

**ПОПЕРЕЧНИКИ ПО КОЛМОГОРОВУ ДЛЯ
ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ЗВЁЗДНОМ
ГРАФЕ****А.Л. СИНАЙ***ПРЕДСТАВЛЕНО И.В. ПОДВИГИНЫМ*

Abstract: We obtain exact formulas for the Kolmogorov widths of the inverse Laplace operator on a star graph with $m \geq 2$ edges, Robin conditions at the outer vertices and a δ -condition at the centre. The spectrum splits into a symmetric and a standard Sturm–Liouville branch, we derive their characteristic equations, prove that their roots interlace, and write the widths out in residue classes modulo m . We establish asymptotics of the widths that are uniform on compact parameter sets, and analyse the critical case, in which the quadratic form loses strict positivity, including the widths on the orthogonal complement of the kernel.

Keywords: Kolmogorov widths, star graph, Robin boundary condition, Sturm–Liouville problem, eigenvalue asymptotics

1 Введение

Пусть H – гильбертово пространство, $T: H \rightarrow H$ – компактный самосопряжённый положительный оператор. Поперечник по Колмогорову

SINAI, A.L., KOLMOGOROV WIDTHS FOR THE INVERSE LAPLACE OPERATOR ON A STAR GRAPH.

© 2026 Синай А.Л.

Поступила 3 июля 2026 г., опубликована 14 октября 2026 г.

порядка $n \in \mathbb{N}_0$ образа единичного шара $T(B_H)$ определяется как

$$d_n(T(B_H), H) = \inf_{\substack{L_n \subset H \\ \dim L_n \leq n}} \sup_{x \in B_H} \inf_{y \in L_n} \|Tx - y\|_H$$

и для такого оператора совпадает с его собственными значениями, занумерованными по невозрастанию: $d_n(T(B_H), H) = \lambda_{n+1}(T)$. Тем самым вычисление поперечников равносильно спектральному анализу оператора T .

Общая теория поперечников и s -чисел изложена в [1, 2, 3, 4]. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов получены в [5], а верхние оценки поперечников по Колмогорову для одного семейства интегральных операторов – в [6]. Спектральная теория дифференциальных операторов на метрических графах изложена в [7, 8]. Граничные условия Робена изучались в [9, 10], а в недавней работе [11] для деревьев с условиями Робена–Кирхгофа получены асимптотики собственных значений. Для эволюционных уравнений на сетях применяются полугрупповые методы [12].

Аппроксимационные характеристики соболевских вложений на метрических графах исследованы М. Соломяком [13], получившим равномерные оценки поперечников с точными константами. Аппроксимационные числа операторов типа Харди на деревьях изучались в [14]. Эти работы дают универсальные оценки для широких классов операторов, но не содержат явных формул для поперечников конкретных дифференциальных операторов на графах с нестандартными граничными условиями. Между тем такие формулы необходимы при построении оптимальных аппроксимаций решений краевых задач на графах и в обратных спектральных задачах.

Мы восполняем этот пробел на примере звёздного графа из m рёбер ($m \geq 2$) – простейшего графа с ветвлением, допускающего явное спектральное разложение. Мы исследуем оператор $T = L_{\alpha, \gamma}^{-1}$, где $L_{\alpha, \gamma} = -d^2/dx^2$ на каждом ребре, в центре задано δ -условие (непрерывность и баланс потоков с коэффициентом γ), а на внешних вершинах – условия Робена $y'_j(1) + \alpha_j y_j(1) = 0$. Такие условия физически содержательны, а симметричный случай $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ позволяет выявить зависимость от числа рёбер.

Основные результаты состоят в следующем. Спектр T распадается на симметричную и стандартную ветви. Для их корней установлено правило чередования (теорема 2), на основе которого получена явная формула для поперечников в каждом классе вычетов по модулю m (теорема 3). Далее найдены равномерные асимптотические разложения d_n при $n \rightarrow \infty$ с явными коэффициентами (теорема 4) и описан критический переход при $\gamma \rightarrow \gamma_{\text{crit}}$, когда квадратичная форма теряет строгую положительную определённость, включая асимптотику низшего собственного значения при $\gamma \searrow \gamma_{\text{crit}}$, и определены поперечники на ортогональном дополнении к ядру в критическом случае.

