

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ
МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Д.А. ЗАКОРА , Д.А. ПРОКУДИН ,

Представлено О.С. Розановой

Abstract: An initial-boundary value problem for three-dimensional equations of the dynamics of incompressible multicomponent media is considered. A local existence and uniqueness theorem for a time-strong solution is proved without restrictions on the structure of the viscosity matrix, except for the standard properties of symmetry and positivity.

Keywords: mixture of viscous fluids, incompressible viscous fluid, initial-boundary value problem, existence and uniqueness theorem.

1 Введение

Приведём постановку нелинейной задачи, описывающей баротропное движение многокомпонентной вязкой сжимаемой жидкости. В работе изучается случай несжимаемых компонент смеси.

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с C^2 -гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей.

ZAKORA, D.A., PROKUDIN, D.A., SOLVABILITY OF NON-STATIONARY EQUATIONS OF THREE-DIMENSIONAL MOTION OF A MULTICOMPONENT VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID.

© 2025 ЗАКОРА Д.А., ПРОКУДИН Д.А..

Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 25-11-00056.

Поступила 8 ноября 2025 г., опубликована 14 октября 2026 г.

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω . Баротропное движение смеси $n \geq 2$ вязких сжимаемых жидкостей описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= \operatorname{div} \mathbf{T}_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \rho_i \mathbf{f}_i, \\ \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) &= 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t, \mathbf{x}) = (u_{i1}(t, \mathbf{x}); u_{i2}(t, \mathbf{x}); u_{i3}(t, \mathbf{x}))^\top$ ($\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$) — поле скоростей i -й компоненты смеси (символом $\top$ обозначена операция транспонирования), $\rho_i = \rho_i(t, \mathbf{x})$ — плотность, $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x})$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами¹:

$$\mathbf{T}_i := -p_i \mathbf{I}_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^n (\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) \mathbf{I}_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u})),$$

где $p_i = p_i(t, \mathbf{x})$ — давление в i -й компоненте смеси, $\mathbf{I}_3$ — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij} , λ_{ij} — компоненты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\mathbf{\Lambda} \geq 0.$$

Давление и плотность в каждой компоненте смеси обычно связаны некоторым уравнением состояния, а система (1) рассматривается с классическими граничными условиями прилипания, либо с условиями непротекания и нулевыми касательными напряжениями.

Система уравнений (1) — один из многих вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель (подробности см. в [1, 2, 3, 4]). В частности, это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. При этом учёт межкомпонентного вязкого трения посредством рассмотрения недиагональных матриц вязкостей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{\Lambda}$ во многом определяет специфику исследуемой модели динамики смесей. Если матрицы вязкостей диагональны и в (1) все

¹ Для векторного поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^\top$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)$ ($l, k = 1, 2, 3$) тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^3 e_{ss}(\mathbf{u}) \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

$a_{ij} = 0$, то мы будем иметь дело с n независимыми системами уравнений Навье–Стокса для каждой компоненты.

Математическое исследование многоскоростных моделей движения многокомпонентных сред с недиагональными матрицами вязкостей началось относительно недавно. Одной из первых работ, в которой были получены результаты о разрешимости в многомерном случае, является работа J. Frehse, S. Goj и J. Málek [5]. В упомянутой работе доказана разрешимость задачи Коши для системы без конвективных членов в случае общей зависимости давлений от плотностей компонент. В [6] этими же авторами получен результат о единственности слабых решений задачи Коши при дополнительных предположениях, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами равны нулю. В работе J. Frehse и W. Weigant [7] доказано существование и единственность классического решения краевой задачи для квазистационарной системы без конвективных слагаемых со специальными граничными условиями. Результаты о существовании решений с учетом конвективных слагаемых получены А.Е. Мамонтовым и Д.А. Прокудиным для многоскоростной модели в [4, 8]. Спектральный анализ некоторых линейных моделей сжимаемых вязких многокомпонентных сред проведен в [9, 10, 11].

Цель данной работы — обоснование разрешимости ранее не исследованной начально-краевой задачи о движениях смеси вязких несжимаемых жидкостей. Основные результаты изложены в теореме 1.

