

СЕМАНТИЧЕСКИЕ И СИНТАКСИЧЕСКИЕ
СТЕПЕНИ ЖЕСТКОСТИ УНАРОВ 2И.А. САХАРОВ, А.А. СТЕПАНОВА *Представлено С.В. Судоплатовым*

Abstract: A structure with trivial group of automorphisms is called rigid. The closeness of a structure to rigid one is described using the concept of semantic rigidity. The similar concept of syntactic rigidity of a structure measures the closeness of a given structure to a structure that is the definable closure of an empty set.

In this paper we study all possible values of quadruples of unar rigidity. This paper is a continuation of the paper, which described all possible pairs of $\exists$ -syntactic and $\exists$ -semantic rigidity of unars, as well as $\forall$ -syntactic and $\forall$ -semantic rigidity of unars.

Keywords: semantic rigidity, syntactic rigidity, degree of rigidity, unar.

Введение

Структура с тривиальной группой автоморфизмов называется жесткой. Близость структуры к жесткой описывается с помощью понятия семантической жесткости, которое было рассмотрено в работах [1, 2, 3].

SAKHAROV, I.A., STEPANOVA, A.A. SEMANTIC AND SYNTACTIC DEGREES OF RIGIDITY OF UNARS 2.

© 2026 САХАРОВ И.А., СТЕПАНОВА А.А..

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА ПРИ ПОДДЕРЖКЕ МИНИСТЕРСТВА НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ (СОГЛАШЕНИЕ № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026).

Поступила 29 марта 2026 г., опубликована 14 сентября 2026 г.

В этих же работах изучается понятие синтаксической жесткости структуры, которое показывает близость данной структуры к структуре, являющейся определяемым замыканием пустого множества.

В данной работе рассмотрены все возможные четверки степеней жесткостей унарных. Эта работа является продолжением работы [4], в которой описаны все возможные пары $\exists$ -синтаксической и $\exists$ -семантической жесткости унарных, а также $\forall$ -синтаксической и $\forall$ -семантической жесткости унарных.

1 Предварительные сведения

Используемые в работе понятия из теории унарных и теории моделей можно найти в работах [4]. Для структуры $\mathcal{M}$ введём обозначение (см. [1]):

$$\deg_4(\mathcal{M}) = \left(\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}), \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}), \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}), \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) \right).$$

Предложение 1. [1] Для любой структуры $\mathcal{M}$ и любого $Q \in \{\forall, \exists\}$

$$\deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) \leq \deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M}).$$

Предложение 2. [1] Для любой структуры $\mathcal{M}$ и любого $s \in \{sem, synt\}$

$$\deg_{rig}^{\exists-s}(\mathcal{M}) \leq \deg_{rig}^{\forall-s}(\mathcal{M}).$$

Предложение 3. [4, 5] Если $\mathcal{M}$ — конечная структура конечного языка, то $\deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) = \deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M})$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 4. Для структуры $\mathcal{M}$

$$1) \deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}) = 0 \iff \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}) = 0;$$

$$2) \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}) = 1 \implies \deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}) = 1;$$

$$3) \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) = 0 \iff \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) = 0;$$

$$4) \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) = 1 \implies \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) = 1.$$

Предложение 5. [4] Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар, $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq 0$, $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Тогда $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})$.

Предложение 6. [4] Если унар $\mathcal{A}$ связный и содержит полуцепь, то

$$\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0, 1, \infty\}.$$

Предложение 7. [4] Если унар $\mathcal{A}$ является копроизведением двух бесконечных унарных, то $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0, 1, \infty\}$. Причем если $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$ ($\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = 1$), то $\mathcal{A}$ — копроизведение двух изоморфных связных унарных $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ таких, что $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$ ($\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_2) = 0$).

