S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 1, стр. 354–363 (2026) УДК 519.17
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.022 MSC 05C75

О НЕБОЛЬШИХ ГРАФАХ ШИЛЛА

Цэньчжуй Цай, А.А. Махнёв, К.С. Ефимов

Представлено А.В. Пяткиным

Abstract: Koolen and Park found admissible intersection arrays of Shilla graphs with $b \le 3$. I.N. Beloussov, A.A. Makhnev, and Tsenzhui Cai listed admissible intersection arrays of Shilla graphs with $b = 4$. I.N. Beloussov, A.A. Makhnev, and Haiyan Li listed admissible intersection arrays of Shilla graphs with $b = 5$. Mingzhu Chen, A.A. Mahnev, and I.N. Beloussov listed intersection arrays of Shilla graphs with $b = 6$.

In this article, we study small Shilla graphs with $b \le 5$.

Keywords: distance regular graph, Shilla graph, triple intersection numbers.

1 Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины u графа Γ через $\Gamma_i(u)$ обозначим i-окрестность вершины u, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от u. Положим $[u] = \Gamma_1(u)$, $u^\perp = \{u\} \cup [u]$.

Пусть Γ – граф, $u, w \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[u] \cap [w]$ обозначается через $\mu(u, w)$ (через $\lambda(u, w)$), если u, w находятся на расстоянии 2

Jinzhuan Cai, Makhnev, A.A., Efimov, K.S., About small Shilla graphs.

Работа поддержана Естественнонаучным фондом Китая (проект 12171126) и грантом Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Поступила 12 декабря 2024 г., опубликована 28 апреля 2026 г.

(смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[u] \cap [w]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{1, 2, 3, ..., d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$.

Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и θ_1 – второе собственное значение графа. Тогда θ_1 не меньше $\min\left\{\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}, a_3\right\}$, причем $\theta_1 \geq \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$, если $d \geq 4$. Кулен и Пак назвали графом Шилла дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $\theta_1 = a_3$. В этом случае $\theta_1 = \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$ и $a = a_3$ делит k [2, теорема 7]. Положим $b = b(\Gamma) = k/a$.

Кулен и Пак нашли допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b \leq 3$. И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Цэньчжуй Цай перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 4$ [3]. И.Н. Белоусов, А.А. Махнев и Хайян Ли перечислили допустимые массивы пересечений графов Шилла с $b = 5$ [4]. Минчжу Чень, А.А. Махнев, И.Н. Белоусов перечислили массивы пересечений графов Шилла с $b = 6$ [5].

В работе изучаются небольшие графы Шилла с $b \leq 5$. Ввиду [2] дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{21, 16, 8; 1, 4, 14\}$ не существует ($b = 3$). Дистанционно регулярный графы с массивами пересечений $\{24, 18, 9; 1, 1, 16\}$, $\{27, 20, 10; 1, 2, 18\}$ не существуют [6], [7].

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 24, 3; 1, 3, 20\}$ *не существует.*

Теорема 3. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{25, 24, 9; 1, 1, 20\}$ *не существует.*

2 Тройные числа пересечений

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 – вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1 u_2 u_3 \atop r_1 r_2 r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$,

$\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix}\right] = |\left\{\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix}\right\}|$. Числа $\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix}\right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{smallmatrix}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако, в [6] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w)$, $V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{d}[ljh] &= p_{jh}^{U} - [0jh], \\ \sum_{l=1}^{d}[ilh] &= p_{ih}^{V} - [i0h], \qquad (+) \\ \sum_{l=1}^{d}[ijl] &= p_{ij}^{W} - [ij0]. \end{aligned}$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ hji \end{smallmatrix}\right]$. Вычисление параметров $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

3 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{20, 18, 6; 1, 1, 15\}$. Тогда Γ имеет $1+20+360+144 = 525$ вершин, спектр $20^1, 5^{210}, -1^{125}, -5^{189}$ и дуальную матрицу Q (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 210 & 125 & 189 \\ 1 & \frac{105}{2} & -\frac{25}{4} & -\frac{189}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{25}{4} & \frac{21}{4} \\ 1 & -\frac{35}{4} & \frac{125}{8} & -\frac{63}{8} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Числа пересечений равны*
$p^1_{11} = 1$, $p^1_{21} = 18$, $p^1_{22} = 234$, $p^1_{23} = 108$, $p^1_{33} = 36$;
$p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = 13$, $p^2_{13} = 6$, $p^2_{22} = 244$, $p^2_{23} = 102$, $p^2_{33} = 36$;
$p^3_{12} = 15$, $p^3_{13} = 5$, $p^3_{22} = 255$, $p^3_{23} = 90$, $p^3_{33} = 48$.

