S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 1, стр. 484–498 (2026) УДК 510.57
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.030 MSC 03D30, 03D45

HKSS–ПОЛНОТА КЛАССА БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ВЫДЕЛЕННЫМИ ПОДАЛГЕБРАМИ И АТОМАМИ

В.С. Исаков

Представлено С.В. Судоплатовым

Abstract: This paper contributes to the research program of Khoussainov and Kowalski who started systematic investigations of the following problem: how does expanding the language of Boolean algebras affect their computability-theoretic properties. Following the approach of Hirschfeldt, Khoussainov, Shore, and Slinko, we prove that the class of Boolean algebras with distinguished subalgebras and atoms is complete with respect to degree spectra of nontrivial structures, effective dimensions, expansion by constants, and degree spectra of relations.

Keywords: Boolean algebra, computable structure, $HKSS$–complete, subalgebra, computable Boolean algebras with distinguished subalgebras and atoms.

Isakov, V.S., $HKSS$–completeness of the class of Boolean algebras with distinguished subalgebras and atoms.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2025-349.

Поступила 12 марта 2025 г., опубликована 18 мая 2026 г.

1 Введение

В 2002 году Д. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор и А. М. Слинько [1] ввели новое понятие $HKSS$–полноты, рассматриваемое для класса структур. Идея состоит в следующем: если интересующая нас вычислимая структура обладает некоторым теоретико-вычислимым свойством P, то в $HKSS$–полном классе найдется структура с таким же свойством. Польза от изучения $HKSS$–полноты для класса структур $\mathcal{K}$ состоит в том, что можно оценить сложность структуры из этого класса с различных сторон, имея информацию об уже известных структурах из других классов. При этом $HKSS$–полнота есть более сильное условие, чем другие теоретико-вычислимые свойства, что позволяет получить много информации об исследуемом классе $\mathcal{K}$. Формальное определение $HKSS$–полноты будет приведено в разделе 2. Отметим, что сам термин «$HKSS$–полнота» был предложен в работе [2].

Известно, что класс булевых алгебр не является $HKSS$–полным. В 1980 году С. С. Гончаров и В. Д. Дзгоев [3] доказали, что вычислимая размерность вычислимой булевой алгебры $\mathcal{B}$ равна либо 1, либо ∞, что не наблюдается для структур из $HKSS$–полных классов. В 2012 г. Б. Хусаинов и Т. Ковальски [4] поставили вопрос: как сигнатурное обогащение булевых алгебр влияет на их теоретико-вычислимые свойства? В этой же работе они доказали, что класс булевых алгебр с выделенными операторами $HKSS$–полный. В частности, из этого вытекает существование примеров булевых алгебр с выделенными операторами, обладающих любой конечной вычислимой размерностью.

Отметим, что класс булевых алгебр с выделенным идеалом не является $HKSS$–полным. Этот результат был получен в 1998 году Н. Т. Когабаевым [5]. В 2012 году результат был обобщен П. Е. Алаевым [6] в статье про автоустойчивость вычислимых булевых алгебр с выделенными идеалами и атомами. Класс булевых алгебр с выделенным множеством атомов также не является $HKSS$–полным [7].

Н. А. Баженов [8, 9, 10] доказал, что $HKSS$–полными классами являются полимодальные алгебры, контактные булевы алгебры и алгебры Гейтинга с выделенными атомами и коатомами.

В данной работе будет доказано, что класс булевых алгебр с тремя выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов $HKSS$ – полный.

Во втором разделе приведены предварительные сведения, в том числе интересующие нас теоретико–вычислимые свойства. В третьем — изложен возможный способ кодирования графа в обогащенной булевой алгебре. В четвертом разделе получен основной результат (теорема 6).

2 Предварительные сведения

Все нижеприведенные термины, касающиеся теории булевых алгебр, собраны из монографии [11].

Под *булевой алгеброй* подразумевается алгебраическая система $\mathcal{A} = \langle A, \vee, \wedge, C, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ конечной сигнатуры $\Sigma_{BA} = \langle \vee^2, \wedge^2, C^1, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$.

На булевых алгебрах определен частичный порядок: $a \leq b$ в том и только том случае, когда $a \wedge b = a$. Через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ обозначаем наименьший и наибольший элементы булевой алгебры соответственно.

Атомом в булевой алгебре назовем ненулевой элемент, под которым лежит только ноль. В сигнатуру булевой алгебры можно добавить предикат $Atom(x)$ для определения атома. Булева алгебра называется *атомной*, если под любым ненулевым элементом есть атом.

В монографии С. С. Гончарова [11] показано построение булевой алгебры $\mathcal{B}_M$ по данному линейно упорядоченному множеству M. Нас будет интересовать счетная булева алгебра, порожденная линейно упорядоченным множеством $\mathbf{L} = \langle \omega^2, \leqslant\rangle$. В данной ситуации множество

$$\left\{\, [0, a) \mid a \in \omega^2 \right\}$$

порождает булеву алгебру $\mathcal{B}_{\omega^2}$ в алгебре всех подмножеств множества ω^2.

Для построения вычислимого представления булевой алгебры будем использовать конструкцию дерева.

Определим на $\mathbb{N}$ следующие функции:

$$R(n) = 2n + 2, \quad L(n) = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$H(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ [(n-1)/2], & \text{если } n \geqslant 1, \end{cases}$$

$$S(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ n - 1, & \text{если } n = 2k,\ n > 0, \\ n + 1, & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Значения функций интерпретируют следующим образом:

$R(n)$ — номер правой вершины, лежащей под n,

$L(n)$ — номер левой вершины, лежащей под n,

$H(n)$ — номер ближайшей вершины из находящихся выше n,

$S(n)$ — номер соседней к n вершины, лежащей под $H(n)$.