2 Постановка задачи и основной результат

Будем считать, что компоненты смеси — несжимаемые однородные жидкости с плотностями $\rho_i(t, \mathbf{x}) = \rho_i = \text{const}_i > 0$. В этом случае система (1), граничные условия прилипания и начальные условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} \Delta \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i, \\ \text{div} \mathbf{u}_i &= 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \Omega, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial\Omega, \\ \mathbf{u}_i(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_i^0(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь μ_{ij} — коэффициенты вязкостей, $a_{ij} = a_{ji} \geq 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсами между компонентами, $T > 0$. Матрица $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, называемая матрицей вязкостей, является симметричной и положительной: $\mathbf{M} > 0$.

Определение 1. Поля $\mathbf{u}_i \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega)) \cap C([0, T]; \mathbf{W}_2^2(\Omega))$ и функции $p_i \in C([0, T]; W_2^1(\Omega))$ ($i = 1, \dots, n$), называются решением начально-краевой задачи (2), если в (2) выполнены начальные условия, выполнены уравнения и граничные условия при всех $t \in [0, T]$ и при п.в. $\mathbf{x}$.

Обозначим $\mathbf{J}_0^1(\Omega) := \{\mathbf{u} \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ (} \mathbf{x} \in \Omega \text{)}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ (} \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{)}\}$ (см., например, [12, гл. 2, § 2, п. 4] или [13, гл. 2, § 2.2, п. 2.2.4]). Основное содержание работы составляет следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{u}_i^0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$), а поля $\mathbf{f}_i$ удовлетворяют локальному условию Гёльдера, т.е. для любого $\tau > 0$ существуют $K_i = K_i(\tau) > 0$, $\kappa_i = \kappa_i(\tau) \in (0, 1]$ такие, что

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq K_i |t - s|^{\kappa_i} \quad \forall 0 \leq t, s \leq \tau.$$

Тогда начально-краевая задача (2) имеет единственное решение (в смысле определения 1) на некотором отрезке $[0, T]$.

3 Корректная разрешимость задачи (2)

Исследование корректной разрешимости задачи (2) опирается на теорему П.Е. Соболевского (см. [14, теорема 7]) и аналогичные исследования уравнений однокомпонентной жидкости (см., например, [15, гл. 3, § 3.5], [16, гл. 2, § 15, п. 15.19]). Задача (2) сначала трактуется как задача Коши для нелинейного операторного уравнения в подходящем гильбертовом пространстве, затем применяется указанная теорема.

3.1. Операторная трактовка задачи. Введём гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega)$ с обычным скалярным произведением и нормой

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega)} := \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \overline{\mathbf{v}(\mathbf{x})} d\Omega, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\Omega.$$

Для пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ справедливо разложение Г. Вейля в ортогональную сумму соленоидальных полей с нулевой нормальной составляющей на границе и потенциальных полей (см., например, [12, гл. 2, § 1, формула (1.18)]):

$$\mathbf{L}_2(\Omega) = \mathbf{J}_0(\Omega) \oplus \mathbf{G}(\Omega),$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_0(\Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ (} \mathbf{x} \in \Omega \text{)}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (} \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{)}\}, \\ \mathbf{G}(\Omega) &:= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \mathbf{u} = \nabla p\}. \end{aligned}$$

Здесь операции дивергенции и нормальной составляющей на границе понимаются в смысле теории обобщённых функций (см. [12, гл. 2, § 1, п. 6]).

Будем считать далее, что поля $\mathbf{u}_i$, ∇p_i ($i = 1, \dots, n$) зависят от переменной t и принимают значения в $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Тогда $\mathbf{u}_i(t) \in \mathbf{J}_0(\Omega)$ в силу уравнений неразрывности и граничных условий из (2), а $\nabla p_i(t) \in \mathbf{G}(\Omega)$, очевидно, при каждом $t \geq 0$. Введём ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\mathbf{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\mathbf{J}_0(\Omega)$ и $\mathbf{G}(\Omega)$ соответственно. Применяя

к уравнениям импульсов из (2) поочерёдно ортопроекторы P_0 и P_G , получим следующие соотношения:

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + P_0(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} P_0 \Delta \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + P_0 \mathbf{f}_i(t), \quad (3)$$

$$P_G(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} P_G \Delta \mathbf{u}_j + P_G \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Из соотношений (4) по известным полям $\mathbf{u}_i$ и заданным полям $\mathbf{f}_i$ можно восстановить поля ∇p_i ($i = 1, \dots, n$), поэтому далее будем изучать только соотношения (3).