Доказательство. Прямые вычисления.

По лемме 1 Γ_3 – сильно регулярный граф с параметрами (525,144,48,36).

Зафиксируем вершины u, v, w графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Пусть $\Delta = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^2_{32} = 90$ на $k_3 = 144$ вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 1$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*
$[122] = r_{10} + r_{12} - 93$, $[123] = [132] = -r_{10} - r_{12} + 108$, $[133] = r_{10} + r_{12} - 103$;
$[211] = -r_{11} + 15$, $[212] = [221] = r_{11}$, $[222] = -r_{10} - r_{11} + 255$, $[223] = [232] = r_{10}$, $[233] = -r_{10} + 90$;
$[311] = r_{11} - 14$, $[312] = [321] = -r_{11} + 18$, $[322] = r_{11} - r_{12} + 72$, $[323] = [332] = r_{12}$, $[333] = -r_{12} + 48$,
где $55 \le r_{10} \le 90$, $14 \le r_{11} \le 15$, $13 \le r_{12} \le 48$, $103 \le r_{10} + r_{12} \le 108$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем $14 \le [322] = r_{11} - r_{12} + 72 \le 149$. Заметим, что $\{v, w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $182 - [322]$ вершин, поэтому $38 \le [322] \le 90$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. *Тогда*
$[122] = r_{32} + r_{33} - r_{34} + r_{35} - 75$, $[123] = [132] = -r_{32} - r_{33} + r_{34} - r_{35} + 90$, $[133] = r_{32} + r_{33} - r_{34} + r_{35} - 85$,
$[212] = -r_{35} + 15$, $[213] = r_{35}$, $[221] = -r_{34} + 15$, $[222] = -r_{32} + r_{34} + 240$, $[223] = r_{32}$, $[231] = r_{34}$, $[232] = r_{32} - r_{34} + r_{35}$, $[233] = -r_{32} - r_{35} + 90$;
$[312] = r_{35}$, $[313] = -r_{35} + 5$, $[321] = r_{34}$, $[322] = -r_{33} - r_{35} + 90$, $[323] = r_{33} - r_{34} + r_{35}$, $[331] = -r_{34} + 5$, $[332] = r_{33}$, $[333] = -r_{33} + r_{34} + 42$,
$0 \le r_{35} \le 5$ $0 \le r_{34} \le 5$ $38 \le r_{32} \le 90$ $0 \le r_{33} \le 47$
где $38 \le r_{32} \le 90$, $0 \le r_{33} \le 47$, $0 \le r_{34}, r_{35} \le 5$, $r_{32} + r_{35} \le 90$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем $38 \le [322] = -r_{33} - r_{35} + 90 \le 90$.

Напомним, что $p^3_{13} = 5$, $p^3_{23} = 90$, $p^3_{33} = 48$. Пусть v, w — вершины из Λ. Тогда число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $1554 = 5 \cdot 38 + 48 \cdot 38 \le d \le 5 \cdot 90 + 48 \cdot 90 = 4770$.

С другой стороны, $d = 90(89 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $259/15 \le 89 - \lambda \le 53$ и $36 \le \lambda \le 72 - 4/15$.