2 Спектральное разложение и явные формулы для поперечников

Рассмотрим звёздный граф Γ , состоящий из m рёбер $e_1, \dots, e_m$ единичной длины ($m \geq 2$), соединённых в вершине $v = 0$. Координату на каждом ребре обозначим $x \in [0, 1]$, причём $x = 0$ соответствует центральной вершине, а $x = 1$ – внешней вершине. Пространство $L^2(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^m L^2[0, 1]$ состоит из элементов $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Оператор $L_{\alpha, \gamma}$ задаётся дифференциальным выражением

$$L_{\alpha, \gamma} y = (-y_1'', \dots, -y_m''),$$

на области определения $\bigoplus_{j=1}^m H^2[0, 1]$ с граничными условиями

$$y_1(0) = \dots = y_m(0) =: y(0), \quad \sum_{j=1}^m y_j'(0) = \gamma y(0), \quad (1)$$

$$y_j'(1) + \alpha_j y_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где $\alpha_j > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Квадратичная форма оператора имеет вид

$$Q_{\alpha, \gamma}[y] = \sum_{j=1}^m \int_0^1 |y_j'|^2 dx + \sum_{j=1}^m \alpha_j |y_j(1)|^2 + \gamma |y(0)|^2, \quad (3)$$

и определена на $\bigoplus_{j=1}^m H^1[0, 1]$ с условием непрерывности $y_1(0) = \dots = y_m(0)$.

Лемма 1. При $\alpha_j > -1$ для любого y из области определения $Q_{\alpha, \gamma}$ выполнено

$$\sum_{j=1}^m \left(\int_0^1 |y_j'|^2 dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \right) \geq \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j} |y_j(0)|^2.$$

Доказательство. Зафиксируем ребро j , положим $c = y_j(0)$ и

$$\ell_j(x) = c \left(1 - \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j} x \right).$$

Функция ℓ_j удовлетворяет условиям $\ell_j(0) = c$ и $\ell_j'(1) + \alpha_j \ell_j(1) = 0$. Для $v = y_j - \ell_j$, интегрируя по частям и используя $v(0) = 0$, получаем

$$\int_0^1 |y_j'|^2 dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 = \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j} |c|^2 + \int_0^1 |v'|^2 dx + \alpha_j |v(1)|^2.$$

Поскольку $|v(1)|^2 \leq \int_0^1 |v'|^2 dx$ и $\alpha_j > -1$, последние два слагаемых имеют неотрицательную сумму. Остаётся просуммировать полученные неравенства по j и воспользоваться равенствами $y_j(0) = y(0)$. $\square$

Предложение 1. Пусть $\alpha_j > -1$ и выполнено условие

$$\gamma > -\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}. \quad (4)$$

Тогда квадратичная форма $Q_{\alpha,\gamma}$ строго положительна и коэрцитивна на $H^1(\Gamma)$: существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $y \in H^1(\Gamma)$ с условием непрерывности в центре

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq \varepsilon \|y\|_{H^1(\Gamma)}^2.$$

Следовательно, оператор $L_{\alpha,\gamma}$, порождённый этой формой, является строго положительным самосопряжённым оператором в $L^2(\Gamma)$, а обратный оператор $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$ компактен и самосопряжён.

Доказательство. Положим $c_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j / (1 + \alpha_j)$. По лемме 1

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq (c_0 + \gamma)|y(0)|^2.$$

Если $Q_{\alpha,\gamma}[y] = 0$, то $y(0) = 0$. Кроме того, для каждой компоненты

$$\int_0^1 |y'_j|^2 dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \geq (1 + \alpha_j) |y_j(1)|^2 \geq 0,$$

где использовано $|y_j(1)|^2 \leq \int_0^1 |y'_j|^2 dx$. Поэтому равенство возможно лишь при $y_j \equiv 0$ для всех j , и форма строго положительна.

Стандартные теоремы о следах на $H^1(0, 1)$ показывают, что форма замкнута, а соответствующая форменная норма эквивалентна норме $H^1(\Gamma)$. Компактность вложения $H^1(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ и строгая положительность дают $Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq \lambda_1 \|y\|_{L^2}^2$ с некоторым $\lambda_1 > 0$. Следовательно,

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} (Q_{\alpha,\gamma}[y] + \|y\|_{L^2}^2) \geq \varepsilon \|y\|_{H^1(\Gamma)}^2.$$

По теореме о представлении замкнутых форм порождённый формой оператор самосопряжён и строго положителен. Компактность вложения области формы в $L^2(\Gamma)$ влечёт компактность его обратного. $\square$

Ортогональное разложение и инвариантные подпространства.