Введём оператор Стокса A — расширение по Фридрихсу оператора $-P_0 \Delta$, определённого на гладких полях из $\mathbf{J}_0(\Omega)$ с условием прилипания на границе $\partial\Omega$ области Ω (см., например, [12, гл. 2, § 2, п. 6] или [13, гл. 2, § 2.2, п. 2.2.5]). Оператор A самосопряжён и положительно определён, а его спектр дискретен. Из [17, гл. 3, § 5, теорема 2] следует, что если граница $\partial\Omega$ класса C^2 , то область определения оператора Стокса имеет вид $\mathcal{D}(A) = \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$.

С использованием оператора Стокса уравнения (3) вместе с начальными условиями из (2) перепишем в виде начальной задачи для системы операторных уравнений в гильбертовом пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} A \mathbf{u}_j &= -P_0(\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{u}_i + \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + P_0 \mathbf{f}_i(t), \\ \mathbf{u}_i(0) &= \mathbf{u}_i^0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Введём гильбертово пространство

$$\mathcal{H} := \oplus_{i=1}^n \mathbf{J}_0(\Omega) = \{ \xi := (\mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n)^\top : \mathbf{u}_i \in \mathbf{J}_0(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \}$$

с обычным скалярным произведением и соответствующей нормой. Введём ряд обозначений и операторов, связанных с (5):

$$\begin{aligned} \xi^0 &:= (\mathbf{u}_1^0; \dots; \mathbf{u}_n^0)^\top \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0 \mathbf{f}_1(t); \dots; P_0 \mathbf{f}_n(t))^\top \in \mathcal{H}, \\ \mathcal{R}\xi &:= \{ \delta_{ij} \rho_j I \}_{i,j=1}^n \xi, \quad \mathcal{M}\xi := \{ \mu_{ij} I \}_{i,j=1}^n \xi, \quad \mathcal{A}\xi := \{ \delta_{ij} A \}_{i,j=1}^n \xi, \\ \mathcal{S}(\xi) &:= (P_0(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1; \dots; P_0(\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n)^\top, \\ \mathcal{B}\xi &:= \left(-\sum_{j=1}^n a_{1j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1); \dots; -\sum_{j=1}^n a_{nj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_n) \right)^\top. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера, I — единичный оператор в $\mathbf{J}_0(\Omega)$, оператор $\mathcal{A}$ определён на естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \oplus_{i=1}^n \mathcal{D}(A)$.

Легко видеть, что оператор $\mathcal{R}$ является ограниченным², т.е. $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, самосопряженным и положительно определённым в $\mathcal{H}$. Обозначим через

² Через $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ обозначена алгебра линейных ограниченных из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ операторов, определённых на всём пространстве $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$.

$\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ энергетическое пространство оператора $\mathcal{R}$. Пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ поэлементно совпадают, а нормы в них эквивалентны.

Систему уравнений и начальных условий (5) теперь можно трактовать как задачу Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$:

$$\frac{d\xi}{dt} + \mathcal{A}_0\xi = \mathcal{N}(t, \xi), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad (7)$$

$$\mathcal{A}_0 := \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}, \quad \mathcal{N}(t, \xi) := -\mathcal{S}(\xi) - \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}\xi + \mathcal{F}(t). \quad (8)$$

Определение 2. Функция ξ называется решением задачи Коши (7), если $\xi \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in [0, T]$, $\mathcal{A}\xi \in C([0, T]; \mathcal{H})$, выполнено уравнение из (7) при всех $t \in [0, T]$ и начальное условие.

3.2. Свойства оператора $\mathcal{A}_0$. Пусть $\mathbf{Q} := \{q_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица, действующая в $\mathbb{C}^n$. Поставим ей в соответствие оператор $\mathcal{Q} := \{q_{ij}I\}_{i,j=1}^n$, действующий в $\mathcal{H}$. Будем писать при этом $\mathbf{Q} \longleftrightarrow \mathcal{Q}$.

Лемма 1. Пусть $\det \mathbf{Q} \neq 0$ и $\mathbf{Q} \longleftrightarrow \mathcal{Q}$. Тогда операторы $\mathcal{Q}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ замкнуты на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}\mathcal{Q}\xi$ для любых $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}$, в силу своей диагональной структуры, замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{D}(A_i)$. Очевидно, что оператор $\mathcal{Q}$ ограничен, то есть $\mathcal{Q} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, поскольку все коэффициенты операторной матрицы $\mathcal{Q}$ пропорциональны единичным операторам I . Из $\det \mathbf{Q} \neq 0$ следует, что существует $\mathcal{Q}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда следует (см., например, [18, гл. 3, § 5, п. 5.2, задача 5.7]), что оператор $\mathcal{Q}\mathcal{A}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Действительно, пусть $\xi_n \rightarrow \xi$ ($\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{Q}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$), $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi_n \rightarrow \zeta$. Последнее соотношение перепишем в эквивалентной форме $\mathcal{A}\xi_n \rightarrow \mathcal{Q}^{-1}\zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{A}\xi = \mathcal{Q}^{-1}\zeta$ или, что то же, $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \zeta$.

