ функций, обращающихся в 0 во всех точках, хотя бы одна координата которых равна ∞. Естественная индуктивная топология в $H_0(C\Omega)$ вводится следующим образом. Для $j \in P_N$ зафиксируем последовательность замкнутых спрямляемых жордановых кривых $\gamma_{j,n}$, $n \in \mathbb{N}$, обладающих следующими свойствами: 0 содержится во внутренности $\gamma_{j,1}$, $\overline{\operatorname{Int}\gamma_{j,n}} \subset \operatorname{Int}\gamma_{j,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Int}\gamma_{j,n} = \Omega_j$ ($\overline{\operatorname{Int}\gamma_{j,n}}$ — замыкание $\operatorname{Int}\gamma_{j,n}$ в $\mathbb{C}$). Такие кривые существуют. (Если область Ω_j отлична от $\mathbb{C}$, то в качестве этих кривых можно взять образы окружностей $\{z \in \mathbb{C} : |z| = e^{-1/n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, при однолистном отображении круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на Ω_j.) Положим $\gamma_n := \gamma_{1,n} \times \cdots \times \gamma_{N,n}$, $G_{j,n} := \operatorname{Ext}\gamma_{j,n}$, $G_n := G_{1,n} \times \cdots \times G_{N,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $H_0(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$, — пространство всех голоморфных в G_n функций, равных 0 в точках, хотя бы одна координата которых равна ∞. Оно наделяется топологией равномерной сходимости на компактах G_n. Тогда $H_0(C\Omega) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_0(G_n)$ и в $H_0(C\Omega)$ вводится топология индуктивного предела последовательности пространств Фреше $H_0(G_n)$, $n \in \mathbb{N}$, относительно отображений $\rho_n : H_0(G_n) \to H_0(C\Omega)$, где $\rho_n(f)$ для $f \in H_0(G_n)$ — росток, содержащий f. С этой топологией $H_0(C\Omega)$ является (DFS)–пространством (см. [6, п. 2.2]). По [3] (см. также [7, § 12]) преобразование Коши

$$\mathcal{C}(\varphi)(t) := \widetilde{\varphi}(t) := \varphi_z\left(\frac{1}{(t-z)^{\mathbf{1}}}\right), \quad \varphi \in H(\Omega)',$$

является топологическим изоморфизмом $H(\Omega)'_b$ на $H_0(C\Omega)$. При этом точка t принадлежит некоторой области G_n (n зависит от φ). Изоморфизм $\mathcal{C} : H(\Omega)' \to H_0(C\Omega)$ индуцирует двойственность между $H(\Omega)$ и $H_0(C\Omega)$. Соответствующей билинейной формой, задающей ее, является

$$\langle f, g\rangle_\Omega := \mathcal{C}^{-1}(g)(f),\ f \in H(\Omega),\ g \in H_0(C\Omega).$$

Если $g \in H_0(G_n)$, то

$$\langle f, g\rangle_\Omega = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_L f(t)g(t)dt, \quad f \in H(\Omega),$$

для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j в Ω_j, $j \in P_N$, таких, что $\overline{\operatorname{Int}\gamma_{j,n}} \subset \operatorname{Int} L_j$.

Докажем результат об интегральном представлении оператора B_φ. Ниже для $k \in P_N$, $u \in \mathbb{C}^N$

$$u^{(k)} := (u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_N).$$

Лемма 2. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $\varphi \in H(\Omega)'$, функция $\widetilde{\varphi}$ голоморфна в области G_n, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любых замкнутых спрямляемых жордановых кривых L_j, $j \in P_N$, в $\Omega_j \cap G_{j,n}$, для всех $f \in H(\Omega)$, $z \in \operatorname{Int} L$ выполняется равенство*

$$B_\varphi(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_L \frac{t^{\mathbf{1}} f(t)\widetilde{\varphi}(t)}{(t-z)^{\mathbf{1}}} dt.$$

Доказательство. Зафиксируем $f \in H(\Omega)$. В силу представления оператора T_z в лемме 1 (ii) для $z \in \operatorname{Int} L$

$$(2\pi i)^N B_\varphi(f)(z) = (2\pi i)^N \varphi(T_z(f))$$

$$= \int\limits_L \frac{t^{\mathbf{1}}\widetilde{\varphi}(t)f(t)}{(t-z)^{\mathbf{1}}} dt + \sum_{\sigma \subset P_N, \sigma \neq \emptyset} (-1)^{|\sigma|} \int\limits_L \frac{t^{\mathbf{1}}_{\sigma,z}\widetilde{\varphi}(t)f(t_{\sigma,z})}{(t-z)^{\mathbf{1}}} dt.$$

