

СТЕПЕНИ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЧНЫХ  
ПОРЯДКОВД.О. ЕРШОВ , Б.Ш. КУЛПЕШОВ *Представлено С.В. СУДОПЛАТОВЫМ*

**Abstract:** In the present paper we study variations of rigidity degrees for partial orderings. A complete description of possible values of rigidity degrees for finite partial orderings was obtained. Also, a complete description of possible values of rigidity degrees for partial orderings consisting of infinitely many finite trivial connected components was obtained.

**Keywords:** partial ordering, connected component, definable closure, automorphism, rigidity degree, semantic rigidity, syntactic rigidity.

## 1 Введение

Вспомним, что *частичным порядком* на множестве называется бинарное отношение  $<$ , удовлетворяющее следующим условиям:

*Асимметрия*  $\forall x \forall y [x < y \rightarrow \neg(y < x)]$ ;

*Транзитивность*  $\forall x \forall y \forall z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$ .

Множество с отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством (структурой)* или просто *частичным порядком*.

---

YERSHOV D.O., KULPESHOV B.SH., RIGIDITY DEGREES FOR PARTIAL ORDERINGS.

© 2026 Ершов Д.О., Кулпешов Б.Ш..

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR31714735).

Поступила 28 июня 2026 г., опубликована 14 сентября 2026 г.

Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — произвольный частичный порядок. Линейно упорядоченное подмножество частичного порядка называется *цепью*. Попарно несравнимое подмножество частичного порядка называется *антицепью*. *Высотой*  $h(\mathcal{M})$  частичного порядка  $\mathcal{M}$  называется супремум длин цепей в  $\mathcal{M}$ . *Шириной*  $w(\mathcal{M})$  частичного порядка  $\mathcal{M}$  называется супремум мощностей антицепей.

Для любого частичного порядка  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , имеющего только конечные цепи, мы можем рассмотреть соответствующую графовую структуру  $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$ , где  $R(a, b)$  для любых  $a, b \in M$  тогда и только тогда, когда либо  $a$  является непосредственным предшественником элемента  $b$ , либо  $a$  является непосредственным последователем элемента  $b$  по отношению к частичному порядку  $<$ . Будем говорить, что подмножество  $A$  частичного порядка  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  является *связной компонентой*, если  $A$  является связной компонентой в  $\mathcal{M}_R = \langle M, R^2 \rangle$ .

Будем говорить, что связная компонента является *тривиальной*, если она является цепью. Будем говорить, что связная компонента является  *$n$ -компонентой*, если она является цепью длины  $n$ , т.е. состоит из  $n$  элементов, где  $1 \leq n < \omega$ . Будем называть 1-компоненту *синглетоном*.

Вспомним, что элемент  $a$  частичного порядка  $\mathcal{M}$  называется *минимальным*, если не существует элемента в  $\mathcal{M}$ , меньшего чем  $a$ . Также, элемент  $a$  частичного порядка  $\mathcal{M}$  называется *максимальным*, если не существует элемента в  $\mathcal{M}$ , большего чем  $a$ . Заметим, что любой синглетон частичного порядка является как максимальным, так и минимальным элементом данного порядка. Также, любой максимальный (минимальный) элемент нетривиальной связной компоненты частичного порядка не является минимальным (максимальным). Элемент частичного порядка  $\mathcal{M}$  называется *промежуточным*, если он не является ни максимальным, ни минимальным.

Будем говорить, что элемент  $a$  частичного порядка  $\mathcal{M}$  имеет *верхнюю степень* (*нижнюю степень*)  $t$  для некоторого  $t \in \omega$ , если существует в точности  $t$  элементов структуры  $\mathcal{M}$ , являющихся непосредственными последователями (предшественниками) элемента  $a$ . Если существует бесконечное число элементов структуры  $\mathcal{M}$ , являющихся непосредственными последователями (предшественниками) элемента  $a$ , то мы говорим, что  $a$  имеет бесконечную верхнюю степень (нижнюю степень). Очевидно, что  $a$  имеет верхнюю степень 0 и нижнюю степень 0 тогда и только тогда, когда  $a$  является синглетоном.