2) Покажем, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ замкнут на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Оператор $\mathcal{A}\mathcal{Q}$ задан на естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) := \{\xi \in \mathcal{H} : \mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$ и замкнут на ней. Действительно, пусть $\xi_n \rightarrow \xi$ ($\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$), $\mathcal{A}\mathcal{Q}\xi_n \rightarrow \zeta$. Учитывая ограниченность оператора $\mathcal{Q}$, из этих условий следует формулировка: $\mathcal{Q}\xi_n \rightarrow \mathcal{Q}\xi$ ($\mathcal{Q}\xi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$), $\mathcal{A}(\mathcal{Q}\xi_n) \rightarrow \zeta$. Отсюда и из замкнутости оператора $\mathcal{A}$ следует, что $\mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (или $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$) и $\mathcal{A}\mathcal{Q}\xi = \zeta$.

Покажем, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Пусть $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Учитывая структуру оператора $\mathcal{Q}$ и то, что область определения $\mathcal{D}(A_i)$ оператора Стокса A_i линейное множество, получим, что $\mathcal{Q}\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$. Пусть теперь $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q})$, то есть $\mathcal{Q}\xi =: \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Тогда рассуждая как и выше, получим, что $\xi = \mathcal{Q}^{-1}\zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{Q}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

3) Равенство $\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi = \mathcal{A}\mathcal{Q}\xi$ для любых $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ проверяется непосредственно. $\square$

Лемма 2. Оператор $\mathcal{A}_0 = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}$ с $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ самосопряжён и положительно определён в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Доказательство. 1) Покажем, что оператор $\mathcal{M}\mathcal{A}$ самосопряжён в $\mathcal{H}$. Действительно, из $\mathcal{M} = \mathcal{M}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ следует (см. [18, гл. 3, § 5, задача 5.26]), что $(\mathcal{M}\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^* \mathcal{M}^* = \mathcal{A}\mathcal{M}$ на $\mathcal{D}((\mathcal{M}\mathcal{A})^*) = \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{M})$. Из $\det \mathbf{M} \neq 0$ и леммы 1 следует, что $\mathcal{A}\mathcal{M} = \mathcal{M}\mathcal{A}$ на $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{M}\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{M})$.

Далее, оператор $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}$ самосопряжён в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ оператора $\mathcal{R}$. Действительно, учитывая $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*, \mathcal{R}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, имеем для любых $\xi, \zeta \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A})$:

$$(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\xi, \zeta)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} = (\mathcal{M}\mathcal{A}\xi, \zeta)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{R}\xi, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\zeta)_{\mathcal{H}} = (\xi, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\zeta)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}.$$

2) Покажем, что оператор $\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}$ положительно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.

Обозначим через $\lambda_j(\mathbf{M})$, $\varphi_j(\mathbf{M})$ ($j = 1, \dots, n$) собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Координаты собственных векторов можно считать действительными, а сама система $\{\varphi_j(\mathbf{M})\}_{j=1}^n$ есть ортонормированный базис в $\mathbb{C}^n$, так как матрица вязкостей $\mathbf{M}$ положительна по условию. Обозначим через $\mathbf{M}_{\varphi} = \mathbf{M}_{\varphi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $\mathbf{M}$. Тогда имеют место равенства $\mathbf{M}_{\varphi}^T = \mathbf{M}_{\varphi}^*$, $\mathbf{M}_{\varphi}^* \mathbf{M}_{\varphi} = \mathbf{M}_{\varphi} \mathbf{M}_{\varphi}^* = \mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{M}_{\varphi}^* \mathbf{M} \mathbf{M}_{\varphi} = \{\delta_{ij} \lambda_j(\mathbf{M})\}_{i,j=1}^n$. Положим $\mathbf{M}_{\varphi} \longleftrightarrow \mathcal{M}_{\varphi}$. Тогда $\mathcal{M}_{\varphi}^* \mathcal{M}_{\varphi} = \mathcal{M}_{\varphi} \mathcal{M}_{\varphi}^* = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}_{\varphi}^* \mathcal{M} \mathcal{M}_{\varphi} = \{\delta_{ij} \lambda_j(\mathbf{M}) I\}_{i,j=1}^n$.