Теорема 1. [4]

- 1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ существуют унары $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, \mathcal{C}_u$ такие, что $\deg_2^\forall(\mathcal{A}_u) = (u, u)$, $\deg_2^\forall(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$ и $\deg_2^\forall(\mathcal{C}_u) = (0, u)$.
 2) Для любого унара $\mathcal{A}$ выполняется свойство (*):

$$\deg_2^\forall(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

2 Основной результат

Лемма 1. Если $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар и $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \in \omega \setminus \{0\}$, то $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$, причём если $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A})$, то $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$; если $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$, то $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = \infty$ или $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 2n$ для некоторого $n \in \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар и $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \geq 1$. Следующие рассуждения частично повторяют рассуждения, приведённые в доказательстве леммы 1 из [4]. Для элементов унара $\mathcal{A}$ введём отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \varphi \in \text{Aut}(\mathcal{A}): \varphi(a) = b.$$

Рассмотрим три случая.

1. Существуют $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, a \sim b, fa = fb$. Введём обозначения: $\langle c \rangle_- = \{c' \in \mathcal{A} \mid \exists n \in \omega : f^n c' = c\}$, где $c \in \mathcal{A}$, $E_{a,b} = \mathcal{A} \setminus (\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-)$ и $E = \{E_{a,b} \mid a, b \in \mathcal{A}, a \sim b, a \neq b, fa = fb\}$. Зафиксируем $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $|E_{a,b}| = \max\{|E_{c,d}| \mid E_{c,d} \in E\}$. Нетрудно понять, что $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = |E_{a,b}| + 1$. Множество $E_{a,b}$ конечно, поскольку $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Следовательно, множество $\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-$ бесконечно. Из выбора элементов a, b следует, что в $E_{a,b}$ нет различных элементов c, d таких, что $fc = fd$ и $c \sim d$. Ясно, что существует единственный нетривиальный автоморфизм унара $\mathcal{A}$, а именно, автоморфизм, переводящий a в b , т.е. $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Заметим, что все элементы из $E_{a,b}$ лежат в $dcl(\emptyset)$. Если $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$, то $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$. Предположим, что $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$. Рассмотрим частичный подунар $\langle a \rangle_-$. Доопределим действие операции f на нём следующим образом: $fa = a$. Полученный унар обозначим $\bar{\mathcal{A}}$. Если $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\bar{\mathcal{A}}) = \infty$, то $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = \infty$; если $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\bar{\mathcal{A}}) = v \in \omega$, то $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 2v$.

2. Существуют $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, a \sim b, fa \neq fb, fa, fb \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — цикл в $\mathcal{A}$. Этот случай аналогичен случаю 1.

3. Предположим, что случаи 1, 2 не выполняются и существуют $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $a \neq b, a \sim b, f^n a = f^m b$ для некоторых различных $n, m \in \omega$. Тогда в $\mathcal{A}$ есть цепь $\mathcal{C}$. По предложению 6 $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Тогда по

предложению 4 $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Ясно, что $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Следовательно, в силу предложений 6 и 2 $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = 1$ и по предложению 4 $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$. $\square$

Лемма 2. Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $\deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, v)$, $v \in \omega$, то существует $u \leq v$ такое, что $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, u)$.

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ конечный, то по предложению 3 $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{A}$ бесконечный связный. Можно считать, что $v > 0$. Тогда по лемме 1 $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$. Предположим, что $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — бесконечные унары. По лемме 7 $v \in \{0, 1, \infty\}$. По условию $v \neq \infty$. Тогда $v \in \{0, 1\}$ и по предложению 4 $u = v$. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ конечный, $\mathcal{A}_2$ бесконечный. Можно считать, что $\mathcal{A}_2$ — бесконечный связный унар. Тогда по доказанному выше $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}_2) = \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2)$. Следовательно, по предложению 3 $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A})$. $\square$

Лемма 3. Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $\deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (0, v)$, $v \geq 1$, то $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, 1)$.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, u)$, $u \leq v$.