В настоящее время активно исследуются частично упорядоченные структуры. Так, в работах [1]–[4] исследовались обогашения теории плотного дерева встреч. В работе [5] исследовались подходящие понятия выпуклости и слабой о-минимальности для частично упорядоченных структур. В работе [6] были описаны сильно минимальные частичные порядки высоты два.

**Определение 1.** [7] Для множества  $A$  в структуре  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}$  называется *семантически  $A$ -жесткой*, если любой автоморфизм  $f \in \text{Aut}(\mathcal{M})$ , оставляющий множество  $A$  на месте, является тождественным. Структура  $\mathcal{M}$  называется *синтаксически  $A$ -жесткой*, если  $M = \text{dcl}(A)$ .

Очевидно, что если  $\mathcal{M}$  — произвольная структура, то  $\mathcal{M}$  является как семантически  $M$ -жесткой, так и синтаксически  $M$ -жесткой. Также,  $\mathcal{M}$  является синтаксически  $A$ -жесткой для любого  $A \subseteq M$  с условием  $M \setminus \text{dcl}(\emptyset) \subseteq A$ . Если  $\mathcal{M}$  — произвольная бесконечная линейно упорядоченная структура, то  $\mathcal{M}$  является семантически  $A$ -жесткой для любого коконечного  $A \subseteq M$ .

Структура  $\mathcal{M}$  называется  $\forall$ -семантически /  $\forall$ -синтаксически  $n$ -жесткой (соответственно,  $\exists$ -семантически /  $\exists$ -синтаксически  $n$ -жесткой), где  $n \in \omega$ , если  $\mathcal{M}$  является семантически / синтаксически  $A$ -жесткой для любого (некоторого)  $A \subseteq M$  с условием  $|A| = n$ .

Наименьшее число  $n$  такое, что  $\mathcal{M}$  является  $Q$ -семантически /  $Q$ -синтаксически  $n$ -жесткой, где  $Q \in \{\forall, \exists\}$ , называется  $Q$ -семантической /  $Q$ -синтаксической степенью жесткости, и обозначается через  $\deg_{\text{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M})$  и  $\deg_{\text{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M})$ , соответственно. Здесь если множество  $A$  производит значение  $Q$ -семантической /  $Q$ -синтаксической степени жесткости, то мы говорим, что  $A$  *подтверждает* эту степень. Если такого  $n$  не существует, то мы полагаем  $\deg_{\text{rig}}^{Q\text{-sem}}(\mathcal{M}) = \infty$  и  $\deg_{\text{rig}}^{Q\text{-synt}}(\mathcal{M}) = \infty$ , соответственно.

Как видим из определения 1 понятие семантической жесткости структуры зависит от ее автоморфизмов. Группы автоморфизмов различных структур изучались в многочисленных статьях. Например, в работах [8]–[9] изучались свойства групп автоморфизмов для арифметики Пеано.

Согласно [7] для произвольной структуры  $\mathcal{M}$  мы обозначаем через  $\deg_4(\mathcal{M})$  следующую четверку:

$$\left( \deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}), \deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}), \deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) \right).$$

**Предложение 1.** [7] Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольная структура. Тогда:

1.  $\deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M})$ .
2.  $\deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})$ .
3.  $\deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M})$ .
4.  $\deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) \leq \deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M})$ .
5.  $\deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-sem}}(\mathcal{M}) = 0$  iff  $\deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-sem}}(\mathcal{M}) = 0$ .
6.  $\deg_{\text{rig}}^{\forall\text{-synt}}(\mathcal{M}) = 0$  iff  $\deg_{\text{rig}}^{\exists\text{-synt}}(\mathcal{M}) = 0$ .