Для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A})$ с учётом леммы 1 теперь имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} &= (\mathcal{M}\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = (\mathcal{M}\mathcal{A}\mathcal{M}_{\varphi}\mathcal{M}_{\varphi}^*\xi, \mathcal{M}_{\varphi}\mathcal{M}_{\varphi}^*\xi)_{\mathcal{H}} = \\ &= ((\mathcal{M}_{\varphi}^* \mathcal{M} \mathcal{M}_{\varphi}) \mathcal{A} \mathcal{M}_{\varphi}^* \xi, \mathcal{M}_{\varphi}^* \xi)_{\mathcal{H}} = (\{\delta_{ij} \lambda_j(\mathbf{M}) A\}_{i,j=1}^n \mathcal{M}_{\varphi}^* \xi, \mathcal{M}_{\varphi}^* \xi)_{\mathcal{H}} = \\ &\geq \lambda_1(A) \min_{j=1, \dots, n} \lambda_j(\mathbf{M}) (\mathcal{M}_{\varphi}^* \xi, \mathcal{M}_{\varphi}^* \xi)_{\mathcal{H}} = \lambda_1(A) \min_{j=1, \dots, n} \lambda_j(\mathbf{M}) (\xi, \xi)_{\mathcal{H}} \geq \\ &\geq \lambda_1(A) \min_{j=1, \dots, n} \lambda_j(\mathbf{M}) \min_{j=1, \dots, n} \rho_j^{-1} (\mathcal{R}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} \geq \\ &= \lambda_1(A) \min_{j=1, \dots, n} \lambda_j(\mathbf{M}) \min_{j=1, \dots, n} \rho_j^{-1} (\xi, \xi)_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}, \end{aligned}$$

а значит, оператор $\mathcal{A}_0 = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{M}\mathcal{A}$ положительно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. $\square$

3.3. Вспомогательные предложения и разрешимость задачи (7).

По лемме 2 оператор $\mathcal{A}_0$ самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. Приведём формулировку теоремы П.Е. Соболевского [14, теорема 7] (см. также [15, гл. 3, § 3.3, теорема 3.3.3] или [16, гл. 2, § 15, лемма 15.23]), адаптированную к задаче (7).

Предложение 1 (см. [14], теорема 7). Пусть $\alpha \in [0, 1)$ и $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^{\beta})$ при некотором $\beta > \alpha$, и пусть $\|\mathcal{A}_0^{\alpha} \xi^0\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} < r$. Предположим, что для любого $\tau > 0$ существуют $C = C(r, \tau) > 0$ и $\kappa = \kappa(r, \tau) \in (0, 1]$ такие, что

$$\|\mathcal{N}(t, \xi_1) - \mathcal{N}(s, \xi_1)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq C(|t - s|^{\kappa} + \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}) \quad (9)$$

при любых $0 \leq t, s \leq \tau$, $\|A_0^\alpha \xi_i\|_{\mathcal{H}_R} \leq r$ ($i = 1, 2$). Тогда задача (7) имеет единственное непрерывное на $[0, T]$ и непрерывно дифференцируемое на $(0, T]$ решение при некотором $T > 0$. Если $\xi^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, то это решение непрерывно дифференцируемо и при $t = 0$.

Для исследования нелинейного оператора $\mathcal{N}(t, \cdot)$ понадобится следующее утверждение (см. [15, гл. 3, § 3.8] или [16, гл. 2, § 15, п. 15.25]).

Предложение 2. Для любого $3/4 < \alpha < 1$ существует $C_\alpha > 0$ такая, что для любых $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ имеет место оценка

$$\|P_0(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq C_\alpha \|A^\alpha \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \|A^{1/2} \mathbf{u}_2\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}.$$

Обозначим через $T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}}$ оператор вложения пространства $\mathcal{H}_R$ в $\mathcal{H}$, а через $T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R}$ оператор вложения пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_R$. Поскольку пространства $\mathcal{H}_R$ и $\mathcal{H}$ поэлементно совпадают, указанные операторы ставят в соответствие элементу пространства $\mathcal{H}_R$ или $\mathcal{H}$ его же, но в пространстве $\mathcal{H}$ или $\mathcal{H}_R$ соответственно.