Подмножество $D \subseteq \mathbb{N}$ называется *деревом*, если для любого $n \in D$ элементы $H(n)$, $S(n)$ принадлежат D.

Будем говорить, что дерево D порождает булеву алгебру $\mathcal{A}$, если существует разнозначное отображение φ из D в A такое, что:

$$\varphi(0) = \mathbf{1}, \tag{1}$$

$$(\forall n \in D \setminus \{0\})\ (\varphi(n) \vee \varphi(S(n)) = \varphi(H(n))\ \& \\ \varphi(n) \wedge \varphi(S(n)) = \mathbf{0}\ \&\ \varphi(n) \neq \mathbf{0}), \tag{2}$$

$$(\forall a \neq \mathbf{0})\ (\exists n_1, \ldots, n_k \in D)(\varphi(n_1) \vee \ldots \vee \varphi(n_k) = a). \tag{3}$$

Порождающим деревом назовём пару $\langle D, \varphi \rangle$.

Как видно из аксиом, элемент алгебры $\mathcal{A}$ можно выражать через вершины дерева разными способами. Например, использовать тождество $\varphi(n) = \varphi(L(n)) \vee \varphi(R(n))$. Чтобы избежать неоднозначности в записи элемента $a \in \mathcal{A}$, введем следующее понятие.

Подмножество $H \subseteq D$ называется *каноническим представлением элемента* $a \in \mathcal{A}$, если:

(1) $\forall n \in H\ (S(n) \notin H)$,
(2) $\forall n \in H\ \forall m \in H\ (\varphi(m) \leq \varphi(n) \Rightarrow m = n)$,
(3) $a = \mathbf{0} \Leftrightarrow H = \emptyset$ и $a \neq \mathbf{0} \Rightarrow a = \bigvee_{n \in H} \varphi(n)$.

Далее введем теоретико-вычислимые свойства, рассматриваемые в данной работе.

Предварительные сведения о тьюринговых степенях можно найти в [12], а информацию о теории вычислимых моделей можно найти в [13]. Для структуры $\mathcal{S}$ через $|\mathcal{S}|$ обозначаем носитель структуры $\mathcal{S}$.

Пусть $\deg_T(X)$ — тьюрингова степень множества $X \subseteq \mathbb{N}$, а $\mathbf{d}$ — это тьюрингова степень. Структуру $\mathcal{A}$ будем называть $\mathbf{d}$-вычислимой, если её носитель является вычислимым подмножеством $\mathbb{N}$ и атомная диаграмма $D^a(\mathcal{A})$ $\mathbf{d}$-вычислима. *Степенью* $\deg(\mathcal{A})$ для структуры $\mathcal{A}$ назовем тьюрингову степень атомной диаграммы $D^a(\mathcal{A})$. Для счетной структуры $\mathcal{S}$ $\mathbf{d}$-*вычислимой копией* назовем $\mathbf{d}$-вычислимую структуру $\mathcal{A}$, изоморфную $\mathcal{S}$. Если $\mathbf{d}$-вычислимая копия существует, то говорят, что $\mathcal{S}$ $\mathbf{d}$-вычислимо представима. Спектром степеней структуры $\mathcal{S}$ обозначим множество

$$DgSp(\mathcal{S}) = \{\deg(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ есть копия } \mathcal{S}\}.$$

Структура $\mathcal{S}$ *тривиальная*, если существует конечное подмножество $X \subseteq |\mathcal{S}|$, такое что любая перестановка f на $|\mathcal{S}|$, оставляющая все элементы X на месте, является автоморфизмом.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{S})$ вычислимой структуры $\mathcal{S}$ называется наибольшее натуральное число $n \geq 1$, такое что существуют вычислимые копии $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ структуры $\mathcal{S}$, попарно не $\mathbf{d}$-вычислимо изоморфные. Если наибольшего $n \in \omega$ нет, то размерность считается бесконечной. Если $n = 1$, то структура $\mathbf{d}$-вычислимо категорична (или $\mathbf{d}$-автоустойчива). Для степени $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ будем обозначать $\dim_{\mathbf{0}}(\mathcal{S})$ через $\dim(\mathcal{S})$.

С. С. Гончаров [14] показал, что для каждого $n \geq 1$ существует ориентированный граф с вычислимой размерностью n. Это свойство отлично от булевых алгебр.

Спектром степеней отношения R на $|\mathcal{S}|$ для вычислимой структуры $\mathcal{S}$ назовем множество

$$DgSp_{\mathcal{S}}(R) = \{\deg_T(f(R)) : \mathcal{A} \text{ — вычислимая копия } \mathcal{S} \text{ и } f\colon \mathcal{S} \cong \mathcal{A}\}.$$

Отношение R *наследственно* Δ^0_1 (*наследственно* Σ^0_1) на $\mathcal{S}$, если для любой вычислимой копии $\mathcal{A}$ и любого изоморфизма $f\colon \mathcal{S} \cong \mathcal{A}$ отношение

$f(R)$ является Δ^0_1 (соответственно, Σ^0_1). Отношение R является *относительно наследственно* Δ^0_1 (*относительно наследственно* Σ^0_1) на $\mathcal{S}$, если для любой копии $\mathcal{A}$ и любого изоморфизма $f\colon \mathcal{S} \cong \mathcal{A}$ отношение $f(R)$ есть $\Delta^0_1(D^a(\mathcal{A}))$ (соответственно, $\Sigma^0_1(D^a(\mathcal{A}))$).

Относительно спектра степеней отношений Б. Хусаинов и Р. Шор [15] получили следующий результат.

Теорема 1. *Для каждого $n \geq 1$ существует наследственно в.п. отношение U в вычислимом ориентированном графе $\mathcal{G}$ с $\dim(\mathcal{G}) = n$, такое что $DgSp_{\mathcal{G}}(U)$ состоит из n различных в.п. степеней, включая $\mathbf{0}$.*

По заданному набору в.п. степеней тоже можно найти отношение с таким спектром степеней [16, 17].