Пусть $\sigma \neq \emptyset$ и $k \in \sigma$, $L^{(k)} := L_1 \times \cdots \times L_{k-1} \times L_{k+1} \times \cdots \times L_N$. Тогда для $z \in \operatorname{int} L$

$$\int\limits_L \frac{t^{\mathbf{1}}_{\sigma,z} f(t_{\sigma,z})\widetilde{\varphi}(t)}{(t-z)^{\mathbf{1}}} dt = \int\limits_{L^{(k)}} \frac{(t^{(k)}_{\sigma,z})^{\mathbf{1}}}{((t-z)^{(k)})^{\mathbf{1}}} \left(\int\limits_{L_k} \frac{z_k f(t_{\sigma,z})\widetilde{\varphi}(t)}{t_k - z_k} dt_k \right) dt^{(k)} = 0,$$

поскольку $\int\limits_{L_k} \frac{z_k f(t_{\sigma,z})\widetilde{\varphi}(t)}{t_k - z_k} dt_k = 0$ по интегральной формуле Коши для неограниченной области. Следовательно,

$$B_\varphi(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_L \frac{t^{\mathbf{1}} f(t)\widetilde{\varphi}(t)}{(t-z)^{\mathbf{1}}} dt,\ z \in \operatorname{Int} L.$$

□

Лемма 3. *Пусть* $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, *где* Ω_j, $j \in P_N$, — *односвязные области в* $\mathbb{C}$, *содержащие точку* 0. *Для* $\varphi \in H(\Omega)'$ *сопряженным* $B'_\varphi : H_0(C\Omega) \to H_0(C\Omega)$ *к оператору* $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ *относительно дуальной пары* $(H(\Omega), H_0(C\Omega))$ *является оператор умножения на функцию* $t^{\mathbf{1}}\widetilde{\varphi}(t)$.

Доказательство. Найдется $m \in \mathbb{N}$, для которого функция $g(t) := t^1\widetilde{\varphi}(t)$ голоморфна в G_m. Для любых $n \geq m$, $f \in H(\Omega)$, $h \in H_0(G_n)$, $s > n$, $z \in \operatorname{Int} L_s$ вследствие леммы 2

$$\langle B_\varphi(f), h\rangle_\Omega = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma_s} h(z)\frac{1}{(2\pi i)^N}\left(\int\limits_{\gamma_{s+1}} \frac{g(t)f(t)}{(t-z)^{\mathbf{1}}}dt\right)dz$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma_{s+1}} g(t)f(t)\left(\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma_s}\frac{h(z)}{(t-z)^{\mathbf{1}}}dz\right)dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma_{s+1}} g(t)f(t)h(t)dt = \langle f, gh\rangle_\Omega.$$

Таким образом, $B'_\varphi(h) = gh$. □

3.2. Сюръективность и обратимость оператора B_φ в $H(\Omega)$. Для $t \in \overline{\mathbb{C}}^N$ положим $\frac{1}{t} := \left(\frac{1}{t_1}, ..., \frac{1}{t_N}\right)$ (считаем, что $\frac{1}{\infty} = 0$). Для $Q \subset \overline{\mathbb{C}}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) пусть $Q^{-1} := \left\{\frac{1}{t} : t \in Q\right\}$. Следующий результат о сюръективности B_φ содержится в [1, следствие 3.2]; приведем его доказательство.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, *где* Ω_j, $j \in P_N$, — *односвязные области в* $\mathbb{C}$, *содержащие точку* 0. *Для любого ненулевого функционала* $\varphi \in H(\Omega)'$ *оператор* $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ *сюръективен.*

Доказательство. Сопряженный к B_φ оператор $B'_\varphi : H_0(C\Omega) \to H_0(C\Omega)$ умножения на $g(t) = t^{\mathbf{1}}\widetilde{\varphi}(t)$ (см. лемму 3) инъективен. Покажем, что его образ замкнут в $H_0(C\Omega)$. Преобразование $h \mapsto h(\frac{1}{u_1}, ..., \frac{1}{u_N})$ является топологическим изоморфизмом $H_0(C\Omega)$ на пространство $H_0((C\Omega)^{-1})$ ростков всех функций, голоморфных на компакте $(C\Omega)^{-1} := (C\Omega_1)^{-1} \times \cdots \times (C\Omega_N)^{-1}$ в $\mathbb{C}^N$, равных нулю в точке, если хотя бы одна ее координата равна 0. При этом $H_0((C\Omega)^{-1})$ наделяется топологией индуктивного предела последовательности пространств Фреше $H_0((G_n)^{-1})$, где $(G_n)^{-1} := (G_{1,n})^{-1} \times \cdots \times (G_{N,n})^{-1}$. С ней оно является (DFS)–пространством. Пусть $w(u) := g\left(\frac{1}{u_1}, ..., \frac{1}{u_N}\right)$, $S(f)(u) := w(u)f(u)$, $f \in H_0((C\Omega)^{-1})$. Найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $w \in H_0((G_m)^{-1})$. Так как топология каждого пространства $H_0((G_n)^{-1})$ мажорирует топологию поточечной сходимости всех производных, то $S(H_0((C\Omega)^{-1}))\bigcap H_0((G_n)^{-1})$ замкнуто в $H_0((G_n)^{-1})$ для любого $n \geq m$ (см., например, [8, предложение 3, гл. 1, §1]). Отсюда следует [6, пп. 2.9, 2.14] замкнутость образа оператора S в