Далее рассматривается симметричный случай $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha > -1$. Условие положительной определённости (предложение 1) принимает вид

$$\gamma > -\frac{m\alpha}{1+\alpha} \iff \gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0.$$

Отсюда, в частности, $m\alpha + \gamma > 0$ (при $\alpha \neq 0$ выполнено $m\alpha + \gamma > \frac{m\alpha^2}{1+\alpha} > 0$, а при $\alpha = 0$ условие даёт $\gamma > 0$, так что $m\alpha + \gamma = \gamma > 0$).

Оператор $L_{\alpha,\gamma}$ инвариантен относительно перестановок рёбер. Это позволяет разложить пространство $L^2(\Gamma)$ в ортогональную сумму двух подпространств:

$$L^2(\Gamma) = \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_{st}, \quad (5)$$

где

$$\mathcal{H}_s = \{y \in L^2(\Gamma) : y_1 = y_2 = \dots = y_m\},$$

$$\mathcal{H}_{st} = \{y \in L^2(\Gamma) : y_1 + y_2 + \dots + y_m = 0\}.$$

Подпространство $\mathcal{H}_s$ назовём *симметричным*, а $\mathcal{H}_{st}$ — *стандартным*. Второе соответствует стандартному $(m-1)$ -мерному представлению группы перестановок рёбер. Оба функциональных подпространства бесконечномерны, но в $\mathcal{H}_s$ все компоненты задаются одной функцией, а пространство коэффициентов в $\mathcal{H}_{st}$ имеет размерность $m-1$. Оба подпространства инвариантны относительно $L_{\alpha,\gamma}$, поэтому спектральная задача распадается на симметричную и стандартную ветви.

Стандартная ветвь. На подпространстве $\mathcal{H}_{st}$ из условия $y_1 + \dots + y_m = 0$ и непрерывности в центре $y_1(0) = \dots = y_m(0) =: y(0)$ следует $my(0) = 0$, то есть $y(0) = 0$. Баланс потоков в центре $\sum y'_j(0) = \gamma y(0)$ выполняется автоматически ($0 = 0$). Таким образом, для каждой компоненты y_j получается задача

$$\begin{cases} -y''_j = \mu y_j, & x \in (0, 1), \\ y_j(0) = 0, \\ y'_j(1) + \alpha y_j(1) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Положительность формы исключает $\mu \leq 0$. При $\mu = \omega^2 > 0$ условие $y_j(0) = 0$ даёт $y_j(x) = B \sin \omega x$, а условие при $x = 1$ — $B(\omega \cos \omega + \alpha \sin \omega) = 0$. Для нетривиального решения $\sin \omega \neq 0$, поэтому характеристическое уравнение имеет вид

$$\omega \cot \omega = -\alpha. \quad (7)$$

Функция $f(\omega) = \omega \cot \omega$ строго убывает на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$, причём $f((k-1)\pi+) = +\infty$ при $k \geq 2$ и $f(0+) = 1$, а $f(k\pi-) = -\infty$. Поскольку $\alpha > -1$, уравнение (7) имеет на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$ ровно один простой корень. Обозначим эти корни через $\omega_k^{(st)}(\alpha)$, $k = 1, 2, \dots$, занумерованные в порядке возрастания. Соответствующие собственные значения оператора $L_{\alpha,\gamma}$ на $\mathcal{H}_{st}$ имеют вид

$$\mu_k^{(st)} = (\omega_k^{(st)}(\alpha))^2,$$

и каждое из них имеет кратность $m-1$, поскольку каждому $\omega_k^{(st)}$ отвечает $(m-1)$ -мерное пространство функций, удовлетворяющих условию $\sum y_j = 0$. В терминах обратного оператора $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$ получаем собственные значения

$$\lambda_k^{(st)} = \frac{1}{(\omega_k^{(st)}(\alpha))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{кратность } m-1. \quad (8)$$