Лемма 4. *Пусть $d(u,v)=d(u,w)=3$, $d(v,w)=2$. Тогда*
$[122]=r_{28}-r_{29}-r_{30}-r_{31}+310$, $[123]=[132]=-r_{28}+r_{29}+r_{30}+r_{31}-195$, $[133]=r_{28}-r_{29}-r_{30}-r_{31}+200$,
$[211]=-r_{27}-r_{31}+15$, $[212]=r_{31}$, $[213]=r_{27}$, $[221]=r_{27}-r_{28}+r_{31}$, $[222]=r_{29}$, $[223]=-r_{27}+r_{28}-r_{29}-r_{31}+255$, $[231]=r_{28}$, $[232]=-r_{29}-r_{31}+255$, $[233]=-r_{28}+r_{29}+r_{31}-165$;
$[311]=r_{27}-r_{31}-14$, $[312]=-r_{31}+13$, $[313]=-r_{27}+6$, $[321]=-r_{27}+r_{28}-r_{31}+13$, $[322]=-r_{28}+r_{30}+r_{31}+34$, $[323]=r_{27}-r_{30}+42$, $[331]=-r_{28}+6$, $[332]=r_{28}-r_{30}+42$, $[333]=r_{30}$,
где $1\le r_{27},r_{28}\le 6$, $153\le r_{29}\le 198$, $0\le r_{30}\le 35$, $8\le r_{31}\le 13$, $r_{27}+r_{31}\le 14$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

Симметризация $[222]=r_{29}=r'_{29}$, $[333]=r_{30}=r'_{30}$.

Далее, $[213]=r_{27}=[231]'=r'_{28}$, $[212]'=r'_{31}=[221]=r_{27}-r_{28}+r_{31}$, поэтому $r'_{31}+r_{28}=r_{27}+r_{31}$, $[312]'=-r'_{31}+13=[321]=-r_{27}+r_{28}-r_{31}+13$ и $r'_{31}-r_{27}+r_{28}-r_{31}+13$

Аналогично, $[223]'=r'_{28}=[232]=r_{29}-r_{31}+15$, поэтому $r'_{28}-r_{29}+r_{31}=15$.

По лемме 4 имеем $7\le[322]=r_{28}-r_{29}-r_{30}+14\le 29$.

Как и выше, $12\le[322]$.

Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин (s,t) на расстоянии 1, где $s\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $t\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 2 имеем $[321]=-r_{11}+18$, где $14\le r_{11}\le 15$, поэтому $15=5\cdot 3\le f_1\le 5\cdot 4=20$. С другой стороны, по лемме 4 имеем $[311]=r_{27}-r_{31}-14$, $15\le f_1=-\sum_i(-r^i_{27}+r^i_{31})-1260\le 20$, $1240\le\sum_i(-r^i_{27}+r^i_{31})\le 1245$ и $13+7/9\le\sum_i(-r^i_{27}+r^i_{31})/90\le 13+5/6$.

Так как $1\le r_{27},r_{28}\le 6$, $8\le r_{31}\le 13$, то $-r_{27}+r_{31}\le 12$, противоречие.

Теорема 1 доказана.

4 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25,24,3;1,3,20\}$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{25,24,3;1,3,20\}$. Тогда Γ имеет $1+25+200+30=256$ вершин, спектр $25^1,5^{80},1^{100},-7^{75}$ и дуальную матрицу Q (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 80 & 100 & 75\\ 1 & 16 & 4 & -21\\ 1 & 0 & -4 & 3\\ 1 & -16 & 20 & -5 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. *Числа пересечений равны*
$p^1_{11}=0$, $p^1_{21}=24$, $p^1_{22}=152$, $p^1_{23}=24$, $p^1_{33}=6$;
$p^2_{11}=3$, $p^2_{12}=19$, $p^2_{13}=3$, $p^2_{22}=156$, $p^2_{23}=24$, $p^2_{33}=3$;

$p^3_{12} = 20$, $p^3_{13} = 5$, $p^3_{22} = 160$, $p^3_{23} = 20$, $p^3_{33} = 4$.

Доказательство. Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины u, v, w графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Пусть $\Delta = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^3_{23} = 20$ на $k_3 = 30$ вершинах.

Лемма 6. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 1$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[122] = -r_6 + 20$, $[123] = [132] = r_6$, $[133] = -r_6 + 5$;

$[212] = [221] = 20$, $[222] = r_6 - r_7 + 132$, $[223] = [232] = -r_6 + r_7 + 8$, $[233] = r_6 - r_7 + 12$;

$[312] = [321] = 4$, $[322] = r_7$, $[323] = [332] = -r_7 + 16$, $[333] = r_7 - 12$,

где $0 \le r_6 \le 5$, $12 \le r_7 \le 16$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

По лемме 6 имеем $12 \le [322] = r_7 \le 16$.