$H_0((C\Omega)^{-1})$. Значит, $B'_\varphi(H_0(C\Omega))$ замкнуто в $H_0(C\Omega)$. В силу [9, 8.6.13] и того, что $H(\Omega)$ является монтелевским пространством Фреше, оператор $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ сюръективен. □

Теорема 3. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Следующие утверждения равносильны:*
(i) Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ обратим.
(ii) Функция $t^{\mathbf{1}}\widetilde{\varphi}(t)$ не имеет нулей в $C\Omega$.

Доказательство. Пусть $g(t) := t^1\widetilde{\varphi}(t)$, $w(u) := g\left(\frac{1}{u_1}, ..., \frac{1}{u_N}\right)$. Оператор $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $S(f)(u) = w(u)f(u)$ в $H_0((C\Omega)^{-1})$. Обратимость S влечет, что w не обращается в 0 в $(C\Omega)^{-1}$, а значит, функция $t^{\mathbf{1}}\widetilde{\varphi}(t)$ не имеет нулей в $C\Omega$. Наоборот, если $w \neq 0$ в $(C\Omega)^{-1}$, то найдется открытая окрестность $(C\Omega)^{-1}$, в которой функция w голоморфна и не равна 0. Отсюда следует обратимость S.

□

Приведем примеры функционального представления операторов из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$, являющихся основой данных конструкций.

Пример 1. Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0.
(i) Для $z \in \Omega$ полагаем $\delta_z(f) := f(z), \quad f \in H(\Omega)$. Ясно, что $\delta_z \in H(\Omega)'$ для всех $z \in \Omega$.

Если $\varphi = \delta_z$, $z \in \Omega$, то $B_\varphi = T_z$. Действительно, для $f \in H(\Omega)$, $t \in \Omega$

$$B_\varphi(f)(t) = (\delta_z)_u(T_t(f)(u)) = T_t(f)(z) = T_z(f)(t)$$

(нижний индекс у функционала показывает, по каким переменным он действует).
(ii) Если $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $\varphi(f) = \frac{1}{\alpha!}\varphi_\alpha(f) = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0)$, то $B_\varphi = D_0^\alpha$ в силу леммы 1. Отметим, что $\widetilde{\varphi}_\alpha(t) := \frac{\alpha!}{t^{\alpha+\mathbf{1}}}$.

Для $\varphi = \sum\limits_\alpha \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$ (сумма конечна) $B_\varphi = \sum\limits_\alpha c_\alpha D_0^\alpha$. В § 4 будут введены операторы такого типа бесконечного порядка.

4 Алгебра $(H(\Omega)', \circledast)$, ее представление в $H(\Omega)$ и операторы бесконечного порядка

Ниже используется алгебра аналитических функционалов $(H(\Omega)', \circledast)$, естественно возникающая в связи с теоремой 1. По-прежнему $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Определим операцию $\circledast$: для $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$

$$(\varphi \circledast \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))) = \varphi(B_\psi(f)), \quad f \in H(\Omega).$$

Отметим ее свойства.

Предложение 1. [10, теоремы 1, 2] *(i) $\circledast$ — бинарная операция в $H(\Omega)'$.*
(ii) $(H(\Omega)'_b, \circledast)$ — унитальная ассоциативная и коммутативная топологическая алгебра, не имеющая делителей нуля.
(iii) Для всех $\varphi, \psi \in H(\Omega)'$ выполняется равенство

$$\mathcal{C}(\varphi \circledast \psi)(t) = t^{\mathbf{1}}\mathcal{C}(\varphi)(t)\mathcal{C}(\psi)(t),\ t \in C\Omega.$$

Пусть $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$ — пространство $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ с топологией, индуцированной топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах $H(\Omega)$ (ограниченной сходимости) в $\mathcal{L}(H(\Omega))$ (см. [11, гл. IV, § 2]).

Предложение 2. [10, теорема 4] *(i) Отображение $\rho(\varphi) = B_\varphi$, $\varphi \in H(\Omega)'$, является изоморфизмом алгебры $(H(\Omega)', \circledast)$ на алгебру $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ с умножением — композицией операторов.*
(ii) ρ — топологический изоморфизм $H(\Omega)'_b$ на $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$.