Симметричная ветвь. На подпространстве $\mathcal{H}_s$ все компоненты равны: $y_1 = \dots = y_m =: y$. Условия (1) и (2) сводятся к одномерной задаче

$$\begin{cases} -y'' = \mu y, & x \in (0, 1), \\ y'(0) = \frac{\gamma}{m} y(0), \\ y'(1) + \alpha y(1) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

При $\mu = \omega^2 > 0$ решение, удовлетворяющее левому условию, с точностью до постоянного множителя равно

$$y(x) = \cos \omega x + \frac{\gamma}{m\omega} \sin \omega x.$$

Подстановка в условие при $x = 1$ даёт характеристическое уравнение

$$(-m\omega^2 + \alpha\gamma) \sin \omega + \omega(m\alpha + \gamma) \cos \omega = 0. \quad (10)$$

По условию положительной определённости $m\alpha + \gamma > 0$. Поэтому корень не может удовлетворять $\sin \omega = 0$. Деление на $\sin \omega$ даёт

$$\omega \cot \omega = \frac{m\omega^2 - \alpha\gamma}{m\alpha + \gamma}.$$

Правая часть строго возрастает по ω (её производная положительна в силу $m\alpha + \gamma > 0$), левая строго убывает на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$. Следовательно, на каждом таком интервале существует ровно один простой корень $\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma)$, $k = 1, 2, \dots$ (при $k = 1$ правосторонний предел левой части равен 1, а значение правой в нуле есть $-\alpha\gamma/(m\alpha + \gamma)$, и неравенство $1 > -\alpha\gamma/(m\alpha + \gamma)$ вытекает из $\gamma(1 + \alpha) + m\alpha > 0$). Соответствующие собственные значения оператора $L_{\alpha, \gamma}$ на $\mathcal{H}_s$ однократны:

$$\mu_k^{(s)} = (\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma))^2,$$

а для $T_{\alpha, \gamma}$ имеем

$$\lambda_k^{(s)} = \frac{1}{(\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma))^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{кратность } 1. \quad (11)$$

Теорема 1. Пусть $\alpha > -1$ и $\gamma > \gamma_{\text{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$ (то есть $\gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0$). Тогда собственные значения оператора $T_{\alpha, \gamma} = L_{\alpha, \gamma}^{-1}$ исчерпываются сериями $\{\lambda_k^{(s)}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_k^{(st)}\}_{k=1}^{\infty}$, определёнными в (11) и (8), где $\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma)$ – корни уравнения (10), а $\omega_k^{(st)}(\alpha)$ – корни уравнения (7). При этом каждое $\lambda_k^{(s)}$ однократно, а каждое $\lambda_k^{(st)}$ имеет кратность $m - 1$.

Чередование корней. Для построения последовательности поперечников d_n по формуле $d_n = \lambda_{n+1}$ необходимо упорядочить объединённый спектр $\{\lambda_k^{(s)}\} \cup \{\lambda_k^{(st)}\}$ по невозрастанию. Следующая теорема описывает взаимное расположение соответствующих корней $\omega_k^{(s)}$ и $\omega_k^{(st)}$.

Теорема 2. Пусть $\alpha > -1$ и $\gamma > \gamma_{\text{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$. Тогда для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнены неравенства

$$\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma) < \omega_k^{(\text{st})}(\alpha) < \omega_{k+1}^{(s)}(\alpha, \gamma). \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим две задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ с одинаковым дифференциальным выражением $-y'' = \mu y$ и одинаковым правым граничным условием $y'(1) + \alpha y(1) = 0$. Левые условия различны:

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad & y'(0) - \frac{\gamma}{m} y(0) = 0, \\ \text{(ST)} \quad & y(0) = 0. \end{aligned}$$

Условие (ST) соответствует $\theta = +\infty$ (условие Дирихле), а (S) – конечному $\theta = \gamma/m$ в параметризации $y'(0) - \theta y(0) = 0$. Известно (см., например, [10]), что собственные значения задачи Штурма–Лиувилля строго возрастают при возрастании параметра θ . Обозначим через $\mu_k(\theta)$ k -е собственное значение задачи с левым условием $y'(0) - \theta y(0) = 0$ (при $\theta = \gamma/m$) и через $\mu_k(\infty)$ – с условием $y(0) = 0$. Тогда для любого конечного θ выполнено

$$\mu_k(\theta) < \mu_k(\infty) < \mu_{k+1}(\theta), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь $\mu_k(\gamma/m) = (\omega_k^{(s)})^2$, $\mu_k(\infty) = (\omega_k^{(\text{st})})^2$, что и даёт (12). $\square$