Лемма 3. Имеют место следующие оценки

$$\|T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_R, \mathcal{H})} \leq \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}, \quad \|T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_R)} \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Доказательство. Указанные неравенства следуют из следующих элементарных оценок:

$$\begin{aligned} \|T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}} \xi\|_{\mathcal{H}} &= \|\xi\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{R}^{-1/2} \mathcal{R}^{1/2} \xi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\xi\|_{\mathcal{H}_R} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_R, \\ \|T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R} \xi\|_{\mathcal{H}_R} &= \|\xi\|_{\mathcal{H}_R} = \|\mathcal{R}^{1/2} \xi\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\xi\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. Пусть $\alpha \in [0, 1]$. Тогда $\mathcal{D}(A_0^\alpha) = \mathcal{D}(A^\alpha)$ и

$$\begin{aligned} \|A^\alpha T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}} \xi\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1-\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^\alpha \|A_0^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}_R} \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(A_0^\alpha), \\ \|A_0^\alpha T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R} \xi\|_{\mathcal{H}_R} &\leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1-\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^\alpha \|A^\alpha \xi\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(A^\alpha). \end{aligned}$$

Доказательство. 1) Пусть $\xi \in \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} A) = \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A} T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}} \xi\|_{\mathcal{H}} &= \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2} (\mathcal{R}^{1/2} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} A \xi)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} A \xi\|_{\mathcal{H}_R} = \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|A_0 \xi\|_{\mathcal{H}_R}, \end{aligned}$$

а значит, формально $T_{\mathcal{H}_R \rightarrow \mathcal{H}} \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A)$. Из леммы 3, последней оценки и неравенства Гайнца (см. [19, гл. 1, § 7, теорема 7.1]) следует первая оценка в лемме.

2) Пусть $\xi \in \mathcal{D}(A)$. Тогда

$$\|A_0 T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R} \xi\|_{\mathcal{H}_R} = \|\mathcal{R}^{1/2} (\mathcal{R}^{-1} \mathcal{M} A \xi)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathcal{R}^{-1/2} \mathcal{M}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|A \xi\|_{\mathcal{H}},$$

а значит, формально $T_{\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_R} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_0)$. Из леммы 3, последней оценки и неравенства Гайнца следует вторая оценка в лемме. $\square$

Лемма 5. Пусть для любого $\tau > 0$ существуют $K_i = K_i(\tau) > 0$, $\kappa_i = \kappa_i(\tau) \in (0, 1]$ такие, что

$$\|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq K_i |t - s|^{\kappa_i} \quad \forall 0 \leq t, s \leq \tau, \quad i = 1, \dots, n.$$

Зафиксируем $3/4 < \alpha < 1$. Тогда для любого $r > 0$ существуют такие константы $C = C(r, \tau) > 0$ и $\kappa = \kappa(r, \tau) \in (0, 1]$, что

$$\|\mathcal{N}(t, \xi_1) - \mathcal{N}(s, \xi_1)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq C(|t - s|^{\kappa} + \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}})$$

при любых $0 \leq t, s \leq \tau$, $\|\mathcal{A}_0^{\alpha} \xi_i\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq r$ ($i = 1, 2$).

Доказательство. Фиксируем $3/4 < \alpha < 1$ и $r > 0$.

1) Пусть $\xi = (\mathbf{u}_1; \dots; \mathbf{u}_n)^{\top} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^{\alpha})$ такой, что $\|\mathcal{A}_0^{\alpha} \xi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq r$. Тогда

$$\|A^{\alpha} \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq r \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{1-\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Действительно, с учётом леммы 4 имеем оценки

$$\begin{aligned} r &\geq \|\mathcal{A}_0^{\alpha} \xi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \geq \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha} \|\mathcal{A}^{\alpha} \xi\|_{\mathcal{H}} = \\ &= \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|A^{\alpha} \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \geq \\ &\geq \|\mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{\alpha-1} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^{-\alpha} \|A^{\alpha} \mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

2) Пусть $\xi_i = (\mathbf{u}_1^{(i)}; \dots; \mathbf{u}_n^{(i)})^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^\alpha)$ такие, что $\|\mathcal{A}_0^\alpha \xi_i\|_{\mathcal{H}_R} \leq r$ ($i = 1, 2$).
С использованием (10) и предложения 2 оценим (см. (6))