Следствие 1. *Пусть $\varphi, \varphi_k \in H(\Omega)'$, $1 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{\varphi}(t) = (t^{\mathbf{1}})^{n-1}\widetilde{\varphi}_1(t)\cdots\widetilde{\varphi}_n(t)$ в некоторой открытой окрестности $C\Omega$. Тогда в $H(\Omega)$ выполняется равенство $B_\varphi = B_{\varphi_1}\cdots B_{\varphi_n}$.*

Для многочлена $p(z) = \sum\limits_\alpha c_\alpha z^\alpha \in \mathbb{C}[z]$ от переменных $z_1, ..., z_N$ положим $p(\mathcal{D}_0) := \sum\limits_\alpha c_\alpha D_0^\alpha$. Пусть $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0] := \{p(\mathcal{D}_0) : p \in \mathbb{C}[z]\}$. Ясно, что $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0] \subset \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$.

Следствие 2. *Пусть $\varphi \in H(\Omega)'$, $\varphi \neq 0$, $\widetilde{\varphi}(t) = v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)$, где $v_j \in H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j)$, $j \in P_N$. Тогда существуют ненулевой многочлен $p \in \mathbb{C}[z]$ (с разделяющимися переменными), $\nu \in H(\Omega)'$ такие, что $B_\varphi = p(\mathcal{D}_0)B_\nu$ и B_ν — изоморфизм $H(\Omega)$.*

Доказательство. Для каждого $j \in P_N$ функция v_j ненулевая, а значит, имеет в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j$ не более конечного числа различных нулей. Поэтому существуют ненулевой многочлен $q_j \in \mathbb{C}[z_j]$, функция $h_j \in H(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j)$, обладающие следующими свойствами:

$$v_j(t_j) = q_j\left(\frac{1}{t_j}\right)h_j(t_j),\ h_j \neq 0 \text{ на } \overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j,\ q_j(0) = 0.$$

Пусть

$$Q(t) := q_1\left(\frac{1}{t_1}\right)\cdots q_N\left(\frac{1}{t_N}\right),\ h(t) := \frac{1}{t^{\mathbf{1}}}h_1(t_1)\cdots h_N(t_N).$$

Тогда $Q, h \in H_0(C\Omega)$. Положим $\psi := \mathcal{C}^{-1}(Q)$, $\nu := \mathcal{C}^{-1}(h)$. Поскольку $\widetilde{\varphi}(t) = t^{\mathbf{1}}Q(t)h(t)$, то $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\psi \circledast \nu}$ по предложению 1. Вследствие предложения 2 выполняется равенство $B_\varphi = B_\psi B_\nu$. По теореме 3 B_ν — изоморфизм $H(\Omega)$. Кроме того, $B_\psi = p(\mathcal{D}_0)$ для многочлена $p(z) := \frac{1}{z^{\mathbf{1}}}q_1(z_1)\cdots q_N(z_N)$.

□

Следствие 3. *Множество $\mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$ плотно в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$.*

Доказательство. Система $\Phi := \{\varphi_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ полна в $H(\Omega)'_b$. Действительно, если $f \in H(\Omega)$ и $\partial^\alpha f(0) = 0$ для всех $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, то $f = 0$. Вследствие предложения 2 линейная оболочка $\operatorname{span}(\rho(\Phi))$ множества $\rho(\Phi)$ плотна в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. В силу примера 1 $\operatorname{span}(\rho(\Phi)) = \mathbb{C}[\mathcal{D}_0]$. □

Ранее в [1, следствие 3.1] это было доказано для топологии поточечной сходимости в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ (она мажорируется топологией ограниченной сходимости). В случае, когда Ω является произведением открытых кругов с центром в точке 0, следствие 3 может быть усилено, а именно, всякий оператор из $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$ для этой области Ω представим в виде ряда по $\mathcal{D}_0^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Исследуем операторы такого типа.

Для $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ положим

$$b_{n,\alpha,j} := \begin{cases} R_j^{-\alpha_j} e^{\alpha_j/n}, & R_j < +\infty, \\ e^{-\alpha_j n}, & R_j = +\infty, \end{cases}$$

и $b_{n,\alpha} = b_{n,\alpha,1} \cdots b_{n,\alpha,N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Определим пространство (мульти)последовательностей

$$\Lambda_R := \left\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^N} : \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} |c_\alpha| b_{n,\alpha} < +\infty \right\}.$$

Если R_j конечны для всех $j \in P_N$, то Λ_R совпадает с пространством всех тех последовательностей $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N}$, для которых

$$\limsup_{|\alpha| \to \infty} \left(\frac{|c_\alpha|}{R_1^{\alpha_1} \dots R_N^{\alpha_N}} \right)^{1/|\alpha|} < 1.$$

Для локально выпуклого пространства E, $x_\alpha \in E$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, будем называть ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} x_\alpha$ абсолютно сходящимся в E, если семейство $\{x_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^N\}$ абсолютно суммируемо в E (в смысле определения в [12, гл.1, § 1.3]).

Лемма 4. *Предположим, что Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_j\} \subset \Omega_j$, $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$. Тогда для любого $c \in \Lambda_R$ ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!} \varphi_\alpha$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому функционалу $\varphi \in H(\Omega)'$, выполняется равенство*

$$B_\varphi(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha(f), \ f \in H(\Omega),$$

и ряд $\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$ абсолютно сходится в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$.