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$ — в.п. степени. Тогда существует наследственно в.п. отношение U в вычислимом ориентированном графе $\mathcal{G}$ с $\dim(\mathcal{G}) = n$, такое что $DgSp_{\mathcal{G}}(U) = \{\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}$.*

Другой подход заключается в рассмотрении расширения структуры конечным числом констант. П. Чолак, С. С. Гончаров, Б. Хусаинов и Р. Шор [18] показали, что добавление константы может повлиять на вычислимую размерность.

Теорема 3. *Для каждого $n \geq 1$ существуют вычислимо категоричный ориентированный граф $\mathcal{G}$ и $a \in \mathcal{G}$, такие что структура $(\mathcal{G}, a)$ имеет вычислимую размерность n.*

При этом теорема справедлива и для бесконечной размерности [19].

Теорема 4. *Существуют вычислимо категоричный ориентированный граф $\mathcal{G}$ и $a \in \mathcal{G}$, такие что структура $(\mathcal{G}, a)$ имеет вычислимую размерность ω.*

Д. Хиршфельдт, Б. Хусаинов, Р. Шор и А. М. Слинько [1] ввели новое понятие для класса структур, отражающее все вышеупомянутые свойства класса.

Определение 1. *Класс структур $\mathcal{K}$ называется* полным относительно спектра степеней нетривиальных структур, вычислимых размерностей, расширения константами и спектра степеней отношений *(или $HKSS$–*полным*), если для каждого нетривиального ориентированного счетного графа G существует нетривиальная счетная структура $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, обладающая следующими свойствами:*

1. *$DgSp(\mathcal{A}) = DgSp(G)$.*
2. *Если G имеет вычислимую копию, тогда верно следующее:*
   a) *для произвольной тьюринговой степени $\mathbf{d}$* $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(G)$,
   b) $\forall c \in |G|\ \exists a \in |\mathcal{A}|$, *такой что* $\dim(\mathcal{A}, a) = \dim(G, c)$,

c) *для произвольного отношения* $R \subseteq |G|$ *существует отношение* $Q \subseteq |\mathcal{A}|$, *такое что* $DgSp_{\mathcal{A}}(Q) = DgSp_G(R)$, *причем если* R *наследственно* Σ_1^0, *тогда* Q *также наследственно* Σ_1^0.

Известно, что сам класс ориентированных графов является $HKSS$–полным (см. приложение A в [1]). Классы частичных порядков, симметричных иррефлексивных графов также $HKSS$–полные [1]. Доказательство такого свойства устанавливалось кодированием вычислимого ориентированного графа в исследуемую структуру. Поскольку симметричные иррефлексивные графы также являются $HKSS$–полными, можно кодировать их [1].

В работе [1] обоснован вышеупомянутый метод.

Теорема 5. *Пусть* G — *счетный нетривиальный симметричный иррефлексивный граф с отношением* E, *а* $\mathcal{A}$ — *это счетная структура. Предположим, что существуют инвариантные, относительно наследственно вычислимые отношения* $D(x)$ *и* $R(x,y)$ *в структуре* $\mathcal{A}$ *и отображение* Ψ_G, *действующее из множества копий* G *в множество копий* $\mathcal{A}_G$, *со следующими свойствами:*

1. *Для каждой копии* H *графа* G *структура* $\Psi_G(H)$ *должна быть* $\deg(H)$*-вычислима.*
2. *Для копии* H *существует* $deg(H)$*-вычислимая биекция* $f_H : D(\Psi_G(H)) \to |H|$, *такая что* $R(x,y) \Leftrightarrow E(f_H(x), f_H(y))$.
3. *Если* $f : D(\mathcal{A}_G) \to D(\mathcal{A}_G)$ *биекция и* $R(x,y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$, *то* f *продолжается до автоморфизма структуры* $\mathcal{A}_G$.
4. *Для копии* H *существует* $\deg(H)$*-вычислимое множество экзистенциальных формул* $\{\psi_i(\overline{a}, \overline{e_i}, x)\}_{i\in\omega}$, *где* $\overline{a}$ – *кортеж из* $\Psi_G(H)$, $\overline{e_i}$ – *кортеж из* $D(\Psi_G(H))$. *Причём каждый* $x \in |\Psi_G(H)|$ *удовлетворяет некоторой формуле* $\psi_i(\overline{a}, \overline{e_i}, x)$ *и два разных* x *не могут удовлетворять одной и той же* ψ_i.

Тогда верно следующее:

1. $DgSp(\mathcal{A}) = DgSp(G)$.
2. *Если* G *имеет вычислимую копию, тогда:*
   a) *для произвольной тьюринговой степени* $\mathbf{d}$ $\dim_{\mathbf{d}}(\mathcal{A}) = \dim_{\mathbf{d}}(G)$,
   b) $\forall c \in |G|\ \exists a \in |\mathcal{A}|$, *такой что* $\dim(\mathcal{A}, a) = \dim(G, c)$,
   c) *для произвольного отношения* $R \subseteq |G|$ *существует отношение* $Q \subseteq |\mathcal{A}|$, *такое что* $DgSp_{\mathcal{A}}(Q) = DgSp_G(R)$, *причем если* R *наследственно* Σ_1^0, *тогда* Q *также наследственно* Σ_1^0.

Стоит также отметить, что вопросы, рассматриваемые в данной работе, связаны с эффективной би-интерпретируемостью класса графов и сигнатурно обогащенных булевых алгебр. Подробнее об эффективной би-интерпретируемости см. в [20].