Предположим, что $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар. Если в $\mathcal{A}$ есть полуцепь, то в силу предложений 6, 4 $v = 1$ и $u = 1$. Покажем, что в унаре $\mathcal{A}$ нет цикла. Пусть C — цикл в $\mathcal{A}$. Поскольку $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 0$, все элементы C формульные. Индукцией по $k \in \omega$ покажем, что любой элемент $\mathcal{A}$ глубины k является формульным. Пусть $t(b) = k$ и b — формульный элемент. Если у b число прообразов конечно, то, поскольку $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 0$, все эти прообразы формульные. Предположим, что число прообразов b бесконечно и $c_1, c_2, \dots$ — различные прообразы b . Тогда существует формула $\Phi(x, y_1, \dots, y_v)$, такая, что $\Phi(A, c_1, \dots, c_v) = \{c_{v+1}\}$. Пусть формула $\Psi(x, z)$ получается из формулы $\Phi(x, y_1, \dots, y_v)$ заменой термов fy_i на z и подформул $f^n u = f^m y_i$ на $f^{n+1} u = f^m z$. Ясно, что $\{c_{v+1}\} = \Psi(A, b)$. Следовательно, $v = 0$. Получаем противоречие.

Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ бесконечные, то по предложению 7 $v = 1$. Тогда по предложению 4 $u = 1$. Пусть $\mathcal{A}_1$ бесконечный связный, а $\mathcal{A}_2$ конечный. По доказанному выше $\deg_4(\mathcal{A}_1) = (0, 1, 0, 1)$. По предложению 3 $\deg_4(\mathcal{A}_2) = (0, 0, 0, 0)$. Тогда $\deg_4(\mathcal{A}) = (0, 1, 0, 1 + |\mathcal{A}_2|)$, то есть $u = 1$. $\square$

Лемма 4. Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $\deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, \infty)$, $v \geq 1$, то $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (1, k)$, где k — положительное четное число или $k = \infty$.

Доказательство. Пусть $\deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, \infty)$, $v \geq 1$ и $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u_1, u_2)$. По предложению 3 $\mathcal{A}$ — бесконечный унар.

Предположим, что $\mathcal{A}$ связный. Тогда по лемме 1 и предложению 4 u_2 — положительное четное число или $u_2 = \infty$, а $u_1 = 1$.

Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ бесконечные. Тогда по предложению 7 $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ изоморфные и $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_1) = \deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_2) = 0$. По предложению 4 $u_1 = 1$. Заметим, что так как $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$, то $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_1) = \deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_2) \neq 0$. По предложению 4 $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1) = \deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2) > 0$. Тогда $u_2 = 2\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1)$, если $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1) \neq \infty$, и $u_2 = \infty$, если $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1) = \infty$.

Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$ бесконечный, $\mathcal{A}_2$ конечный. Можно считать, что $\mathcal{A}_1$ связный. Так как $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = v \in \omega$, то $\deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_2) = 0$ и по предложению 3 $\deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_2) = 0$. Следовательно, $\deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}_2) = 0$ и $\deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2) = 0$. Тогда $\deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_1) = (v, \infty)$ и по доказанному выше $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_1) = (1, k)$, где k — положительное четное число или $k = \infty$. Ясно, что $\deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = \deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_1)$. $\square$

Построим несколько унаров и семейств унаров, которые понадобятся для доказательства основного результата.

Определим семейство унаров $\mathcal{P}_i$ ($i \in \omega \cup \{\infty\}$). В унаре $\mathcal{P}_0$ существуют различные элементы $c, a \in \mathcal{P}_0$, удовлетворяющие условиям: $fc = c, fa = c$, для любого $i \in \omega$ элемент a имеет ровно один хвост длины i , и, кроме того, a имеет один бесконечный хвост; других элементов в $\mathcal{P}_0$ нет. Унар $\mathcal{P}'_i$, $i \in \omega \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ получается из унара $\mathcal{P}_0$ добавлением хвоста длины i к элементу c , если $i \in \omega$, или бесконечного хвоста, если $i = \infty$. Полагаем $\mathcal{P}_i = \prod_{j \leq i} \mathcal{P}'_j$.

Определим семейство унаров $\mathcal{Q}_i$ ($i \in \omega \cup \{\infty\}$) следующим образом: в унаре $\mathcal{Q}_i$ есть петля, которая имеет $i + 1$ хвост длины 1, если $i \in \omega$, или ω хвостов длины 1, если $i = \infty$; других элементов в $\mathcal{Q}_i$ нет.