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{S}(\xi_1) - \mathcal{S}(\xi_2)\|_{\mathcal{H}_R} = \\
& = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|P_0(\mathbf{u}_i^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^{(1)} - P_0(\mathbf{u}_i^{(2)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^{(2)}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leq \\
& \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|(\mathbf{u}_i^{(1)} \cdot \nabla)(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)}) + ((\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^{(2)}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leq \\
& \leq C_\alpha \left(\sum_{i=1}^n \left(\|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(1)}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \cdot \|A^{1/2}(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \cdot \|A^{1/2} \mathbf{u}_i^{(2)}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \leq C_\alpha \|A^{1/2-\alpha}\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(1)}\| + \|A^\alpha \mathbf{u}_i^{(2)}\| \right)^2 \|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\|^2} \leq \\
& \leq 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{1-\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^\alpha \|A^{1/2-\alpha}\| \sqrt{\sum_{i=1}^n \|A^\alpha(\mathbf{u}_i^{(1)} - \mathbf{u}_i^{(2)})\|^2} = \\
& = 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{1-\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^\alpha \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}} \leq \\
& = 2rC_\alpha \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}_0^\alpha(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_R}. \quad (11)
\end{aligned}$$

3) Учитывая, что $\|P_0\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}_2(\Omega))} = 1$, проведём оценку (см. (6))

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_R} \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} = \\
& = \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|P_0 \mathbf{f}_i(t) - P_0 \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leq \\
& \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}_i(t) - \mathbf{f}_i(s)\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}^2} \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 |t - s|^{2\kappa_i}} = \\
& = \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 |t - s|^{2(\kappa_i - \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j)} \cdot |t - s|^{\min_{j=1, \dots, n} \kappa_j}} \leq \\
& \leq \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j)} \cdot |t - s|^{\min_{j=1, \dots, n} \kappa_j}} \quad \forall 0 \leq t, s \leq \tau. \quad (12)
\end{aligned}$$

4) Из (11), (12) теперь найдём, что (см. (8))

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{N}(t, \xi_1) - \mathcal{N}(s, \xi_1)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} = \\
& = \|- \mathcal{S}(\xi_1) - \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B} \xi_1 + \mathcal{F}(t) + \mathcal{S}(\xi_2) + \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B} \xi_2 + \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq \\
& \leq \|\mathcal{S}(\xi_1) - \mathcal{S}(\xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \|\mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} \leq \\
& \leq 2rC_{\alpha} \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \\
& \quad + \|\mathcal{R}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \cdot \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \\
& \quad + \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j)}} \cdot |t - s|^{\min_{j=1, \dots, n} \kappa_j} \leq \\
& \leq 2rC_{\alpha} \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| \cdot \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \\
& \quad + \|\mathcal{R}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{A}_0^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{R}})} \cdot \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}} + \\
& \quad + \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j)}} \cdot |t - s|^{\min_{j=1, \dots, n} \kappa_j} \leq \\
& \leq C(|t - s|^{\kappa} + \|\mathcal{A}_0^{\alpha}(\xi_1 - \xi_2)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{R}}}),
\end{aligned}$$

где $\kappa = \kappa(r, \tau) := \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j(\tau) \in (0, 1]$, а

$$\begin{aligned}
C = C(r, \tau) := \max \Big\{ & 2rC_{\alpha} \|\mathcal{R}^{-1/2}\|^{2-2\alpha} \|\mathcal{M}^{-1} \mathcal{R}^{1/2}\|^{2\alpha} \|A^{1/2-\alpha}\| + \\
& + \|\mathcal{R}^{-1/2} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \|\mathcal{A}_0^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathcal{R}})}, \\
& \|\mathcal{R}^{1/2}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2 \tau^{2(\kappa_i - \min_{j=1, \dots, n} \kappa_j)}} \Big\} > 0.
\end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда начально-краевая задача (2) имеет единственное решение (в смысле определения 1) на некотором отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Условия $\mathbf{u}_i^0 \in \mathbf{W}_2^2(\Omega) \cap \mathbf{J}_0^1(\Omega)$ ($i = 1, \dots, n$) эквивалентны тому, что $\mathbf{u}_i^0 \in \mathcal{D}(A)$ ($i = 1, \dots, n$), как отмечено при введении оператора Стокса. Следовательно, $\xi^0 := (\mathbf{u}_1^0; \dots; \mathbf{u}_n^0)^{\top} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см. (6) и лемму 2).