В работе [7] были введены понятия семантической и синтаксической жесткости и получены первоначальные результаты. В работе [10] описаны возможные значения степеней жесткости для линейных порядков. В работе [11] исследованы степени жесткости для моделей слабо  $\omega$ -минимальных теорий. В работе [12] исследованы степени жесткости

для абелевых групп. В работах [13]–[14] исследованы степени жесткости для унарков. В настоящей работе исследуются возможные значения степеней жесткости для частичных порядков. В Разделе 2 описываются возможные значения для конечных частичных порядков (Теорема 1). В Разделе 3 описываются возможные значения для частичных порядков, состоящих из бесконечного числа конечных тривиальных связных компонент (Теорема 2).

## 2 Конечные порядки

**Факт 1.** Любой конечный линейный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  имеет  $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$ .

Замечаем, что в случае произвольного конечного частичного порядка мы имеем более широкую вариацию степеней жесткости.

**Лемма 1.** Для каждого натурального  $m \geq 0$  существует конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m, m, m, m)$ .

*Доказательство.* Возьмем произвольный  $m \geq 0$  и рассмотрим конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из  $m + 1$  синглетонов. Очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m, m, m, m)$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — произвольный конечный частичный порядок высоты два, имеющий наименьший элемент. Тогда только следующие значения степеней жесткости являются возможными:

- (1)  $(0, 0, 0, 0)$ ;
- (2)  $(m, m, m + 1, m + 1)$ , где  $m \geq 1$ .

*Доказательство.* Конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  высоты два, имеющий наименьший элемент и состоящий из  $m + 1$  элементов для некоторого  $m \geq 1$ , имеет следующий вид (Рис. 1):

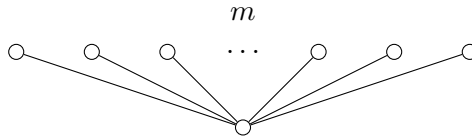


Рисунок 1.

Если  $m = 1$ , то  $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$ . Если же  $m > 1$ , то очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m - 1, m - 1, m, m)$ .  $\square$

**Предложение 2.** Для любых натуральных чисел  $m, k$  с условием  $1 \leq m \leq k$  существует конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m, m, k, k)$ .

*Доказательство.* Случай  $m = 1$ . В силу леммы 1 существует конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (1, 1, 1, 1)$ .

Далее рассмотрим следующий конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из  $m + 2$  элементов для некоторого  $m \geq 1$  (Рис. 2):

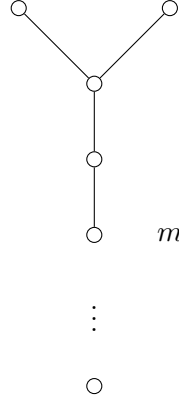


Рисунок 2.

Структура  $\mathcal{M}$  является связной компонентой:  $m$  элементов образуют цепь, максимальный элемент этой цепи имеет в точности два несравнимых между собой непосредственных последователя, которые в свою очередь являются максимальными элементами данной структуры. Тогда очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (1, 1, m + 1, m + 1)$ .

*Случай  $m > 1$ .* Также в силу леммы 1 существует конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m, m, m, m)$ .

Рассмотрим теперь конечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из  $k + 1$  элементов для некоторого  $k \geq m + 2$ : структура  $\mathcal{M}$  состоит из  $m + 1$  синглтона и цепи длины  $k - m$ . Тогда очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (m, m, k, k)$ .  $\square$

**Предложение 3.** [13] Пусть  $\mathcal{M}$  — произвольная конечная структура конечного языка. Тогда  $\deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) = \deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M})$ , где  $Q \in \{\forall, \exists\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — произвольный конечный частичный порядок. Тогда только следующие значения для степеней жесткости являются возможными:

- (1)  $(0, 0, 0, 0)$ ;
- (2)  $(m, m, k, k)$ , где  $1 \leq m \leq k < \omega$ .

*Доказательство.* Поскольку основное множество структуры  $\mathcal{M}$  конечно, то очевидно, что  $\deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) \leq |M| - 1$  и  $\deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M}) \leq |M| - 1$  для любого  $Q \in \{\forall, \exists\}$ .