Из теоремы 2 и соотношений $\lambda = 1/\omega^2$ следует

$$\lambda_k^{(s)} > \lambda_k^{(\text{st})} > \lambda_{k+1}^{(s)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Учитывая кратности ($\lambda_k^{(s)}$ однократны, $\lambda_k^{(\text{st})}$ имеют кратность $m-1$), получаем следующую невозрастающую последовательность собственных значений оператора $T_{\alpha, \gamma}$:

$$\lambda_1^{(s)} > \underbrace{\lambda_1^{(\text{st})} = \dots = \lambda_1^{(\text{st})}}_{m-1} > \lambda_2^{(s)} > \underbrace{\lambda_2^{(\text{st})} = \dots = \lambda_2^{(\text{st})}}_{m-1} > \lambda_3^{(s)} > \dots$$

В свернутом виде:

$$\lambda_{mk+1} = \lambda_{k+1}^{(s)}, \quad \lambda_{mk+2} = \dots = \lambda_{m(k+1)} = \lambda_{k+1}^{(\text{st})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 для любого $n \geq 0$ выполнено

$$d_n = \lambda_{n+1},$$

где λ_k – упорядоченная по невозрастанию последовательность собственных значений $T_{\alpha, \gamma}$, определяемая формулой (13). В явном виде:

$$\begin{aligned} d_{mk} &= \frac{1}{(\omega_{k+1}^{(s)}(\alpha, \gamma))^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ d_{mk+r} &= \frac{1}{(\omega_{k+1}^{(\text{st})}(\alpha))^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad r = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

3 Равномерная асимптотика поперечников

Асимптотическое поведение d_n при $n \rightarrow \infty$ определяется разложениями корней $\omega_k^{(\text{st})}(\alpha)$ и $\omega_k^{(\text{s})}(\alpha, \gamma)$. Все получаемые ниже формулы равномерны по параметрам (α, γ) на любом компакте

$$K \subset \{(\alpha, \gamma) : \alpha > -1, \quad \gamma(1 + \alpha) + m\alpha > 0\}.$$

Стандартная ветвь. Корни $\omega_k^{(\text{st})}(\alpha)$ удовлетворяют уравнению (7):

$$\omega \cot \omega = -\alpha.$$

Известно, что $\omega_k^{(\text{st})} \in ((k-1)\pi, k\pi)$. Введём обозначение

$$N = k - \frac{1}{2}, \quad \eta_k = \omega_k^{(\text{st})} - \pi N.$$

Тогда $\eta_k \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\eta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Подставляя $\omega = \pi N + \eta_k$ в уравнение и используя тождество $\cot(\pi N + \eta) = -\tan \eta$, получаем

$$(\pi N + \eta_k) \tan \eta_k = \alpha. \quad (14)$$

Лемма 2. При $k \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\eta_k = O(1/N)$, равномерная по α на любом компакте $K_1 \subset (-1, \infty)$.

Доказательство. Для $|\eta| < \pi/2$ выполняется неравенство $|\tan \eta| \geq |\eta|$. Из (14) имеем

$$|\alpha| = |\pi N + \eta_k| |\tan \eta_k| \geq (\pi N - |\eta_k|) |\eta_k|.$$

При достаточно больших N (таких, что $\pi N > |\eta_k| + 1$) отсюда следует

$$|\eta_k| \leq \frac{|\alpha|}{\pi N - |\eta_k|} \leq \frac{2|\alpha|}{\pi N},$$

где последнее неравенство верно при $|\eta_k| \leq \pi N/2$, что выполнено для всех больших N . Таким образом, $\eta_k = O(1/N)$, причём константа в оценке зависит только от $\sup_{K_1} |\alpha|$. $\square$

В уравнении (14) подставим $\tan \eta = \eta + \eta^3/3 + O(\eta^5)$ и

$$\eta_k = \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \frac{a_4}{N^4} + O(N^{-5}).$$