Если поля $\mathbf{f}_i$ ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют локальному условию Гёльдера, то по лемме 5 нелинейный оператор $\mathcal{N}(t, \cdot)$ удовлетворяет (9).

Из предложения 1, учитывая $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, теперь следует, что задача (7) имеет единственное непрерывно дифференцируемое на $[0, T]$ решение при некотором $T > 0$. Это означает, что $\xi \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in [0, T]$ и $\mathcal{A}\xi \in C([0, T]; \mathcal{H})$, функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению из (7) при всех $t \in [0, T]$ и начальному условию. Последнее эквивалентно тому, что $\mathbf{u}_i \in C^1([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega))$ $\mathbf{u}_i(t) \in \mathcal{D}(A) \subset \mathbf{W}_2^2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$

и $A\mathbf{u}_i \in C([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega))$ ($i = 1, \dots, n$), поля $\mathbf{u}_i$ удовлетворяет уравнениям из (5) при всех $t \in [0, T]$ и при п.в. $\mathbf{x} \in \Omega$, и начальным условиям. Отсюда и из (4) теперь следует, что поля $\mathbf{u}_i$ и функции p_i ($i = 1, \dots, n$) есть решение начально-краевой задачи (2) в смысле определения 1. $\square$

4 Заключение

Для системы дифференциальных уравнений динамики смеси вязких несжимаемых жидкостей проведен анализ разрешимости в общем случае трёх пространственных переменных. Доказаны существование и единственность сильного по времени решения начально-краевой задачи, соответствующей течениям смеси в ограниченной области с условиями прилипания на границе области течения.

References

- [1] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of multiphase media*, Vol. 1, Nauka, Moscow, 1987.
- [2] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., **35**, World Sci. Publ., River Edge, 1995. MR1370661
- [3] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods Appl. Anal., **20**:2 (2013), 179–195. MR3119736
- [4] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of nonstationary equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izv. RAN. Ser. Math., **82**:1 (2018), 151–197. MR3749599
- [5] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *On a Stokes-like system for mixtures of fluids*, SIAM J. Math. Anal., **36**:4 (2005), 1259–1281. MR2139449
- [6] J. Frehse, S. Goj, J. Málek, *A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum*, Appl. Math., **50**:6 (2005), 527–541. MR2181024
- [7] J. Frehse, W. Weigant, *On quasi-stationary models of mixtures of compressible fluids*, Appl. Math., **53**:4 (2008), 319–345. MR2433725
- [8] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of polytropic motion of mixtures of viscous compressible fluids*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **13** (2016), 541–583. MR3528629
- [9] D.A. Zakora, *Spectral properties of the operator in the problem of oscillations in a mixture of viscous compressible fluids*, Differ. Equ., **59**:4 (2023), 473–490. MR4610471
- [10] D.A. Zakora, *The problem of small motions of a mixture of viscous compressible fluids*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **20**:2 (2023), 1552–1589. MR4700495
- [11] D.A. Zakora, *Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids*, J. Math. Sci. (N.Y.), **283**:2 (2024), 231–254. MR4607774
- [12] N.D. Kopachevsky, S.G. Kreĭn, Ngo Zuy Kan, *Operator methods in linear hydrodynamics*, Nauka, Moscow, 1989. MR1037258
- [13] N.D. Kopachevsky, S.G. Kreĭn, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Volume 1: Self-adjoint problems of an ideal fluid*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2001. MR2002951
- [14] P.E. Sobolevskii, *Equations of parabolic type in a Banach space*, Tr. Moskov. Mat. Obshch., **10** (1961), 297–350. MR0141900
- [15] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer, Berlin, 1981. MR0610244

- [16] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, New York, 1985. MR0790497
- [17] O.A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Nauka, Moscow, 1970. MR0254401
- [18] T. Kato, *Perturbation theory of linear operators*, Mir, Moscow, 1972. (1966 MR0203473)
- [19] S.G. Kreĭn, *Linear differential equations in a Banach space*, Nauka, Moscow, 1967. MR0247239

DMITRY ALEXANDROVICH ZAKORA
 VORONEZH STATE UNIVERSITY,
 1, UNIVERSITetskAYA PLOSHCHAD',
 394018, VORONEZH, RUSSIA
 Email address: dmitry.zkr@gmail.com

DMITRY ALEXEYEVICH PROKUDIN
 LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS OF THE SIBERIAN BRANCH OF THE
 RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
 15, PR. LAVRENT'eva,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 Email address: prokudin@hydro.nsc.ru