Доказательство. Выберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $A_1 = \sup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} |c_\alpha| b_{n,\alpha} < +\infty$. Зафиксируем ограниченное в $H(\Omega)$ множество Q. В силу неравенств Коши существует $A_2 > 0$, для которого

$$\frac{|f^{(\alpha)}(0)|}{\alpha!} \le A_2 b_{n+1,\alpha},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N,\ f \in Q.$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{|c_\alpha|}{\alpha!} \sup_{f\in Q} |\varphi_\alpha(f)| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} A_1 A_2 \frac{b_{n+1,\alpha}}{b_{n,\alpha}} < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому $\varphi \in H(\Omega)'$. При этом для всех $f \in H(\Omega)$, $z \in \Omega$

$$B_\varphi(f)(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha(T_z(f)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha(f)(z),$$

причем вследствие предложения 2 ряд $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$ абсолютно сходится в $\mathcal{K}(\mathcal{D}_0)_b$.

□

Замечание 1. *(i) Если* $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty} |b_\alpha|^{1/|\alpha|} = 0$, *то ряд* $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} b_\alpha D_0^\alpha$ *абсолютно сходится в* $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$ *для любой области* $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, *где* Ω_j, $j \in P_N$, *— односвязные области в* $\mathbb{C}$, *содержащие 0.*
(ii) Преобразованием Коши функционала $\varphi = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha$, *как в лемме 4, является функция* $\widetilde{\varphi}(t) = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{t^{\alpha+\mathbf{1}}}$ *(ряд сходится в полидиске* $\{t \in \overline{\mathbb{C}}^N : \rho_j < |t_j| \le +\infty,\ j \in P_N\}$ *для некоторых* $\rho_j \in [0, R_j)$.

Предложение 3. *Пусть* $\Omega_j = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z_j| < R_j\}$, $R_j \in (0, +\infty]$, $j \in P_N$.
(i) Каждый оператор B_φ, $\varphi \in H(\Omega)'$, *представляется в виде* $B_\varphi = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$, *где* $c \in \Lambda_R$ *и ряд абсолютно сходится в* $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. *При этом* $c_\alpha = \varphi(f_\alpha)$ *для всех* $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.
(ii) Для любой последовательности $c \in \Lambda_R$ *ряд* $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha$ *абсолютно сходится в* $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$ *к* $B \in \mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)$, *и* $B = B_\varphi$ *для функционала* $\varphi = \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha$ *из* $H(\Omega)'$.

Доказательство. (i): Для $\varphi \in H(\Omega)'$ найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, для которых

$$|\varphi(f_\alpha)| \le \frac{C}{b_{n,\alpha}},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N.$$

По доказательству в лемме 4 для $c_\alpha = \varphi(f_\alpha)$ ряд $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{c_\alpha}{\alpha!}\varphi_\alpha$ абсолютно сходится в $H(\Omega)'_b$ к некоторому функционалу ψ. По теореме 2

$$B_\psi = \rho(\psi) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha D_0^\alpha,$$

и ряд абсолютно сходится в $\mathcal{K}_\Omega(\mathcal{D}_0)_b$. При этом для всех $f \in H(\Omega)$

$$\psi(f) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \varphi(f_\alpha)\frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} = \varphi\left(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} \frac{\partial^\alpha f(0)}{\alpha!} f_\alpha\right) = \varphi(f),$$

а значит, $\psi = \varphi$.

Утверждение (ii) доказано в лемме 4. □

5 Синтез в ядре оператора B_φ и существование линейного непрерывного правого обратного к B_φ

5.1. Синтез в ядре B_φ. Для $N = 1$ ядро $\operatorname{Ker} B_\varphi$ ненулевого оператора B_φ в $H(\Omega)$ конечномерно (или совпадает с $\{0\}$); базисом в нем является семейство соответствующих мономов и элементарных дробей [13, предложение 1]. Приведем результат о структуре $\operatorname{Ker} B_\varphi$ при $N \geq 2$ для случая, когда $\widetilde{\varphi}(t) = v_1(t_1)\cdots v_N(t_N)$, где ненулевая функция v_j принадлежит $H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j)$, $j \in P_N$. Это ядро является замкнутым подпространством $H(\Omega)$, инвариантным относительно системы $\mathcal{D}_0$. При $N = 1$ ими исчерпываются все замкнутые $\mathcal{D}_0$–инвариантные подпространства $H(\Omega)$ (они описаны в [14, теоремы 2, 4]).