Из леммы 1 и предложения 2 следует, что существуют конечные частичные порядки с данными значениями степеней жесткости.

В силу предложения 3 других значений степеней жесткости нет.  $\square$

**Предложение 4.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — произвольный конечный частичный порядок, имеющий  $\deg_4(\mathcal{M}) = (n, n, n, n)$  для некоторого  $n \geq 1$ .

1. Тогда имеет место следующее:

- (1)  $\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) = M$  для любых  $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ ;
- (2)  $\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  для любых  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ , где  $1 \leq k < n$ ;
- (3)  $\text{dcl}(\emptyset) = \emptyset$ .

*Доказательство.* (1) выполняется в силу определения  $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M})$ .

(2) Поймем вначале, что

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$$

для любых  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in M$ . Допустим противное: существуют  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in M$  такие, что

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}) \neq \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}.$$

Тогда существует  $b \in M$  такой, что  $b \neq a_i$  для любого  $1 \leq i \leq n-1$  и  $b \in \text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\})$ . Откуда получаем, что

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b\}) = \text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}).$$

Но по свойству (1) имеем, что  $\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b\}) = M$ , откуда  $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) \leq n-1$ . Противоречие.

Предположим, что мы уже установили следующее:

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_k\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

для любых  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ , где  $m+1 \leq k \leq n-1$ . Докажем это утверждение для  $k = m$ . Допустим противное: существуют  $a_1, a_2, \dots, a_m \in M$  такие, что

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m\}) \neq \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Тогда существует  $b \in M$  такой, что  $b \neq a_i$  для любого  $1 \leq i \leq m$  и  $b \in \text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m\})$ . По ранее доказанному  $\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m, b\}) \neq M$ , откуда существует  $c \in M$  такой, что  $c \notin \text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m, b\})$ . По ранее доказанному

$$\text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m, c\}) = \{a_1, a_2, \dots, a_m, c\},$$

но  $b \in \text{dcl}(\{a_1, a_2, \dots, a_m\})$ . Приходим к противоречию.

(3) Допустим противное:  $\text{dcl}(\emptyset) \neq \emptyset$ . Следовательно, существует  $a \in M$  такой, что  $a \in \text{dcl}(\emptyset)$ . По условию  $\text{dcl}(\emptyset) \neq M$ . Тогда очевидно, что  $|\text{dcl}(\emptyset)| < |M| - 1$ , откуда существует  $b \in M$  такой, что  $b \notin \text{dcl}(\emptyset)$ . Но тогда  $|\text{dcl}(\{b\})| > 1$ .  $\square$

**Пример 1.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — конечный связный частичный порядок, состоящий из двух максимальных, двух промежуточных и двух минимальных элементов (Рис. 3).

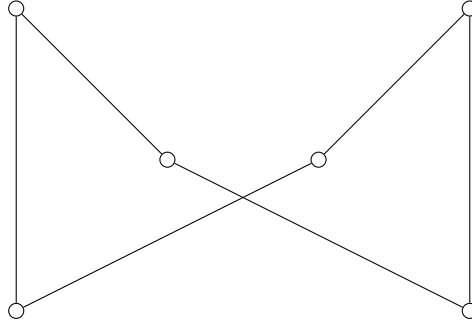


Рисунок 3.

Замечаем, что  $\text{dcl}(\emptyset) = \emptyset$  и  $\text{dcl}(\{a\}) = M$  для любого  $a \in M$ . Очевидно, что  $h(\mathcal{M}) = 3$  и  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (1, 1, 1, 1)$ .

### 3 Бесконечные порядки

Рассмотрим бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из двух связных компонент: одной цепи  $\omega$  и одного синглтона. Очевидно, что  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$ . Если рассмотрим бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из бесконечного числа связных компонент: счетного числа попарно несравнимых копий цепи  $\omega$ , то очевидно, что  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ .

**Лемма 3.** Для каждого натурального  $t \geq 1$  существует бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (t, t, \infty, \infty)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из одной цепи  $\omega$  и  $t + 1$  синглтона для некоторого  $t \geq 0$ . Тогда очевидно, что  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (t, t, \infty, \infty)$ .  $\square$

**Предложение 5.** Для каждого натурального  $t \geq 1$  существует бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  такой, что  $\text{deg}_4(\mathcal{M}) = (1, 1, t, t)$ .

*Доказательство.* Для  $t = 1$  рассмотрим бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , являющийся связной компонентой высоты 3, имеющий бесконечное число максимальных, бесконечное число минимальных и бесконечное число промежуточных элементов; при этом каждый максимальный элемент имеет два несравнимых между собой непосредственных предшественника: один является минимальным элементом, а второй – промежуточным элементом; аналогично каждый минимальный элемент имеет два несравнимых между собой непосредственных последователя: один является максимальным элементом, а второй – промежуточным элементом; каждый промежуточный элемент имеет верхнюю степень 1 и нижнюю степень 1 (Рис. 4). Нетрудно установить, что  $\text{dcl}(\emptyset) = \emptyset$  и  $\text{dcl}(\{a\}) = M$  для любого  $a \in M$ . Примером нетождественного автоморфизма является отображение, переводящее произвольный

минимальный (максимальный, промежуточный) элемент в любой другой минимальный (максимальный, промежуточный) элемент. Таким образом,  $\deg_4(\mathcal{M}) = (1, 1, 1, 1)$ .

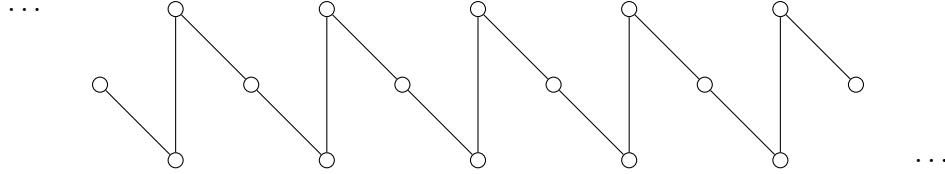


Рисунок 4.

Пусть теперь  $t > 1$ . Рассмотрим бесконечный частичный порядок  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$ , состоящий из одной цепи  $\mathbb{Z}$  и одной конечной цепи из  $t - 1$  элементов. Тогда очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (1, 1, t, t)$ .  $\square$

Таким образом, установлено следующее предложение:

**Предложение 6.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — бесконечный счетный частичный порядок, не являющийся линейным. Тогда следующие значения степеней жесткости являются возможными для  $\deg_4(\mathcal{M})$ :

- (1)  $(0, 0, 0, 0)$ ;
- (2)  $(1, 1, t, t)$ , где  $t \geq 1$ ;
- (3)  $(t, t, \infty, \infty)$ , где  $t \geq 1$ ;
- (4)  $(\infty, \infty, \infty, \infty)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{M} = \langle M, < \rangle$  — частичный порядок, состоящий из бесконечного числа конечных тривиальных связных компонент. Тогда только следующие значения являются возможными для  $\deg_4(\mathcal{M})$ :

- (1)  $(0, 0, 0, 0)$ ;
- (2)  $(t, t, \infty, \infty)$ , где  $t \geq 1$ ;
- (3)  $(\infty, \infty, \infty, \infty)$ .

*Доказательство.* Случай (1) обеспечивается бесконечным частичным порядком, где для каждого  $n \geq 1$  существует единственная  $n$ -компонента. Случай (2) обеспечивается бесконечным частичным порядком, содержащем в точности  $t + 1$  синглтонов для некоторого  $t \geq 1$ , и для каждого  $n \geq 2$  существует единственная  $n$ -компонента. Случай (3) обеспечивается бесконечным частичным порядком, состоящим из бесконечного числа синглтонов. Поймем, что других значений нет.

Если  $\text{dcl}(\emptyset) = M$ , то очевидно, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (0, 0, 0, 0)$ . Поэтому далее предположим, что  $\text{dcl}(\emptyset) \neq M$ . В этом случае существует хотя бы две связные компоненты  $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{M}$ , изоморфные между собой.