Сравнение коэффициентов при $1, N^{-1}, N^{-2}, N^{-3}$ даёт

$$a_1 = \frac{\alpha}{\pi}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3}, \quad a_4 = 0.$$

Оценка остатка $O(N^{-5})$, равномерная по α на компактах, следует из теоремы о неявной функции, применённой к аналитическому уравнению $(\pi + z\eta) \tan \eta = \alpha z$ при $z = N^{-1}$ в окрестности $(z, \eta) = (0, 0)$. Поэтому

$$\eta_k = \frac{\alpha}{\pi N} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3 N^3} + O(N^{-5}), \quad (15)$$

и

$$\omega_k^{(\text{st})} = \pi \left(k - \frac{1}{2} \right) + \frac{\alpha}{\pi(k - \frac{1}{2})} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3(k - \frac{1}{2})^3} + O(k^{-5}).$$

Симметричная ветвь. Корни $\omega_k^{(s)}(\alpha, \gamma)$ удовлетворяют уравнению (10):

$$(-m\omega^2 + \alpha\gamma) \sin \omega + \omega(m\alpha + \gamma) \cos \omega = 0.$$

При больших k корни лежат в интервалах $((k-1)\pi, k\pi)$ и приближаются к левому концу интервала. Положим

$$\zeta_k = \omega_k^{(s)} - (k-1)\pi, \quad \zeta_k \rightarrow 0^+ \quad (k \rightarrow \infty).$$

Подстановка $\omega = (k-1)\pi + \zeta_k$ в (10) и сокращение на $(-1)^{k-1}$ дают

$$(-m\omega^2 + \alpha\gamma) \sin \zeta_k + \omega(m\alpha + \gamma) \cos \zeta_k = 0. \quad (16)$$

Используя $\sin \zeta = \zeta + O(\zeta^3)$, $\cos \zeta = 1 + O(\zeta^2)$ и сохраняя индекс $k-1$, получаем равномерно на компактах

$$\zeta_k = \frac{m\alpha + \gamma}{m\pi(k-1)} + O((k-1)^{-3}). \quad (17)$$

Лишь после этого заменяем k на $k+1$:

$$\omega_{k+1}^{(s)} = k\pi + \frac{m\alpha + \gamma}{m\pi k} + O(k^{-3}).$$

Асимптотика поперечников d_n . Согласно теореме 3, для каждого $n \geq 0$ положим $r = n \bmod m$ ($r = 0, 1, \dots, m-1$). Тогда $n = mk + r$, где $k = \lfloor n/m \rfloor$, и

$$d_{mk} = \frac{1}{(\omega_{k+1}^{(s)})^2}, \quad d_{mk+r} = \frac{1}{(\omega_{k+1}^{(st)})^2}, \quad r = 1, \dots, m-1.$$

Случай $n = mk$ ($r = 0$). Из разложения симметричного корня

$$(\omega_{k+1}^{(s)})^{-2} = \frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{2(m\alpha + \gamma)}{m\pi^4 k^4} + O(k^{-5}).$$

Поскольку $k = n/m$, отсюда следует

$$d_{mk} = \frac{m^2}{\pi^2 n^2} + O(n^{-4}).$$

Случай $n = mk + r$, $1 \leq r \leq m-1$. Положим $t = m - 2r$. Тогда

$$A := k + \frac{1}{2} = \frac{n}{m} \left(1 + \frac{t}{2n}\right), \quad \omega_{k+1}^{(st)} = \pi A + \frac{\alpha}{\pi A} + O(A^{-3}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d_{mk+r} &= \frac{m^2}{\pi^2 n^2} \left(1 + \frac{t}{2n} + \frac{\alpha m^2}{\pi^2 n^2} + O(n^{-3})\right)^{-2} \\ &= \frac{m^2}{\pi^2 n^2} - \frac{m^2(m-2r)}{\pi^2 n^3} + O(n^{-4}). \end{aligned}$$

Объединяя результаты, сформулируем окончательную теорему.