Пусть $N \geq 2$, $j \in P_N$ и $\Omega^{(j)} := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_N$. Зафиксируем ненулевую функцию $v \in H_0(\overline{\mathbb{C}}\backslash\Omega_j)$, для которой ∞ является нулем кратности $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda := \{\lambda_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) — множеством всех ее попарно различных нулей кратности m_r в $\mathbb{C}\backslash\Omega_j$ (оно может быть пустым). Определим пространства многочленов и дробей по переменной z_j с коэффициентами из $H(\Omega^{(j)})$: при $m \geq 2$

$$E_0(v,\Omega_j) := \left\{\sum_{l=0}^{m-2} b_l(z^{(j)})z_j^l : b_l \in H(\Omega^{(j)})\right\};$$

для $\Lambda \neq \emptyset$

$$E_\Lambda(v,\Omega_j) := \left\{\sum_{r=1}^{r_0}\sum_{s=1}^{m_r} \frac{c_{r,s}(z^{(j)})}{(z_j-\lambda_r)^s} : c_{r,s} \in H(\Omega^{(j)})\right\}.$$

Если $m = 1$, то считаем, что $E_0(v,\Omega_j) := \{0\}$. В случае, когда Λ пусто, полагаем $E_\Lambda(v,\Omega_j) := \{0\}$. Далее

$$E(v,\Omega_j) := E_0(v,\Omega_j) + E_\Lambda(v,\Omega).$$

Введем функцию $\omega(t) = \frac{1}{t_1 \cdots t_{j-1} t_{j+1} \cdots t_N} v(t_j)$. Тогда $\omega \in H_0(C\Omega)$ и $\mu = \mathcal{C}^{-1}(\omega) \in H(\Omega)'$.

Лемма 5. *Выполняется равенство* $\operatorname{Ker} B_\mu = E(v, \Omega_j)$.

Доказательство. Положим

$$\xi(t_j) := \frac{1}{t_j^m} \prod_{r=1}^{r_0} \left(1 - \frac{\lambda_r}{t_j}\right)^{m_r}, \quad Q(t) := \frac{1}{t_1 \cdots t_{j-1} t_{j+1} \cdots t_N} \xi(t_j),$$

$$p(z) := \frac{1}{z^{\mathbf{1}}} Q\left(\frac{1}{z_1}, ..., \frac{1}{z_N}\right).$$

По доказательству следствия 2 $B_\mu = p(\mathcal{D}_0) B_\nu$, где B_ν — изоморфизм $H(\Omega)$. Поэтому $\operatorname{Ker} B_\mu = \operatorname{Ker} p(\mathcal{D}_0)$. Для функционала $\psi \in H(\Omega)'$, для которого $p(\mathcal{D}_0) = B_\psi$, справедливо равенство $\widetilde{\psi}(t) = Q(t)$. Применим метод доказательства в [13, предложение 1], используя интегральное представление оператора $p(\mathcal{D}_0)$ из леммы 2. Зафиксируем замкнутые спрямляемые жордановы кривые L_k в $\Omega_k \cap G_{k,1}$, $k \in P_N$. Пусть $f \in \operatorname{Ker} p(\mathcal{D}_0)$. Тогда для $z \in \operatorname{Int} L$, $z_j \neq 0$,

$$0 = \int\limits_{L_j} \left(\int\limits_{L^{(j)}} \frac{f(t)}{(t^{(j)} - z^{(j)})^{\mathbf{1}}} dt^{(j)} \right) \frac{t_j \xi(t_j)}{t_j - z_j} dt_j.$$

По интегральной формуле Коши

$$\int\limits_{L_j} \frac{t_j \xi(t_j)}{t_j - z_j} f(z_{j,t}) dt_j = 0, \quad z \in \operatorname{Int} L,\ z_j \neq 0.$$

Положим $M := m - 2 + \sum\limits_{r=1}^{r_0} m_r$. При $M \geq 0$ по теореме о вычетах

$$z_j \xi(z_j) f(z) + \sum_{l=1}^{M+1} \frac{a_l(z^{(j)})}{z_j^l} = 0, \quad z \in \operatorname{Int} L,\ z_j \neq 0.$$

где все функции a_l голоморфны в $\Omega^{(j)}$. Если $M = -1$, то $z_j \xi(z_j) \equiv 1$ и $f = 0$ (в этом случае $p(\mathcal{D}_0)$ — тождественный оператор). Отсюда следует, что $f \in E(v, \Omega_j)$. Ясно, что $E(v, \Omega_j) \subset \operatorname{Ker} p(\mathcal{D}_0)$. □

Докажем результат о расщеплении ядра B_φ, являющийся некоторым вариантом допустимости синтеза в ядре B_φ. При этом применяется лемма 5 и следующий общий результат о представлении ядра композиции линейных операторов в линейном пространстве.