3 Кодирование графа

В данном разделе приведём нашу основную конструкцию, позволяющую кодировать данный счётный граф в сигнатурное обогащение булевой алгебры.

3.1. Представление булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$ посредством дерева. Через $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ обозначим наименьший и наибольший элементы булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$ соответственно.
Покажем, что следующее дерево порождает алгебру $\mathcal{B}_{\omega^2}$:

$$D = \{R^n L^m R^k(0) \mid n \in \{0,1\},\ m,k \in \mathbb{N}\}. \tag{4}$$

Построим разнозначное отображение φ, сопоставляющее каждому элементу дерева D некоторый полуоткрытый интервал в порядке ω^2:

$$\varphi(R^n L^m R^k(0)) = \begin{cases} \{\omega\cdot k + m - 1\}, & \textit{если } n = 1,\ m \geq 1, \\ [\omega\cdot k + m - 1, \omega\cdot(k+1)), & \textit{если } n = 0,\ m \geq 1, \\ [\omega\cdot k, \omega^2), & \textit{если } n = 0,\ m = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Предложение 1. *Пара $\langle D, \varphi\rangle$ является порождающим деревом для булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$.*

Доказательство. Чтобы показать, что $\langle D, \varphi\rangle$ является порождающим деревом, необходимо проверить условия (1)-(3).

Очевидно, что $\varphi(0) = \mathbf{1}$, т.е. равно наибольшему элементу булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$. Значит, условие (1) верно.

Покажем, что для каждого $x \in D \setminus \{0\}$ верно условие (2):

$$\varphi(x) \vee \varphi(S(x)) = \varphi(H(x)) \ \&\ \varphi(x) \wedge \varphi(S(x)) = \mathbf{0}.$$

Для элемента вида $L^m R^k(0)$, где $m \geq 1$, выполнено:

$$S(L^m R^k(0)) = RL^{m-1}R^k(0),\ H(L^m R^k(0)) = L^{m-1}R^k(0).$$

Из формулы (5) очевидно, что

$$\varphi(L^m R^k(0)) \vee \varphi(RL^{m-1}R^k(0)) = \varphi(L^{m-1}R^k(0))\ \&$$
$$\varphi(L^m R^k(0)) \wedge \varphi(RL^{m-1}R^k(0)) = \mathbf{0}.$$

Для элемента вида $RL^m R^k(0)$, где $m \geq 1$, верно:

$$S(RL^m R^k(0)) = L^{m+1}R^k(0),\ H(RL^m R^k(0)) = L^m R^k(0).$$

Также получаем, что

$$\varphi(RL^m R^k(0)) \vee \varphi(L^{m+1}R^k(0)) = \varphi(L^m R^k(0))\ \&$$
$$\varphi(RL^m R^k(0)) \wedge \varphi(L^{m+1}R^k(0)) = \mathbf{0}.$$

Для $R^k(0)$, $k > 0$, доказательство свойства (2) дословно повторяет предыдущее.

Любой ненулевой элемент из $\mathcal{B}_{\omega^2}$ можно представить конечным объединением полуоткрытых интервалов из определения отображения φ (см. формулу (5)). Значит, условие (3) верно.

Таким образом, пара $\langle D, \varphi\rangle$ является деревом, порождающим $\mathcal{B}_{\omega^2}$. $\square$

3.2. Конструкция для кодирования графа. Произвольный нетривиальный иррефлексивный неориентированный счётный граф G с натуральным рядом в качестве множества вершин будем кодировать следующим образом.

По дереву $\langle D, \varphi\rangle$ из формулы (4) стандартным образом построим вычислимую изоморфную копию $\mathcal{A}$ булевой алгебры $\mathcal{B}_{\omega^2}$. Для удобства далее будем иногда отождествлять вершину x дерева D с соответствующим элементом $\varphi(x)$ в булевой алгебре $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}_{\omega^2}$.

Для начала выделим подмножество $D_0 = \{L^2R^k(0) \mid k \in \mathbb{N}\}$ в D, почти все элементы которого будут выступать в качестве вершин графа.

По D_0 породим подалгебру P_0 в алгебре $\mathcal{A}$. Однако, чтобы в дальнейшем было «проще» выделять атомы в P_0, построим подалгебру P_1, порожденную множеством $D_1 = \{LR^k(0) \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{RL(0)\}$.

Добавим в сигнатуру исходной булевой алгебры Σ_{BA} предикатные символы P_0 и P_1, соответствующие описанным выше подалгебрам, а также предикатный символ $Atom$. Обозначим новую сигнатуру за Σ^+.

Построим формулы в Σ^+ для описания вершин графа:

$$\psi_{Dom}(x) = P_0(x) \ \&\ \neg P_1(x) \& \ \exists y[P_1(y) \ \&\ (x < y) \ \&\ Atom(y \wedge C(x))],$$
$$\psi_{\neg Dom}(x) = \neg P_0(x) \vee P_1(x) \vee \exists y[P_0(y) \ \&\ (y < x) \ \&\ (y \neq 0)],$$
$$\psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} = \{a : \mathcal{A} \models \psi_{Dom}(a)\},$$
$$\psi_{\neg Dom}\{\mathcal{A}\} = \{a : \mathcal{A} \models \psi_{\neg Dom}(a)\}.$$

Относительно данных формул справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Выполнены следующие свойства:*

1. $\psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} = \{L^2R^k(0) \mid k \geq 1\}$.
2. *Множества* $X = \psi_{Dom}\{\mathcal{A}\}$ *и* $Y = \psi_{\neg Dom}\{\mathcal{A}\}$ *образуют разбиение* $|\mathcal{A}|$, *т.е.* $X \cup Y = |\mathcal{A}|$ *и* $X \cap Y = \emptyset$.