Теорема 4. Пусть $\alpha > -1$ и $\gamma > \gamma_{\text{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ для поперечников по Колмогорову $d_n = d_n(T_{\alpha,\gamma}(B_{L^2}), L^2)$ справедливы асимптотические разложения

$$d_n = \frac{m^2}{\pi^2 n^2} + O(n^{-4}), \quad n \equiv 0 \pmod{m},$$

$$d_n = \frac{m^2}{\pi^2 n^2} - \frac{m^2(m-2r)}{\pi^2 n^3} + O(n^{-4}), \quad n \equiv r \pmod{m}, \quad r = 1, \dots, m-1,$$

причём остаточные члены $O(n^{-4})$ равномерны по (α, γ) на любом компакте $K \subset \{(\alpha, \gamma) : \alpha > -1, \gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0\}$.

Следствие 1. В условиях теоремы 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 d_n = \frac{m^2}{\pi^2},$$

причём сходимость равномерна по (α, γ) на компактах допустимой области параметров.

Доказательство. После умножения разложений теоремы 4 на n^2 остаток имеет порядок $O(n^{-2})$ при $n \equiv 0 \pmod{m}$ и $O(n^{-1})$ в остальных классах вычетов. Их конечное число, поэтому сходимость равномерна по $n \pmod{m}$ и по параметрам на каждом допустимом компакте. $\square$

Таким образом, главный член зависит только от числа рёбер, но не от граничных параметров.

Следствие 2. Для каждого фиксированного $r \in \{0, \dots, m-1\}$

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \equiv r \pmod{m}}} n^3 \left(d_n - \frac{m^2}{\pi^2 n^2} \right) = \begin{cases} 0, & r = 0, \\ -\frac{m^2(m-2r)}{\pi^2}, & 1 \leq r \leq m-1. \end{cases}$$

Доказательство. При $r = 0$ первое разложение даёт $n^3(d_n - m^2/(\pi^2 n^2)) = O(n^{-1})$. При $1 \leq r \leq m-1$ второе даёт

$$n^3 \left(d_n - \frac{m^2}{\pi^2 n^2} \right) = -\frac{m^2(m-2r)}{\pi^2} + O(n^{-1}).$$

В обоих случаях остаток стремится к нулю вдоль выбранного класса вычетов. $\square$

Поправка периодична по $n \pmod{m}$ и отражает кратность стандартной ветви.

4 Критический случай и поперечники на ортогональном дополнении к ядру

Критическое значение параметра. Из предложения 1 следует, что квадратичная форма $Q_{\alpha,\gamma}$ перестаёт быть строго положительной при

выполнении условия

$$\gamma = \gamma_{\text{crit}} := - \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j}.$$

Для симметричного случая $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ это условие принимает вид

$$\gamma_{\text{crit}} = - \frac{m\alpha}{1 + \alpha}. \quad (18)$$

При этом

$$m\alpha + \gamma_{\text{crit}} = \frac{m\alpha^2}{1 + \alpha}.$$

При $\alpha \neq 0$ эта величина положительна. При $\alpha = 0$ она равна нулю, однако стандартная ветвь всё равно строго положительна: на ней действует задача Дирихле–Неймана, собственные значения которой равны $((k - \frac{1}{2})\pi)^2$. Поэтому для всех $\alpha > -1$ потеря строгой положительности происходит только на $\mathcal{H}_s$. Оператор $L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}$ имеет однократное нулевое собственное значение с симметричной собственной функцией

$$y_j(x) = C \left(1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} x \right), \quad j = 1, \dots, m,$$

(при $\alpha = 0$ это постоянная функция). Все остальные собственные значения строго положительны.

Асимптотика низшего собственного значения симметричной ветви при $\gamma \searrow \gamma_{\text{crit}}$. Пусть $\alpha > -1$ и $\gamma = \gamma_{\text{crit}} + \varepsilon$ с $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Обозначим

$$A := m\alpha + \gamma_{\text{crit}} = \frac{m\alpha^2}{1 + \alpha} \geq 0.$$

Тогда

$$m\alpha + \gamma = A + \varepsilon, \quad \alpha\gamma = \alpha\gamma_{\text{crit}} + \alpha\varepsilon = -A + \alpha\varepsilon.$$

Подставляя эти выражения и разложения $\sin \omega = \omega - \omega^3/6 + O(\omega^5)$, $\cos \omega = 1 - \omega^2/2 + O(\omega^4)$ в (10), получаем после деления на $\omega > 0$

$$(1 + \alpha)\varepsilon - \left(m + \frac{A}{3} \right) \omega^2 + O(\omega^4 + \varepsilon\omega^2) = 0.$$