Если  $\mathcal{M}$  содержит бесконечное число связных компонент, попарно изоморфных между собой, или  $\mathcal{M}$  содержит бесконечное число попарно неизоморфных связных компонент, имеющих в  $\mathcal{M}$  хотя бы одну изоморфную копию, то  $\deg_4(\mathcal{M}) = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ .

Поэтому далее предположим, что не существует связной компоненты, имеющей бесконечное число изоморфных копий в  $\mathcal{M}$ , и существует лишь конечное число попарно неизоморфных связных компонент  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$  в  $\mathcal{M}$ , имеющих хотя бы одну изоморфную копию в  $\mathcal{M}$ . Для определенности, предположим, что для каждого  $1 \leq i \leq n$  существует в точности  $m_i$  изоморфных копий связной компоненты  $\mathcal{B}_i$  для некоторого  $m_i \geq 1$ . Тогда утверждаем, что  $\deg_4(\mathcal{M}) = (\sum_{i=1}^n m_i, \sum_{i=1}^n m_i, \infty, \infty)$ .  $\square$

## References

- [1] A.B. Dauletiyarova, *On distributions of countable models for constant expansions of the dense meet-tree theory. I*, Herald of the Kazakh-British Technical University, **19**:4 (2022), 27–33.
- [2] R. Mennuni, *Weakly binary expansions of dense meet-trees*, Mathematical Logic Quarterly, **68**:1 (2022), 32–47.
- [3] A.B. Dauletiyarova, V.V. Verbovskiy, *On the number of countable models of constant and unary predicates expansions of the dense meet-tree theory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 755–770.
- [4] V.V. Verbovskiy, A.B. Dauletiyarova, *Examples of o-minimal expansions of the dense meet tree*, Herald of the Kazakh-British Technical University, **22**:2 (2025), 260–266.
- [5] S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, *On the concepts of convexity and weak o-minimality for partially ordered structures*, Herald of the Kazakh-British Technical University, **21**:1 (2024), 75–84.
- [6] B.Sh. Kulpeshov, Ye.K. Netaliyeva, *Strongly minimal partial orderings of height two*, Herald of the Kazakh-British Technical University, **22**:1 (2025), 223–228.
- [7] S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **47** (2024), 119–136.
- [8] E.S. Nurkhaidarov, J.H. Schmerl, *Automorphism groups of saturated models of Peano Arithmetic*, Journal of Symbolic Logic, **79**:2 (2014), 561–584.
- [9] E.S. Nurkhaidarov, E. Shochat, *Closed normal subgroups of the automorphism group of a saturated model of Peano Arithmetic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **57**:1 (2016), 127–139.
- [10] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for ordered theories*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **48** (2024), 129–144.
- [11] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**:11 (2024), 5837–5844.
- [12] In.I. Pavlyuk, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for abelian groups*, Mathematics and Statistics, **12**:2 (2024), 204–210.
- [13] I.A. Sakharov, A.A. Stepanova, *Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **23**:1 (2026), 517–531.
- [14] I.A. Sakharov, A.A. Stepanova, *Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars 2*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **23**:2 (2026), 749–755.

DMITRIY OLEGOVICH YERSHOV  
 KAZAKH-BRITISH TECHNICAL UNIVERSITY,  
 TOLE BI STR., 59,  
 050000, ALMATY, KAZAKHSTAN  
 Email address: [dmitryyershov59@gmail.com](mailto:dmitryyershov59@gmail.com)

BEIBUT SHAIYKOVICH KULPESHOV  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING,  
SHEVCHENKO STR., 28,  
050010, ALMATY, KAZAKHSTAN  
KAZAKH-BRITISH TECHNICAL UNIVERSITY,  
TOLE BI STR., 59,  
050000, ALMATY, KAZAKHSTAN  
*Email address:* [b.kulpeshov@kbtu.kz](mailto:b.kulpeshov@kbtu.kz)