Доказательство. 1) Элемент $L^2(0)$ лежит в P_0 и в P_1 по построению, следовательно для него справедлива формула $\psi_{\neg Dom}(L^2(0))$.

Элемент вида $L^2R^k(0)$ при $k \geq 1$ не лежит в P_1, так как под порождающими $LR^k(0)$ $(k \geq 1)$ подалгебры P_1 нет других порождающих (по определению D_1).

Элемент $LR^k(0)$ при $k \geq 1$ лежит выше $L^2R^k(0)$, а $RLR^k(0)$ – атом. Значит, $L^2R^k(0)$ удовлетворяет подформуле с квантором $\exists$ в формуле $\psi_{Dom}(x)$ и всей формуле. То есть

$$\psi_{Dom}\{\mathcal{A}\} \supseteq \{L^2R^k(0) \mid k \geq 1\}.$$

Покажем обратное включение. Пусть для элемента a справедлива формула $\psi_{Dom}(a)$. Без ограничения общности a состоит либо из конечного объединения элементов вида $R^i(0), RLR^j(0), LR^s(0)$ при $i, j \geq 1, s \geq 0$ (и каждый вид в объединении встречается при различных i, j, s), либо из конечного объединения элементов вида $L^2R^k(0)$ при $k \geq 1$. По условию a не лежит в подалгебре P_1, но существует атом b алгебры $\mathcal{A}$, который в объединении с a лежит в P_1.

В первом случае $a \vee b = a$, что невозможно. Во втором случае, если $a \vee b$ в каноническом разложении содержит $L^2R^k(0)$ (где $k \geq 1$), то в подалгебру P_1 $a \vee b$ не попадет, так как элементы подалгебры P_1 состоят из конечных объединений элементов вида $R^i(0), LR^j(0), RL(0), L^2(0)$ при $i \geq 1, j \geq 0$. Следовательно, возможен только один вариант, когда $a = L^2R^k(0)$ и $b = RLR^k(0)$.

2) Достаточно показать, что $\psi_{\neg Dom}(x) = \neg\psi_{Dom}(x)$.

Бескванторная часть формулы $\psi_{\neg Dom}(x)$ является отрицанием бескванторной части формулы $\psi_{Dom}(x)$.

По смыслу кванторная часть формулы $\psi_{Dom}(x)$ говорит о том, что x является атомом подалгебры P_0. Подформула

$$\exists y[P_0(y) \ \&\ (y < x) \ \&\ (y \neq 0)]$$

в формуле $\psi_{\neg Dom}(x)$ является отрицанием этого утверждения. □

При написании формул будем использовать следующее сокращение:

$$(y, z \mid x) \ \Leftrightarrow\ y \vee z = x \ \&\ y \wedge z = 0 \ \&\ y \neq 0 \ \&\ z \neq 0.$$

Для кодирования информации о ребрах (графа G) формульно определим константу $c = L(0)$:

$$x = c \Leftrightarrow\ P_1(x) \ \&\ \exists y \exists z[y, z \mid x \ \&\ Atom(z) \ \&\ P_1(z) \ \&\ P_0(y)],$$

$$\begin{aligned} x \neq c \Leftrightarrow\ & P_0(x) \vee\ \neg P_1(x)\ \vee\ Atom(x) \vee \\ & \exists y \exists z[y, z \mid x \ \&\ ((P_1(y) \& \ P_1(z) \& \ \neg Atom(y) \& \ \neg Atom(z)) \vee \\ & \qquad (\psi_{Dom}(y)) \vee\ (P_1(y) \& \ \neg P_0(y)))]. \end{aligned}$$

Отметим, что константа c определима в построенной структуре $(\mathcal{A}, P_0, P_1, Atom)$ посредством как экзистенциальной, так и универсальной формулы.

Наличие или отсутствие ребра в графе зададим через подалгебру. Для этого построим по шагам вычислимое множество $V_2 \subseteq |\mathcal{A}|$.

По каждому числу $m \in \mathbb{N}$ зададим множество

$$R_m = \{RL^nR^{m+1}(0) \mid n \geq 2\}.$$

Для $m < k$ на шаге конструкции $\langle m, k\rangle$ находим в каждом из множеств R_m и R_k ещё не использованный в конструкции (наименьший относительно $\leq_{\mathbb{N}}$) атом.

Если в графе G есть ребро (m, k), то в V_2 добавляем объединение этих двух атомов. В противном случае находим не использованный на предыдущих шагах атом a, лежащий под c и не лежащий в подалгебре P_1, и добавляем в V_2 объединение трех найденных атомов.

Полученным множеством V_2 порождаем подалгебру P_2 в алгебре $\mathcal{A}$.

Следствие 1. *Если в графе G существует бесконечно много пар вершин $i \neq j$, между которыми нет ребра, то каждый элемент $z \in \mathcal{A}$, такой что $Atom(z)\&(z < c)$, лежит под некоторым атомом подалгебры P_2.*

Итак, по заданному графу $G = \langle \mathbb{N}, E \rangle$ можно построить структуру $\mathcal{B}_G$ в сигнатуре $\Sigma_G = \Sigma^+ \cup \{P_2\}$. Отметим, что обеднение $\mathcal{B}_G$ до сигнатуры Σ^+ является вычислимой структурой, построение которой не зависит от выбора графа G.