Лемма 7. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$. Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[122] = -r_{27} + r_{28} + r_{30}$, $[123] = [132] = r_{27} - r_{28} - r_{30} + 20$, $[133] = -r_{27} + r_{28} + r_{30} - 15$;

$[212] = r_{27} - r_{29} - r_{30} + 160$, $[213] = -r_{27} + r_{29} + r_{30} - 140$, $[221] = r_{30}$, $[222] = r_{29}$, $[223] = -r_{29} - r_{30} + 160$, $[231] = -r_{30} + 20$, $[232] = -r_{27} + r_{30}$, $[233] = r_{27}$;

$[312] = -r_{27}+r_{29}+r_{30}-140$, $[313] = r_{27}-r_{29}-r_{30}+145$, $[321] = -r_{30}+20$, $[322] = r_{27} - r_{28} - r_{29} - r_{30} + 160$, $[323] = -r_{27} + r_{28} + r_{29} + 2r_{30} - 160$, $[331] = r_{30} - 15$, $[332] = r_{28}$, $[333] = -r_{28} - r_{30} + 18$,

где $0 \le r_{27}, r_{28} \le 3$, $124 \le r_{29} \le 133$, $15 \le r_{30} \le 18$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

Симметризация. $[221] = r_{30} = r^*_{30}$, $[222] = r_{29} = r'_{29} = r^*_{29} = r^{\sim}_{29}$, $[233] = r_{27} = r'_{27}$, $[332] = r_{28} = r^*_{28}$.

Далее, $[232] = -r_{27} + r_{30} = -r^{\sim}_{27} + r^{\sim}_{30}$, $[333] = -r_{28} - r_{30} + 18$, поэтому $r_{28} + r_{30} = r'_{28} + r'_{30} = r^*_{28} + r^*_{30} = r^{\sim}_{28} + r^{\sim}_{30}$, $[233] = r_{27} = [332]^{\sim} = r^{\sim}_{28}$.

Аналогично, $[122]^* = -r^*_{27} + r^*_{28} + r^*_{30} = [212] = r_{27} - r_{29} - r_{30} + 160$, поэтому $-r_{27} - r^*_{27} + r_{28} + r_{29} + 2r_{30} = 160$.

По лемме 7 имеем $6 \le [322] = r_{27} - r_{28} - r_{29} - r_{30} + 160 \le 24$. Заметим, что $\{v,w\} \cup \Lambda(v) \cup \Lambda(w)$ содержит $42 - [322]$ вершин, поэтому $12 \le [322] \le 20$.

Напомним, что $p^3_{13} = 5$, $p^3_{23} = 20$, $p^3_{33} = 4$. Пусть v, w — вершины из Λ. Тогда число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $108 = 5 \cdot 12 + 4 \cdot 12 \le d \le 5 \cdot 16 + 4 \cdot 20 = 160$.

С другой стороны, $d = 20(19 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $5.4 \le 19 - \lambda \le 8$ и $11 \le \lambda \le 13.6$.

Лемма 8. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=2$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[122]=-r_{23}+20$, $[123]=[132]=r_{23}$, $[133]=-r_{23}+5$;

$[211]=-r_{24}+r_{26}+17$, $[212]=r_{24}$, $[213]=-r_{26}+3$, $[221]=-r_{22}+19$, $[222]=r_{23}-r_{24}+r_{25}+136$, $[223]=r_{22}-r_{23}+r_{24}-r_{25}+5$, $[231]=r_{22}+r_{24}-r_{26}-16$, $[232]=-r_{23}-r_{25}+24$, $[233]=-r_{22}+r_{23}-r_{24}+r_{25}-r_{26}+12$;

$[311]=r_{24}-r_{26}-14$, $[312]=-r_{24}+19$, $[313]=r_{26}$, $[321]=r_{22}$, $[322]=r_{24}-r_{25}$, $[323]=-r_{22}-r_{24}+r_{25}+19$, $[331]=-r_{22}-r_{24}+r_{26}+19$, $[332]=r_{25}$, $[333]=r_{22}+r_{24}-r_{25}-r_{26}-15$,

где $0\le r_{22}\le 5$, $3\le r_{23}\le 5$, $14\le r_{24}\le 19$, $0\le r_{25}\le 4$, $0\le r_{26}\le 3$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

Симметризация $[122]=-r_{23}+20$ влечет $r_{23}=r'_{23}$. Из равенств $[311]=r_{24}-r_{26}-14$, $[322]=r_{24}-r_{25}$ следует, что $r_{24}-r_{26}=r'_{24}-r'_{26}$, $r_{24}-r_{25}=r'_{24}-r'_{25}$.