Определим семейство унаров $\mathcal{R}_i$ ($i \in \omega \cup \{\infty\}$) следующим образом: $\mathcal{R}_0$ — петля, при $i \in \omega$ унар $\mathcal{R}_i$ — петля с единственным хвостом длины i , унар $\mathcal{R}_\infty$ — петля с единственным бесконечным хвостом.

Определим семейство унаров $\mathcal{S}_{i,j}$ ($i, j \in \omega \cup \{\infty\}, i \leq j$) следующим образом: $\mathcal{S}_{i,j} = \mathcal{Q}_i \sqcup \mathcal{P}_{j-i}$.

Определим семейство унаров $\mathcal{T}_i$ ($i \in \omega \cup \{\infty\}$). Полагаем $\mathcal{T}_0 = \mathcal{P}_0$ и $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_0$. Для $u \in \omega, u \geq 2$, унар $\mathcal{T}'_u$ определим следующим образом: $\mathcal{T}'_u = \{c_i \mid 0 \leq i \leq u - 2\} \cup \{a_1, a_2\}$, $fc_0 = c_0, fc_i = fc_{i-1}$ при $i > 0$, $fa_1 = fa_2 = c_{u-2}, |\mathcal{T}'_u| = u + 1$. Унар $\mathcal{T}_u$ получается из унара $\mathcal{T}'_u$ добавлением к элементам a_1, a_2 ровно по одному хвосту длины l для любого $l \in \omega$ и одному бесконечному хвосту.

Определим семейство унаров $\mathcal{U}_i$ ($i \in \omega \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$). Сначала определим частичные унары $\mathcal{V}_n$ и элементы $v_n \in \mathcal{V}_n$, $n \in \omega$, так, что f определена на множестве $\mathcal{V}_n \setminus \{v_n\}$. Пусть

$$\mathcal{V}_0 = \{v_0, s_1^0\},$$

где $fs_1^0 = v_0$. Предположим, что частичный унар $\mathcal{V}_{n-1}$ и элемент v_{n-1} определены, $\mathcal{V}_{n-1}^1$ — копия $\mathcal{V}_{n-1}$, элемент $v_{n-1}^1 \in \mathcal{V}_{n-1}^1$ — копия $v_{n-1} \in$

$\mathcal{V}_{n-1}$. Частичный унар $\mathcal{V}_n$ определяем следующим образом:

$$\mathcal{V}_n = \{v_n, s_1^n, s_2^n, \dots, s_n^n\} \cup \mathcal{V}_{n-1} \cup \mathcal{V}_{n-1}^1,$$

$fs_1^n = v_n, fs_i^n = s_{i-1}^n$ ($2 \leq i \leq n$), $fv_{n-1} = v_n, fv_{n-1}^1 = s_n^n$. Полагаем

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n.$$

Ясно, что $\mathcal{V}$ — унар. Полагаем $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{U}_2$ — копроизведение $\mathcal{V}$ и петли, $\mathcal{U}_i = \mathcal{V} \amalg \mathcal{R}_{i-2}$ для $i \geq 3$.

Определим семейство унаров $\mathcal{W}_{i,j}$ ($i \in \omega \cup \{\infty\}, j \in \omega \setminus \{0\}$). Пусть $\mathcal{W}_{0,j} = \mathcal{T}_j$. Для $i > 0$ положим w_k^1, w_k^2 — различные листья унара $\mathcal{T}_j$, $1 \leq k \leq i$, такие, что $f^k w_k^1 = a_1, f^k w_k^2 = a_2$. Тогда $\mathcal{W}_{i,j}$ получается из $\mathcal{T}_j$ добавлением ко всем w_k^1, w_k^2 по одному хвосту длины l для всех $l \in \omega$ и по одному бесконечному хвосту.