Наличие/отсутствие ребра выразим следующим образом:

$$\psi_{Edge}(x, y) = \psi_{Dom}(x) \ \& \ \psi_{Dom}(y) \ \& \\ \exists z[P_2(z) \ \& \ z < (x \vee y) \ \& \ Atom(z \wedge x) \ \& \ Atom(z \wedge y)],$$

$$\psi_{\neg Edge}(x, y) = \psi_{\neg Dom}(x) \vee \psi_{\neg Dom}(y) \vee \\ \exists z[P_2(z) \ \& \ z < (x \vee y \vee c) \ \& \ Atom(z \wedge x) \ \& \ Atom(z \wedge y) \ \& \ Atom(z \wedge c)].$$

Лемма 2. *Выполнены следующие свойства:*

1. *Множество $\psi_{Edge}\{\mathcal{B}_G\}$ равно* $\{(L^2R^k(0), L^2R^m(0)) \mid k, m \geq 1, \ G \models E(k-1, m-1)\}$.
2. *Множества $\psi_{Edge}\{\mathcal{B}_G\}$ и $\psi_{\neg Edge}\{\mathcal{B}_G\}$ образуют разбиение для* $|\mathcal{A}|^2 \setminus \{(a, a) \in \ |\mathcal{A}|^2\}$.

Доказательство. 1) По лемме 1 и построению подалгебры P_2 включение справа налево очевидно.

Установим обратное включение. По той же лемме $x = L^2R^k(0)$ и $y = L^2R^m(0)$ для $k, m \geq 1$. Подформула

$$\exists z[P_2(z) \ \& \ z < (x \vee y) \ \& \ Atom(z \wedge x) \ \& \ Atom(z \wedge y)]$$

в формуле $\psi_{Edge}(x, y)$ говорит о том, что z равен объединению двух атомов алгебры $\mathcal{A}$, лежащих под $L^2R^k(0)$ и $L^2R^m(0)$.

Пусть $k < m$. Если $G \models \neg E(k-1, m-1)$, то на шаге $\langle k, m \rangle$ в подалгебру P_2 попал бы элемент z, равный объединению трех атомов алгебры $\mathcal{A}$, а не двух.

2) Напомним, что граф G не имеет петель, и в построении множества V_2 рассматривались только пары различных вершин. Из этих фактов нетрудно получить, что $\psi_{\neg Edge}(x, y) = \neg \psi_{Edge}(x, y)$. $\square$

4 Основной результат

Обозначим класс булевых алгебр с тремя выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов через $\mathcal{K}_3$.

Теорема 6. *Класс $\mathcal{K}_3$ $HKSS$-полный.*

Доказательство. В разделе 2 обсуждалась идея доказательства для некоторых классов структур: достаточно нужным образом закодировать нетривиальный счетный симметричный иррефлексивный граф. В разделе 3 представлено, как можно провести эту процедуру. Иными словами, построено отображение Ψ_G, действующее из множества копий G в множество копий $\mathcal{B}_G$ из теоремы 5. Каждому графу H ставится в соответствие структура $\mathcal{B}_H$.

Проверим условия теоремы 5.

1) По построению в разделе 3 структура $\mathcal{B}_H$ $\deg(H)$-вычислима.

В качестве отношений положим:

$$D(x) = \psi_{Dom}(x), \quad R(x,y) = \psi_{Edge}(x,y).$$

Из построения формул $\psi_{Dom}(x), \psi_{Edge}(x,y)$ ясно, что отношения $D(x)$ и $R(x,y)$ инвариантны и относительно наследственно вычислимы.

По лемме 1, имеем

$$\psi_{Dom}\{\mathcal{B}_H\} = \{L^2R^{j+1}(0) \mid j \in \omega\}.$$

Для удобства далее будем обозначать $e_j = L^2R^{j+1}(0)$ для $j \in \omega$.

2) Зададим $f_H : \{e_j \mid j \in \omega\} \to |H|$, положив $f_H(e_j) = j$. Это вычислимая функция.

Поскольку вершину графа j отображали в $L^2R^{j+1}(0)$ и функции L и R инъективные, то f_H — биекция. Причем $R(e_i, e_j) \Leftrightarrow E(i,j)$.

3) Рассмотрим теперь биекцию $f : D(\mathcal{B}_G) \to D(\mathcal{B}_G)$, такую что $R(x,y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$. Зададим биекцию на $\mathbb{N}$: $h(j) = i$ если $f(e_j) = e_i$.

Поскольку граф нетривиальный, то справедливо следствие 1 из раздела 3.

В таком случае из леммы 2 и условия $R(x,y) \Leftrightarrow R(f(x), f(y))$ следует, что есть биекция на атомах, лежащих под c и не лежащих в подалгебре P_1, а также есть биекция на атомах, лежащих под элементами из множества $D(\mathcal{B}_G)$. Объединим такие биекции в одну биекцию $\hat{f}$.

Положим $\hat{f}(L^2(0)) = L^2(0)$ и $\hat{f}(RL(0)) = RL(0)$.

Доопределим $\hat{f}$ на атомах вида $RLR^j(0)$, где $j \geq 1$:

$$\hat{f}(RLR^j(0)) = RLR^{h(j)}(0).$$

Автоморфизм счетной булевой алгебры полностью определяется своим действием на атомах и безатомных элементах (см. главу 3 в [11]). Поэтому $\hat{f}$ определен своим действием на атомах счетной атомной булевой алгебры.

4) Каждый элемент $x \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ из $\mathcal{B}_H$ с точностью до канонического представления можно единственным образом представить в виде конечного объединения:

$$x = x_0 \vee x_1 \vee \dots \vee x_n,$$

где $x_i \neq \mathbf{0}$, $x_i \wedge x_k = \mathbf{0}$ при $i \neq k$ и при этом каждый x_i удовлетворяет в точности одному из следующих девяти условий:

(a) Элемент x_i — это константа c. Этот случай соответствует $x_i = L(0)$.
(b) Элемент x_i — это атом алгебры $\mathcal{B}_H$, который лежит под c. Этот случай соответствует $x_i = RL^n(0)$ для $n \geq 1$.
(c) Элемент x_i лежит строго под c и при этом $c \wedge C(x_i)$ есть конечная сумма атомов алгебры $\mathcal{B}_H$. Этот случай соответствует $x_i = L^n(0)$ для $n \geq 2$.
(d) Элемент x_i — это атом алгебры $\mathcal{B}_H$, который лежит под некоторым атомом e_j подалгебры P_0. Этот случай соответствует $x_i = RL^n R^{j+1}(0)$ для $n \geq 2$.
(e) Элемент x_i — это атом алгебры $\mathcal{B}_H$, для которого существует атом e_j подалгебры P_0, такой что элемент $x_i \vee e_j$ есть атом в подалгебре P_1. Этот случай соответствует $x_i = RLR^{j+1}(0)$.
(f) Элемент x_i — это элемент алгебры $\mathcal{B}_H$, такой что $x_i < e_j$ и при этом $e_j \wedge C(x)$ есть конечная сумма атомов алгебры $\mathcal{B}_H$. Этот случай соответствует $x_i = L^n R^{j+1}(0)$ для $n \geq 3$.
(g) Элемент x_i — это атом подалгебры P_1, не равный c и не лежащий под ним. Этот случай соответствует $x_i = LR^{j+1}(0)$.
(h) Элемент $C(x_i)$ есть конечная сумма атомов подалгебры P_1. Этот случай соответствует $x_i = R^{j+1}(0)$.
(i) Элемент x_i — это элемент e_j.

Для случая (a) $\exists$-формула, определяющая элемент x_i, уже построена в разделе 3.

В случае (b) из свойств конструкции возможны два случая. В первом случае найдутся атом y подалгебры P_2, и элементы e_j, e_k, где $j \neq k$, такие что элементы $y \wedge C(x_i) \wedge e_j$ и $y \wedge C(x_i) \wedge e_k$ есть атомы алгебры $\mathcal{B}_H$. Элемент x_i — это единственный элемент из $\mathcal{B}_H$, удовлетворяющий следующей $\exists$-формуле:

$$\begin{aligned}\theta_{B_1}(x, e_j, e_k, c) = {} & Atom(x) \ \& \ (x < c) \ \& \\ & \exists y[P_2(y) \ \& \ x < y \ \& \ Atom(y \wedge C(x) \wedge e_j) \ \& \ Atom(y \wedge C(x) \wedge e_k) \& \\ & \qquad y \wedge C(x) < e_j \vee e_k].\end{aligned}$$

Во втором случае элемент x лежит в подалгебре P_1:

$$\theta_{B_2}(x, c) = Atom(x) \ \& \ (x < c) \ \& \ P_1(x).$$

В случае (c) находим атомы $a_0, a_1, \ldots, a_k$ алгебры $\mathcal{B}_H$, для которых верно $a_l \neq a_m$ при $l \neq m$, $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$ и

$$c = x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \cdots \vee a_k.$$

Для каждого атома a_l фиксируем формулу $\theta_B(x, e_{j_l}, e_{s_l}, c)$. Тогда x_i — это единственный элемент, удовлетворяющий $\exists$-формуле:

$$\theta_C(x, \bar{e}, c) = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \ \Big[\bigwedge_{l \le k} (\theta_B(y_l, e_{j_l}, e_{s_l}, c) \ \& \ y_l \wedge x = \mathbf{0}) \ \& \\ (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = c)) \Big].$$

В случае (d) объединение x_i с другими атомами — порождающий элемент P_2. В таком случае найдётся атом y подалгебры P_2, такой что элемент $y \wedge C(x_i)$ есть атом алгебры $\mathcal{B}_H$ или двухатомный элемент алгебры $\mathcal{B}_H$, лежащий под некоторым $e_k \vee c$ и только под ним. Элемент x_i — это единственный элемент из $\mathcal{B}_H$, удовлетворяющий следующей $\exists$-формуле:

$$\theta_D(x, e_j, e_k, c) = Atom(x) \ \& \ (x < e_j) \ \& \ \exists y [P_2(y) \ \& \ x < y \ \& \\ ((Atom(y \wedge C(x)) \ \& \ (y \wedge C(x) < e_k)) \vee (Atom(y \wedge C(x) \wedge e_k) \ \& \\ Atom(y \wedge C(x) \wedge c)) \& \ y \wedge C(x) < e_k \vee c)].$$

В случае (e) находим e_j, такой что $e_j \vee x_i$ есть атом в подалгебре P_1. Элемент x_i — это единственный элемент из $\mathcal{B}_H$, удовлетворяющий бескванторной формуле:

$$\theta_E(x, e_j) = Atom(x) \ \& \ (x \wedge e_j = \mathbf{0}) \ \& \ P_1(x \vee e_j) \ \& \ \neg P_1(x).$$

В случае (f) находим атомы $a_0, a_1, \dots, a_k$ алгебры $\mathcal{B}_H$, для которых верно $a_l \neq a_m$ при $l \neq m$, $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$ и

$$e_j = x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_k.$$

Для каждого атома a_l фиксируем формулу $\theta_D(x, e_j, e_{k_l}, c)$, полученную в случае (d). Тогда x_i — это единственный элемент, удовлетворяющий $\exists$-формуле:

$$\theta_F(x, e_j, \bar{e}, c) = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \Big[\bigwedge_{l \le k} (\theta_D(y_l, e_j, e_{k_l}, c) \ \& \ y_l \wedge x = \mathbf{0}) \ \& \\ (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = e_j)) \Big].$$