Далее, $[333]=r_{22}+r_{24}-r_{25}-r_{26}-15$ влечет $r_{22}-r_{25}=r'_{22}-r'_{25}$, $[323]=-r_{22}-r_{24}+r_{25}+19=[332]'=r'_{25}$, поэтому $r_{22}+r_{24}-r_{25}+r'_{25}=19$.

По лемме 8 имеем $10\le[322]=r_{24}-r_{25}\le 19$.

Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин (s,t) на расстоянии 1, где $s\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $t\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 6 имеем $[321]=4$, $f_1=5\cdot 4=20$. С другой стороны, по лемме 8 имеем $[311]=r_{24}-r_{26}-14$, $\sum_i(r^i_{24}-r^i_{26})-280=20$ и $\sum_i(r^i_{24}-r^i_{26})/20=15$.

Отсюда $15\le r_{24}\le 19$

Подсчитаем число f_2 пар вершин (s,t) на расстоянии 2, где $s\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $t\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 6 имеем $12\le[322]\le 16$, поэтому $60=5\cdot 12\le f_2=5\cdot 16=80$. С другой стороны, по лемме 8 имеем $[312]=-r_{25}+6$, $60\le f_2=-\sum_i r^i_{25}+120\le 80$, $40\le\sum_i r^i_{25}\le 60$, и $2\le\sum_i r^i_{25}/20\le 3$.

Подсчитаем число f_3 пар вершин (s,t) на расстоянии 3, где $s\in\left\{{uv \atop 31}\right\}$ и $t\in\left\{{uv \atop 32}\right\}$. С одной стороны, по лемме 6 имеем $[323]=-r_7+16$, где $12\le r_7\le 16$, поэтому $0\le f_3=5\cdot 4=20$. С другой стороны, по лемме 8 имеем $[313]=-r_{23}+r_{25}$, $0\le f_3=\sum_i(-r^i_{23}+r^i_{25})\le 20$, и $0\le\sum_i(-r^i_{23}+r^i_{25})/20\le 1$.

Так как $2\le\sum_i r^i_{25}/20\le 3$, $3\le r_{23}\le 5$, то $\sum_i -r^i_{23}/20=r_{25}=3$. Проведем обратные вычисления: $\sum_i r^i_{25}=60$, $f_2=-\sum_i r^i_{25}+120=60$ и в лемме 6 имеем $[322]=12$. Аналогично, $\sum_i(-r^i_{23}+r^i_{25})/20=0$, $f_3=\sum_i(-r^i_{23}+r^i_{25})=0$ и $r_7=16$. Противоречие с тем, что $12\le[322]=r_7$.

Теорема 2 доказана.

5 Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{25,24,9;1,1,20\}$

В этом разделе Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{25,24,9;1,1,20\}$. Тогда Γ

имеет $1+25+600+270=896$ вершин, спектр $25^1, 5^{420}, -3^{300}, -7^{175}$ и дуальную матрицу Q (см [1]) собственных значений

$$\begin{pmatrix} 1 & 420 & 300 & 175 \\ 1 & 84 & -36 & -49 \\ 1 & 0 & -8 & 7 \\ 1 & -\frac{28}{3} & 20 & -\frac{35}{3} \end{pmatrix}.$$

Лемма 9. *Числа пересечений равны*
$p^1_{11}=0$, $p^1_{21}=24$, $p^1_{22}=360$, $p^1_{23}=216$, $p^1_{33}=54$;
$p^2_{11}=1$, $p^2_{12}=15$, $p^2_{13}=9$, $p^2_{22}=404$, $p^2_{23}=180$, $p^2_{33}=81$;
$p^3_{12}=20$, $p^3_{13}=5$, $p^3_{22}=400$, $p^3_{23}=180$, $p^3_{33}=84$.

Доказательство. Прямые вычисления.

