S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, №1, стр. 343–353 (2026) УДК 517.956.6
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.021 MSC 35M10, 35R11, 35C15

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

О.Х. Абдуллаев

Представлено О.С. Розановой

Abstract: In this work, we discuss an inverse problem with a nonlinear gluing condition for a loaded diffusion-wave equation with two lines of changing type, containing a nonlinear loaded term. Uniqueness and existence are proven using theories of integral equations and the methods of successive approximations and com pressed mappings. The necessary classes and sufficient conditions for the given functions are determined to ensure the unique solvability of the problem under study.
Keywords: inverse problem, loaded diffusion-wave equation, nonlinear loaded, non linear gluing condition, uniqueness and existence.

1 Введение

Данная работа посвящена исследованию обратной задачи с нелинейными условиями склеивания для нагруженного парабола-гиперболического уравнения

$$f(x,y) = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u + p_0(x,\ y; u(x;0)); \text{ при } x>0;\ y>0, \\ u_{xx} - u_{yy} + p_1(x,\ y; u(x;0)); \text{ при } x>0;\ \ y<0, \\ u_{xx} - u_{yy} + p_2(x,\ y; u(0;\ y)); \text{ при } x<0;\ y>0, \end{cases} \qquad (1)$$

Abdullaev, O.Kh., Inverse problem for a loaded diffusion-wave equation with the Caputo fractional derivative.

Поступила 30 сентября 2024 г., опубликована 28 апреля 2026 г.

с оператором Капуто [1]:

$$ {}_C D_{0y}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y (y-z)^{-\alpha} f'(z) dz, $$

дробного порядка $0 < \alpha < 1$, где $p_i(\cdot)$, $i = 0, 1, 2$ - заданные функционалы, действующие на следы решения уравнения (1).

Локальная задача с разрывными (линейными) условиями склеивания для уравнения

$$ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - sign(xy)}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 + sign(xy)}{2} \cdot {}_C D_{0y}^{\alpha} u = f(x, y), \ (\alpha \in (0, 1)) $$

была исследована Б.Кадыркуловым [2], где $f(x, y)$-заданная функция. Единственность решения была доказана методом интегралов энергии, а существование доказано методом интегральных уравнений. Следует отметить, что в работе [3], доказано однозначная разрешимость прямой задачи с интегральными условиями склеивания для нагруженного диффузионно-волнового уравнения с двумя линиями изменения типа. При исследовании поставленной задачи были получены нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (относительно $u(x, 0) = \tau_1(x)$) и линейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода (относительно $u_y(0, y) = \tau_2'(y)$) со слабой особенностью. В этой работе, доказано однозначная разрешимость нелинейных интегральных уравнений при определенных условиях на заданные функции и при ограничениях на размерность рассматриваемой области.

Прямые с непрерывными и разрывными условиями склеивания для парабола-гиперболических нагруженных уравнений с одной линией изменения типа, содержащие нелинейные нагрузки были исследованы в работах [4]-[5]. А в работах [6]-[7] были изучены обратные задачи для таких уравнений.

Хотелось бы отметить, что для парабола-гиперболических нагруженных уравнений дробного порядка с двумя линиями изменения типа исследовано только прямая задача [3], а обратная задача не было исследовано.

В данной работе вставиться и исследуется обратная задача для уравнения (1). Основная часть работы разделена на три пункта. В первом пункте приведена постановка обратной задачи и получены основные функциональные соотношения. В следующем пункте однозначная разрешимость изучаемой задачи сводится к однозначной разрешимости двух нелинейных интегральных уравнений. Основной результат и метод исследования нелинейных интегральных уравнений изложены в четвёртом пункте статьи.

2 Постановка задачи и функциональные соотношения

Рассмотрим уравнение (1) в конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной отрезками $A_1A_2; A_2B_2$ на прямых $x = 1; y = h$ при $x \geq 0; y \geq 0$, и $A_1C_1; C_1B_1$ на характеристиках $x - y = 1; x + y = 0$ уравнения (1) при $x > 0; y < 0$, а также отрезки $B_1C_2; C_2B_2$ на характеристиках $x + y = 0$, $y - x = h$ уравнения (1) при $x < 0; y > 0$, здесь $h = const > 0$.

Прямоугольную часть смешанной области Ω обозначим через Ω_0, а гиперболические части через Ω_1 при $x > 0$ и Ω_2 при $x < 0$, также введем обозначение $I = \{x : 0 < x < 1\}$.

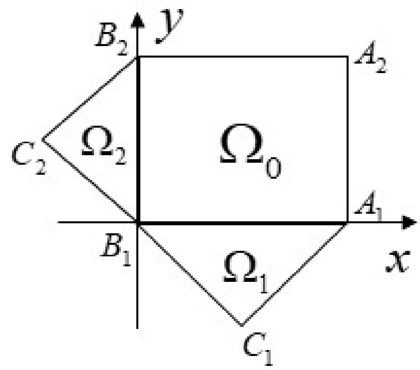

Рис. 1. .

Пусть,

$$f(x,y) \ = \begin{cases} f_1(x)g_1(y), \ (x,y) \in \Omega_1; \\ f_2(y)g_2(x), \ (x,y) \in \Omega_2; \\ f_1(x)g_0(y), \ (x,y) \in \Omega_0. \end{cases} \tag{2}$$

где $g_0(y), g_1(y), g_2(x)-$ заданные функции, $f_1(x)$, $f_2(y)-$ неизвестные функции, которых требуется определить.