Лемма 6. *Пусть* $A_1, ..., A_n$, $n \in \mathbb{N}$, — *линейные операторы в линейном пространстве* E *такие, что* $\operatorname{Ker} A_k = A_m(\operatorname{Ker} A_k)$, *если* $k \neq m$. *Тогда*

$$\operatorname{Ker}(A_1 \cdots A_n) = \operatorname{Ker} A_1 + \cdots + \operatorname{Ker} A_n.$$

Доказательство. То, что $\operatorname{Ker} A_1 + \cdots + \operatorname{Ker} A_n \subset \operatorname{Ker}(A_1 \cdots A_n)$, очевидно. Покажем обратное вложение. При $n = 1$ доказывать нечего. Предположим, что это так для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $x \in \operatorname{Ker}(A_1 \cdots A_{n+1})$. Существуют $x_k \in \operatorname{Ker} A_k$, $1 \le k \le n$, для которых $A_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Найдутся $y_k \in \operatorname{Ker} A_k$, $1 \le k \le n$, такие, что $A_{n+1}(y_k) = x_k$. Следовательно, существует $y_{n+1} \in \operatorname{Ker} A_{n+1}$, удовлетворяющее равенству $x = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k + y_{n+1}$. □

Теорема 4. *Пусть $N \ge 2$, $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0. Предположим, что $\varphi \in H(\Omega)'$, $\widetilde{\varphi}(t) = v_1(t_1) \cdots v_N(t_N)$, где v_j — ненулевая функция из $H_0(\overline{\mathbb{C}}\Omega_j)$, $j \in P_N$. Тогда выполняется равенство*

$$\operatorname{Ker} B_\varphi = E(v_1, \Omega_1) + \cdots + E(v_N, \Omega_N). \tag{1}$$

Доказательство. Для $j \in P_N$ обозначим через μ_j, ν_j, p_j соответственно функционалы μ, ν и многочлен p в доказательстве леммы 5 для функции v_j в качестве v; $w_j(t) := \frac{1}{t_1 \cdots t_{j-1} t_{j+1} \cdots t_N} v_j(t_j)$. Поскольку $\widetilde{\varphi}(t) = (t^{\mathbf{1}})^{N-1} w_1(t) \cdots w_N(t)$ в некоторой открытой окрестности $C\Omega$, то по следствию 1

$$B_\varphi = B_{\mu_1} \cdots B_{\mu_N} = B_{p_1(\mathcal{D}_0)} \cdots B_{p_N(\mathcal{D}_0)} B_\zeta,$$

где $B_\zeta = B_{\nu_1} \cdots B_{\nu_N}$ — изоморфизм $H(\Omega)$. Поэтому

$$\operatorname{Ker} B_\varphi = \operatorname{Ker}(B_{p_1(\mathcal{D}_0)} \cdots B_{p_N(\mathcal{D}_0)}).$$

При этом $\operatorname{Ker} B_{p_j(\mathcal{D}_0)} = \operatorname{Ker} B_{\mu_j}$ для всех $j \in P_N$.

Пусть $k, m \in P_N$, $k \ne m$. В силу леммы 5 справедливо вложение $B_{p_k(\mathcal{D}_0)}(\operatorname{Ker} B_{p_m(\mathcal{D}_0)}) \subset \operatorname{Ker} B_{p_m(\mathcal{D}_0)}$. Пространство $H(\Omega^{(m)})$ естественным образом можно отождествить с подпространством $H(\Omega)$. Оператор $B_{p_k(\mathcal{D}_0)}$ линеен и непрерывен в этом подпространстве и сюръективен в нем по теореме 2. Значит, $B_{p_k(\mathcal{D}_0)}(\operatorname{Ker} B_{p_m(\mathcal{D}_0)}) = \operatorname{Ker} B_{p_m(\mathcal{D}_0)}$. Из леммы 6 следует равенство (1).

□

Замечание 2. *Результат о расщеплении ядра оператора свертки другого вида, задаваемого обычными сдвигами и символ которого является функцией с разделяющимися переменными, определенного на пространстве голоморфных в полицилиндрической области функций, получен В.В. Напалковым* [15, теорема 2.4] *(см. также* [7, теорема 19.3]*). При этом данный символ является преобразованием Лапласа функционала, задающего оператор свертки.*

5.2. О линейном непрерывном правом обратном к B_φ.

Теорема 5. *Пусть $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$, где Ω_j, $j \in P_N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $\varphi \in H(\Omega)'$. Предположим, что $\widetilde{\varphi}(t) = v_1(t_1) \cdots v_N(t_N)$, где v_j — ненулевая функция из $H(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega_j)$, $j \in P_N$.*

Тогда оператор $B_\varphi : H(\Omega) \to H(\Omega)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

Доказательство. В силу возможности факторизации оператора B_φ, как в следствии 2, достаточно доказать, что для любых $j \in P_N$, ненулевого многочлена q от переменной z_j такого, что функция $q(1/t_j)$ не имеет нулей в Ω_j, существует линейный непрерывный правый обратный к оператору $q(\mathcal{D}_0) : H(\Omega) \to H(\Omega)$.