Зафиксируем вершины u,v,w графа Γ и положим $\{ijh\} = \left\{ {uvw \atop ijh} \right\}$, $[ijh] = \left[{uvw \atop ijh} \right]$.

Пусть $\Delta = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Delta_2$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^3_{23} = 180$ на $k_3 = 270$ вершинах.

Лемма 10. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 1$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*
$[122] = r_6$, $[123] = [132] = -r_6 + 20$, $[133] = r_6 - 15$;
$[212] = [221] = 20$, $[222] = r_7$, $[223] = [232] = -r_7 + 380$, $[233] = r_7 - 200$;
$[312] = [321] = 4$, $[322] = -r_6 - r_7 + 360$, $[323] = [332] = r_6 + r_7 - 184$, $[333] = -r_6 - r_7 + 268$,
где $15 \le r_6 \le 20$, $200 \le r_7 \le 253$, $215 \le r_6 + r_7 \le 268$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

По лемме 10 имеем $92 \le [322] = -r_6 - r_7 + 360 \le 145$.

Лемма 11. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 3$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*
$[122] = -r_{27} + r_{28} - r_{29} + r_{30} - 160$, $[123] = [132] = -r_{27} - r_{28} + r_{29} - r_{30} + 180$, $[133] = r_{27} + r_{28} - r_{29} + r_{30} - 175$;
$[212] = -r_{30} + 20$, $[213] = r_{30}$, $[221] = -r_{29} + 20$, $[222] = -r_{27} + r_{29} + 380$, $[223] = r_{27}$, $[231] = r_{29}$, $[232] = r_{27} - r_{29} + r_{30}$, $[233] = -r_{27} - r_{30} + 180$;
$[312] = r_{30}$, $[313] = -r_{30} + 5$, $[321] = r_{30}$, $[322] = -r_{28} - r_{30} + 180$, $[323] = r_{28} - r_{29} + r_{30}$, $[331] = -r_{29} + 5$, $[332] = r_{28}$, $[333] = -r_{28} + r_{29} + 78$,
где $92 \le r_{27} \le 180$, $0 \le r_{28} \le 83$, $0 \le r_{29}, r_{30} \le 5$, $-r_{28} + r_{29} + 175 \le r_{27} + r_{30} \le -r_{28} + r_{29} + 180$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

По лемме 11 имеем $92 \le [322] = -r_{28} - r_{30} + 180 \le 180$.

Напомним, что $p^3_{13} = 5$, $p^3_{23} = 180$, $p^3_{33} = 84$. Пусть v,w — вершины из Λ. Тогда число d ребер между $\Lambda(w)$ и $\Lambda - (\{w\} \cup \Lambda(w))$ удовлетворяет неравенствам $= 5 \cdot 92 + 84 \cdot 92 \le d \le 5 \cdot 145 + 84 \cdot 180 =$.

С другой стороны, $d = 180(179 - \lambda)$, где λ — среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$. Поэтому $74/15 \le 179 - \lambda \le 3169/36$ и $179 - 3169/36 \le \lambda \le 179 - 74/15$.

Лемма 12. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 3, d(v,w) = 2$. *Тогда тройные числа пересечений равны:*

$[122] = r_{22}+r_{23}-r_{24}-r_{26}+300$, $[123] = [132] = -r_{22}-r_{23}+r_{24}+r_{26}-280$, $[133] = r_{22} + r_{23} - r_{24} - r_{26} + 285$*;*

$[211] = -r_{23} - r_{25} + 20$, $[212] = r_{25}$, $[213] = r_{23}$, $[221] = -r_{22} + 15$, $[222] = r_{26}$, $[223] = r_{22} - r_{26} + 385$, $[231] = r_{22} + r_{23} + r_{25} - 15$, $[232] = -r_{25} - r_{26} + 400$, $[233] = -r_{22} - r_{23} + r_{26} - 205$*;*

$[311] = r_{23} + r_{25} - 19$, $[312] = -r_{25} + 15$, $[313] = -r_{23} + 9$, $[321] = r_{22}$, $[322] = -r_{22} - r_{23} + r_{24} + 104$, $[323] = r_{23} - r_{24} + 75$, $[331] = -r_{22} - r_{23} - r_{25} + 24$, $[332] = r_{22} + r_{23} - r_{24} + r_{25} + 60$, $[333] = r_{24}$,

где $0 \le r_{22} \le 5$, $4 \le r_{23} \le 9$, $0 \le r_{24} \le 80$, $10 \le r_{25} \le 15$, $209 \le r_{26} \le 299$, $19 \le r_{23} + r_{25} \le 20$.