В случае (g) находим $e_j < x_i$ такой, что $x_i \wedge C(e_j)$ есть атом алгебры $\mathcal{B}_H$. Элемент x_i — это единственный элемент из $\mathcal{B}_H$, удовлетворяющий бескванторной формуле:

$$\theta_G(x, e_j) = P_1(x) \ \& \ (e_j < x) \ \& \ Atom(x \wedge C(e_j)).$$

В случае (h) без ограничения общности можно найти атомы $a_0, a_1, \dots, a_k$ в подалгебре P_1, для которых верно $a_0 = c$, $a_l \neq a_m$ при $l \neq m$, $x_i \wedge a_m = \mathbf{0}$ и

$$x_i \vee a_0 \vee a_1 \vee \dots \vee a_k = \mathbf{1}.$$

Элемент x_i — это единственный элемент, удовлетворяющий $\exists$-формуле:

$$\theta_H(x, \bar{e}, c) = \exists y_0 \exists y_1 \dots \exists y_k \big[y_0 = c \ \& \ y_0 \wedge x = \mathbf{0} \ \& \\ \bigwedge_{1 \le l \le k} (\theta_G(y_l, e_l) \ \& \ y_l \wedge x = \mathbf{0}) \ \& \ (x \vee y_0 \vee y_1 \vee \dots \vee y_k = \mathbf{1}) \big].$$

В случае (i) используем формулу $x = e_j$.

Как было отмечено выше, для каждого элемента $x \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ найдутся элементы из случаев (a)–(i), задающие каноническое представление x. Такое условие записывается $\exists$-формулой относительно элементов типа (a)–(i), каждый из которых также записывается $\exists$-формулой относительно $\bar{e}$, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$. Элемент x — это единственный элемент, который удовлетворяет такой формуле, поскольку каноническое представление для x только одно.

Для $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ определим формулы $x = \mathbf{0}$, $x = \mathbf{1}$.

По теореме 5 заключаем, что класс $\mathcal{K}_3$ $HKSS$–полный. Теорема 6 доказана. □

5 Следствия

Так как существуют вычислимые графы любой конечной размерности, то существуют такие модели и в классе $\mathcal{K}_3$.

Следствие 2. *Для любого $n \geq 1$ существует вычислимая булева алгебра с выделенными подалгебрами и выделенным множеством атомов, имеющая вычислимую размерность n.*

Теоремы 1–4 сформулированы для класса ориентированных графов. Из определения $HKSS$–полноты следует, что для любого $HKSS$–полного класса справедливы вышеупомянутые свойства.

Следствие 3. *Теоремы 1–4 справедливы для класса $\mathcal{K}_3$.*

References

[1] D. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R. Shore, A. Slinko, *Degree spectra and computable dimensions in algebraic structures*, Ann. Pure Appl. Logic, **115**:1-3 (2002), 71–113. MR1897023

[2] A. Montalbán, *Computability theoretic classifications for classes of structures, In: S. Y. Jang, Y. R. Kim, D.-W. Lee, and I. Yie, editors*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians,Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, 79–101. MR3728606

[3] S.S. Goncharov, V.D. Dzgoev, *Autostability of models*, Algebra Logic, **19** (1980), 28–37. MR0604657

[4] B. Khoussainov, T. Kowalski, *Computable isomorphisms of Boolean algebras with operators*, Studia Logica, **100**:3 (2012), 481–496. MR2944445

[5] N.T. Kogabaev *Autostability of Boolean algebras with a distinguished ideal*, Sib. Math. J., **39**:5 (1998), 927-–935. MR1650673

[6] P.E. Alaev, *Computably categorical Boolean algebras enriched by ideals and atoms*, Ann. Pure Appl. Logic, **163**:5 (2012), 485-499. MR2880267

[7] J.B. Remmel, *Recursive Boolean algebras with recursive atoms*, J. Symb. Logic, **46**:3 (1981), 595–616. MR0627908

[8] N. Bazhenov, *Categoricity spectra for polymodal algebras*, Studia Logica, **104**:6 (2016), 1083–1097. MR3567673

[9] N. Bazhenov, *Computable contact algebras*, Fund. Inform., **167**:4 (2019), 257–269. MR3981801

[10] N. Bazhenov, *Computable Heyting algebras with distinguished atoms and coatoms*, J. Log. Lang. Inf., **32**:1 (2023), 3–18. MR4549845

[11] S.S. Goncharov, *Countable Boolean algebras and decidability*, Springer New York, New York, 1997. MR1444819

[12] R.I. Soare, *Recursively enumerable sets and degrees*, Springer, Berlin, 1987. MR0882921

[13] C.J. Ash, J.F. Knight, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, Elsevier, Amsterdam, 2000. MR1767842

[14] S.S. Goncharov, *On the number of nonautoequivalent constructivizations*, Algebra Logic, **16**:3 (1977), 257–282. MR0516028

[15] B. Khoussainov, R. Shore, *Computable isomorphisms, degree spectra of relations, and Scott families*, Ann. Pure Appl. Log., **93**:1-3 (1998), 153–193. MR1635605

[16] D. Hirschfeldt, *Degree spectra of relations on structures of finite computable dimension*, Ann. Pure Appl. Log., **115**:1-3 (2002), 233–277. MR1897027

[17] B. Khoussainov, R. Shore, *Solution of the Goncharov-Ash problem and the spectrum problem in the theory of computable models*, Doklady Math, **61**:1 (2000), 178–179. MR1773346

[18] P. Cholak, S. Goncharov, B. Khoussainov, R. Shore, *Computably categorical structures and expansions by constants*, J. Symb. Log., **64**:1 (1999), 13–37. MR1683891

[19] D. Hirschfeldt, B. Khoussainov, R. Shore, *A computably categorical structure whose expansion by a constant has infinite computable dimension*, J. Symb. Log., **68**:4 (2003), 1199–1241. MR2017350

[20] M. Harrison-Trainor, A. Melnikov, R. Miller, A. Montalban, *Computable functors and effective interpretability*, J. Symb. Log., **82**:1 (2017), 77–97. MR3625736

Valeriy Sergeevich Isakov
Novosibirsk State University,
Pirogova st., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: v.isakov@g.nsu.ru