Пусть $S : H_0((C\Omega)^{-1}) \to H_0((C\Omega)^{-1})$ — оператор умножения на функцию w, как в доказательстве теоремы 2 для $B_\varphi = q(\mathcal{D}_0)$. В этом случае $\widetilde{\varphi}(t) = \frac{1}{t^1} q\left(\frac{1}{t_j}\right)$ и $w(u) = q(u_j)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем замкнутую спрямляемую жорданову кривую $\delta_{j,n}$ в $(G_{j,n})^{-1}$, содержащую в своей внутренности $(G_{j,n+1})^{-1}$ (а значит, и все нули q) (см. п. 3.1). Пусть $f \in H_0((C\Omega)^{-1})$ и $n \in \mathbb{N}$ такое, что функция f голоморфна в $(G_n)^{-1}$. Положим

$$\Pi(f)(u) := \frac{q(u_j)}{2\pi i} \int\limits_{\delta_{j,n}} \frac{f(u_1, ..., u_{j-1}, \eta, u_{j+1}, ..., u_N)}{q(\eta)(\eta - u_j)} d\eta.$$

Росток $\Pi(f)$ принадлежит $H_0((C\Omega)^{-1})$ и не зависит от выбора n. Отображение Π является непрерывным проектором пространства $H_0((C\Omega)^{-1})$ на его замкнутое подпространство $S(H_0((C\Omega)^{-1}))$. Пусть S^{-1} — линейный непрерывный обратный к биективному непрерывному оператору S из $H_0((C\Omega)^{-1})$ на $S(H_0((C\Omega)^{-1}))$ с индуцированной топологией (с ней $S(H_0((C\Omega)^{-1}))$ является (DFS)–пространством). (Ясно, что $S^{-1}(h) = h/w$.) Тогда $S^{-1}P$ — линейный непрерывный левый обратный к S, действующему из $H_0((C\Omega)^{-1})$ в $H_0((C\Omega)^{-1})$. Следовательно, существует линейный непрерывный левый обратный к оператору $q(\mathcal{D}_0)' : H_0(C\Omega) \to H_0(C\Omega)$. Поскольку пространство Фреше $H(\Omega)$ рефлексивно, то $q(\mathcal{D}_0) : H(\Omega) \to H(\Omega)$ имеет линейный непрерывный правый обратный.

□

References

[1] P.A. Ivanov, S.N. Melikhov, *Pommiez operator in spaces of analytic functions of several complex variables*, J. Math. Sci., New York, **252**:3 (2021), 345–359. Zbl 1458.32007

[2] P.A. Ivanov, S.N. Melikhov, *Many-dimensional Duhamel product in the space of holomorphic functions and backward shift operators*, Math. Notes, **113**:5 (2023), 650–662. Zbl 7710619

[3] H.-G. Tillmann, *Randverteilungen analytischer funktionen und distributionen*, Math. Z., **59** (1953), 61–83. MR0057345

[4] Z. Binderman, *Functional shifts induced by right invertible operators*, Math. Nachr., **157** (1992), 211—224. Zbl 0788.47002

[5] B.V. Shabat, *Introduction to complex analysis*, Nauka, Moskow, 1969. Zbl 0188.37902

[6] V.V. Zharinov, *Compact families of locally convex topological vector spaces, Fréchet-Schwartz and dual Fréchet-Schwartz spaces*, Russ. Math. Surv., **34**:4 (1979), 105—143. Zbl 0443.46002

[7] V.V. Napalkov, *Convolution equations in multidimensional spaces*, Nauka, Moskow, 1982. Zbl 0582.47041
[8] E.M. Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer, Dordrecht, 1989. MR1111477
[9] R.E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt Rinehart and Winston, New York etc., 1965. Zbl 0182.16101
[10] P.A. Ivanov, *The Duhamel product in spaces of entire functions of exponential type*, Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii Region. Natural Science, **2022**:4-1 (2022), 95–100.
[11] A.P. Robertson, W.J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964. Zbl 0123.30202
[12] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces*, Ergebnisse der Math. und ihre Grenzgeb., **66**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1972. Zbl 0236.46001
[13] N.E. Linchuk, *Representation of commutants of the Pommiez operator and their applications*, Math. Notes, **44**:6 (1988), 926–930. Zbl 0711.47019
[14] O.A. Ivanova, S N. Melikhov, Yu.N. Melikhov, *Invariant subspaces of the generalized backward shift operator and rational functions*, St. Petersburg Math. J., **33**:6 (2022), 927–942. Zbl 7618891
[15] V.V. Napalkov, *An equation of convolution type in tubular domains of* $\mathbb{C}^2$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **38** (1974), 446–456. Zbl 0297.46051

Pavel Aleksandrovich Ivanov
Southern Federal University,
Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences,
Mil'chakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Email address: piv@sfedu.ru

Sergey Nikolaevich Melikhov
Southern Federal University,
Vorovich Institute of Mathematics,
Mechanics and Computer Sciences,
Mil'chakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Southern Mathematical Institute of VSC of RAS,
Vatutina str., 53,
362025, Vladikavkaz, Russia
Email address: snmelihov@sfedu.ru, snmelihov@yandex.ru