Доказательство. Упрощения формул $(+)$.

Симметризация $[222] = r_{26} = r'_{26}$, $[333] = r_{24} = r'_{24}$, $[212] = r_{25} = [221]' = -r'_{22} + 15$, поэтому $r_{25} + r'_{22} = 15$.

По лемме 12 имеем $90 \le [322] = -r_{22} - r_{23} + r_{24} + 104 \le 179$.

Пусть $d(u,v) = 3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин (s,t) на расстоянии 1, где $s \in \left\{ {uv \atop 31} \right\}$ и $t \in \left\{ {uv \atop 32} \right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $[321] = 4$, $f_1 = 5 \cdot 4 = 20$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[311] = r_{23} + r_{25} - 19$, $\sum_i (r^i_{23} + r^i_{25}) - 20 \cdot 171 = 20$, $\sum_i (r^i_{23} + r^i_{25}) = 20 \cdot 172 = 3440$ и $\sum_i (r^i_{23} + r^i_{25})/180 = 172/9$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин (s,t) на расстоянии 2, где $s \in \left\{ {uv \atop 31} \right\}$ и $t \in \left\{ {uv \atop 32} \right\}$. С одной стороны, по лемме 10 имеем $92 \le [322] \le 145$, поэтому $460 = 5 \cdot 92 \le f_2 = 5 \cdot 145 = 725$. С другой стороны, по лемме 12 имеем $[312] = -r_{25} + 15$, $460 \le f_2 = -\sum_i r^i_{25} + 2700 \le 725$, $1975 \le \sum_i r^i_{25} \le 2240$ и $2 \le \sum_i r^i_{25}/180 \le 3$.

Противоречие с тем, что $10 \le r_{25} \le 15$.

Теорема 3 доказана.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989. Zbl 0747.05073

[2] J.H. Koolen, J. Park, *Shilla distance-regular graphs*, Eur. J. Comb., **31**:8 (2010), 2064–2073. Zbl 1221.05117

[3] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, Jinzhuan Cai, *Some Shilla graphs with* $b = 4$ *do not exist*, Vestnik Gomel Univ., **2021**:6 (2021), 110–114. Zbl 1491.05203

[4] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, Haiyan Li, *Some Shilla graphs with* $b = 5$ *do not exist*, Vestnik Perm Univ., **2022**:2 (2022), 40–45.

[5] I.N. Belousov, M.P. Golubyatnikov, A.A. Makhnev, M.S. Nirova, *Three infinite series Shilla graphs do not exist*, Dokl. Math., **103**:3 (2021), 133–138. Zbl 1477.05065

[6] A.E. Brouwer, S. Sumaloj, C. Worawannotai, *The nonexistence of distance-regular graphs with intersection arrays* $\{27,20,10;1,2,18\}$ *and* $\{36,28,4;1,2,24\}$, Australas. J. Comb., **66**:2 (2016), 330–332. Zbl 1375.05072

[7] K. Coolsaet, A. Jurišić, *Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs*, J. Comb. Theory, Ser. A, **115**:6 (2008), 1086–1095. Zbl 1182.05132

Jinzhuan Cai
School of Science, Hainan University,
Renmin Avenue, 58,
570228, Haikou, P.R. China
Email address: caijzh12@163.com

Alexandr A. Makhnev
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
S. Kovalevskoy str., 4,
625090, Yekaterinburg, Russia
Hainan University,
Renmin Avenue, 58,
570228, Haikou, P.R. China
Email address: makhnev@imm.uran.ru

Konstantin S. Efimov
Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
S. Kovalevskoy str., 4,
625090, Yekaterinburg, Russia
Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin
Mira str., 19,
620062, Yekaterinburg, Russia
Ural State Mining University,
Kuybysheva str., 30,
620144, Yekaterinburg, Russia
Email address: konstantin.s.efimov@gmail.com