Так как $A = m\alpha^2/(1 + \alpha)$, отсюда

$$\mu_1^{(s)} = \omega^2 = \frac{3(1 + \alpha)^2}{m(\alpha^2 + 3\alpha + 3)} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (19)$$

Поперечники на ортогональном дополнении к ядру. При $\gamma = \gamma_{\text{crit}}$ оператор $L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}$ не является обратимым на всём $L^2(\Gamma)$, поскольку имеет одномерное ядро. Рассмотрим ортогональное дополнение к ядру:

$$\mathcal{H}_0 := L^2(\Gamma) \ominus \ker L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}, \quad \dim \ker L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}} = 1.$$

Ограничение $L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}|_{\mathcal{H}_0}$ инъективно и имеет компактный обратный

$$T_{\text{crit}} := (L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}|_{\mathcal{H}_0})^{-1}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0.$$

Собственные значения T_{crit} суть величины, обратные к положительным собственным значениям $L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}$. Обозначим через

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots$$

полный спектр $L_{\alpha, \gamma_{\text{crit}}}$ (с учётом кратности). Тогда

$$d_n^{\text{crit}} := d_n(T_{\text{crit}}(B_{\mathcal{H}_0}), \mathcal{H}_0) = \mu_{n+2}^{-1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

поскольку первое собственное значение $\mu_1 = 0$ исключено. Для $\gamma > \gamma_{\text{crit}}$ собственные значения $L_{\alpha, \gamma}$ непрерывно зависят от γ , причём $\mu_j(\gamma) \rightarrow \mu_j(\gamma_{\text{crit}})$ для каждого j . Следовательно,

$$d_0^{\text{crit}} = \mu_2^{-1} = \lim_{\gamma \searrow \gamma_{\text{crit}}} d_1(\gamma), \quad d_n^{\text{crit}} = \lim_{\gamma \searrow \gamma_{\text{crit}}} d_{n+1}(\gamma), \quad n \geq 1.$$

Таким образом, последовательность критических поперечников получается из обычной сдвигом на единицу, причём d_0^{crit} соответствует первому положительному собственному значению.

References

- [1] A. N. Kolmogorov, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. of Math. (2), **37**:1 (1936), 107–110.
- [2] V. M. Tikhomirov, *Some problems in approximation theory*, Math. Notes, **9**:5 (1971), 343–350.
- [3] A. Pinkus, *n-widths in approximation theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., (3), **7**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [4] A. Pietsch, *s-numbers of operators in Banach spaces*, Studia Math., **51**:3 (1974), 201–223.
- [5] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Estimates of singular numbers of integral operators*, Russian Math. Surveys, **32**:1 (1977), 15–89.
- [6] D. Lewis, B. Sing, *An upper bound on the Kolmogorov widths of a certain family of integral operators*, J. Approx. Theory, **240** (2019), 71–95.
- [7] G. Berkolaiko, *An elementary introduction to quantum graphs*, Contemp. Math., **700** (2017), 41–72.
- [8] P. Kuchment, *Quantum graphs: I. Some basic structures*, Waves in Random Media, **14**:1 (2004), S107–S128.
- [9] P. Exner, *Leaky quantum graphs: a review*, Proc. Sympos. Pure Math., **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 523–564.
- [10] A. Zettl, *Sturm–Liouville theory*, Math. Surveys Monogr., **121**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [11] Y. Latushkin, V. Pivovarchik, A. Supranovych, *Sturm–Liouville problems on graphs with Robin boundary conditions*, preprint, arXiv:2510.23392, 2025.
- [12] D. Mugnolo, *Semigroup methods for evolution equations on networks*, Underst. Complex Syst., Springer, Cham, 2014.
- [13] M. Solomyak, *On approximation of functions from Sobolev spaces on metric graphs*, J. Approx. Theory, **121**:2 (2003), 199–219.
- [14] W. D. Evans, D. J. Harris, J. Lang, *The approximation numbers of Hardy-type operators on trees*, Proc. Lond. Math. Soc., **83**:2 (2001), 390–418.

ARTHUR LVOVICH SINAI
YAROSLAV-THE-WISE NOVGOROD STATE UNIVERSITY,
UL. BOLSHAYA SANKT-PETERBURGSKAYA, 41,
173003, VELIKY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: arthur.sinai@mail.ru