Теорема 2. *Определим множество $D_4 \subset (\omega \cup \{\infty\})^4$ следующим образом:*

$$\begin{aligned} D_4 = & \{(u_1, u_1, v_1, v_1) \mid u_1, v_1 \in \omega, u_1 \leq v_1\} \cup \\ & \cup \{(u_1, u_2, \infty, \infty) \mid u_1, u_2 \in \omega \cup \{\infty\}, u_1 \leq u_2\} \cup \\ & \cup \{(1, u_2, v_1, \infty) \mid u_2 \text{ — положительное четное число}, v_1 \in \omega \setminus \{0\}\} \cup \\ & \cup \{(0, u_2, 0, \infty) \mid u_2 \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \\ & \cup \{(0, 1, 0, v_2) \mid v_2 \in \omega \setminus \{0\}\}. \end{aligned}$$

Тогда

- 1) для любого $d_4 \in D_4$ существует унар $\mathcal{A}$ такой, что $\deg_4(\mathcal{A}) = d_4$;
- 2) для любого унара $\mathcal{A}$ $\deg_4(\mathcal{A}) \in D_4$.

Доказательство.

1) Пусть $d_4 \in \{(u_1, u_1, v_1, v_1) \mid u_1, v_1 \in \omega, u_1 \leq v_1\}$. Если $u_1 = v_1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $u_1 + 1$ петли. Рассмотрим случаи, когда $u_1 < v_1$. Если $u_1 = 0, v_1 = 1$, то $\mathcal{A} = \mathcal{V}$; если $u_1 = 0, v_1 > 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $\mathcal{V}$ и петли с единственным хвостом длины $v_1 - 1$. Если $u_1 \geq 1, v_1 = u_1 + 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём петлю с $u_1 + 1$ хвостом длины 1; если $v_1 = u_1 + k$, где $k > 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $u_1 + 1$ петли и петли с хвостом длины $k - 1$.

Пусть $d_4 \in \{(u_1, u_2, \infty, \infty) \mid u_1, u_2 \in \omega \cup \{\infty\}, u_1 \leq u_2\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{S}_{u_1, u_2}$.

Пусть $d_4 \in \{(1, u_2, v_1, \infty) \mid u_2 \text{ — положительное четное число}, v_1 \in \omega \setminus \{0\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{W}_{(u_2-2)/2, v_1}$.

Пусть $d_4 \in \{(0, u_2, 0, \infty) \mid u_2 \in \omega \cup \{\infty\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{P}_{u_2}$.

Пусть $d_4 \in \{(0, 1, 0, v_2) \mid v_2 \in \omega \setminus \{0\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{U}_{v_2}$.

- 2) По теореме 1

$$\deg_2^\forall(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Если $\deg_2^\forall(\mathcal{A}) = (u, u)$, $u \in \omega$, то по лемме 2 $\deg_2^\exists(\mathcal{A}) = (v, v)$, $v \leq u$.

Пусть $\deg_2^\forall(\mathcal{A}) = (u, \infty)$, $u \in \omega$. Если $u \neq 0$, то по лемме 4 $\deg_2^\exists(\mathcal{A}) = (1, v)$, v — положительное четное число или $v = \infty$; если $u = 0$, то в силу предложений 1, 2 $\deg_2^\exists(\mathcal{A}) = (0, v)$, $v \in \omega \cup \{\infty\}$.

Пусть $\deg_2^\forall(\mathcal{A}) = (0, u)$, $u \in \omega \cup \{\infty\}$. Если $u \in \omega \setminus \{0\}$, то по лемме 3 $\deg_2^\exists(\mathcal{A}) = (0, 1)$. Случаи, когда $u \in \{0, \infty\}$, рассмотрены выше. $\square$

Список литературы

- [1] S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity*, The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, **47** (2024), 119–136.
- [2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity for Ordered Theories*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **48** (2024), 129–144.
- [3] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**:11 (2024), 5837–5844.
- [4] I.A. Sakharov, A.A. Stepanova, *Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **23**:1 (2026), 517–531.
- [5] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Almost quasi-Urbanik structures and theories*, Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series, **117**:1 (2025), 104–117.

IGOR ALEKSANDROVICH SAKHAROV
 FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 10 AJAX BAY, RUSSKY ISLAND,
 690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA
 Email address: sakharov.ial@dvfu.ru

ALENA ANDREEVNA STEPANOVA
 FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 10 AJAX BAY, RUSSKY ISLAND,
 690922, VLADIVOSTOK, RUSSIA
 Email address: stepltd@mail.ru