Задача IP. Требуется найти тройку функций $\{f_1(x), f_2(y), u(x;y)\}$ для уравнения (1) в области Ω со следующими свойствами:

1. $f_1(x) \in C(0,1) \cap l_1(0,1), \ f_2(y) \in C(0,h) \cap l_1(0,h)$;
2. $u \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$; $u_{xx} \in C(\Omega_0)$, ${}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_0 \cup I)$,
3. $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(1;y) \ = \varphi(y), \ \ 0 \le y \le h; \tag{3}$$

$$u(x;-x) = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}; \tag{4}$$

$$u(-y;y) = \psi_2(y), \quad 0 \le y \le \frac{h}{2}; \tag{5}$$

дополнительным условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{y=-x} = \varphi_1(x), \ 0 \le x \le \frac{1}{2}; \ \frac{\partial u}{\partial n}|_{y=x-1} = \varphi_2(x), \ \frac{1}{2} \le x \le 1; \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{x=-y} = \varphi_3(y), \ 0 \le y \le \frac{h}{2}; \ \frac{\partial u}{\partial n}|_{x=y-1} = \varphi_4(y), \quad \frac{h}{2} \le y \le h; \tag{7}$$

и нелинейным условиям склеивания:

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha} u_y(x;y) = \lambda_1(x)u_y(x;-0) + \lambda_2(x)u_x(x;-0)+$$

$$+\lambda_3(x)r_1(x,u(x,0)) + \lambda_4(x), \ 0 < x < 1; \tag{8}$$

$$u_x(+0;y) = \mu_1(y)u_x(-0;y) + \mu_2(y)u_y(-0;y)+$$

$$+\mu_3(y)r_2(y,u(0;y)) + \mu_4(y); \ \ 0 < y < h, \tag{9}$$

где $l_1(0,1)-$ класс интегрируемых функций в интервале $(0,1)$, а $\lambda_k(x)$, $\mu_k(y)$, $(k = 1,2,3,4)$, $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i+2}(y)$, $(i = 1,2)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(y)$, $\varphi(y)$, $r_1(x,z)$, $r_2(y,z)-$

заданные достаточно гладкие функции, причем,
$\varphi_1'\left(\frac{1}{2}\right)=-\varphi_2'\left(\frac{1}{2}\right),\ \varphi_3'\left(\frac{h}{2}\right)=-\varphi_4'\left(\frac{h}{2}\right),\ \sum\limits_{k=1}^{3}\lambda_k^2(x)\neq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{3}\mu_k^2(x)\neq 0$.

2.1. Нахождение функций $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Введем обозначения $u(x,0)=\tau_1(x),\ \ 0\leq x\leq 1,\ u(0,y)=\tau_2(y),\ 0\leq y\leq h$. Учитывая (2), общее решение уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2, соответственно, ищем в виде

$$u(x,y)=F_1(x+y)+F_2(x-y)+\omega(x)g_1(y)+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x+y}^{x-y}d\eta\int\limits_{x+y}^{\eta}p_1\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2};\tau_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)d\xi \tag{10}$$

и

$$u(x,y)=F_1(x+y)+F_2(x-y)+w(y)g_2(x)+$$
$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x+y}^{y-x}d\eta\int\limits_{x+y}^{\eta}p_2\left(\frac{\xi-\eta}{2},\frac{\xi+\eta}{2};\tau_2\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\right)d\xi, \tag{11}$$

где $F_1(\cdot)$ и $F_2(\cdot)-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функции, а функции $\omega(x)$ и $w(y)$ любые регулярные решения, соответственно, уравнений $\omega''(x)-k\omega(x)=f_1(x)$ и $w''(y)-kw(y)=f_2(y)$, здесь $(k=const)$.

Далее, в силу дополнительных условий (6) и (7) из (10) и (11), соответственно находим

$$f_1(x)\ =\begin{cases}\frac{1}{g_1(-x)}\left(\sqrt{2}\varphi_1'(x)+p_1(x,x,\tau_1(x))\right),\ 0\leq x\leq\frac{1}{2};\\ -\frac{1}{g_1(x-1)}\left(\sqrt{2}\varphi_2'(x)+p_1(x,x-1,\tau_1(x))\right),\ \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\end{cases} \tag{12}$$

и

$$f_2(y)\ =\begin{cases}-\frac{1}{g_2(-y)}\left(\sqrt{2}\varphi_3'(y)+p_2(-y,y,\tau_2(y))\right),\ 0\leq y\leq\frac{h}{2};\\ \frac{1}{g_2(y-h)}\left(\sqrt{2}\varphi_4'(y)-p_2(y-h,y,\tau_2(y))\right),\ \frac{h}{2}\leq y\leq h.\end{cases} \tag{13}$$

Следовательно, заключаем что, если функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$ будут найдены однозначно, то неизвестные функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ единственным образом определяются из (12) и (13), соответственно. С этой целью, однозначную разрешимость поставленную задачу сведем к задаче однозначного нахождения функций $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$.

2.2. Основные функциональные соотношения. В силу решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ \ 0\leq x\leq 1;\ \ u_y(x,-0)=\nu_1{}^{-}(x),\ \ 0<x<1$$

и

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ \ 0\leq y\leq h;\ \ u_x(-0,y)=\nu_2{}^{-}(y),\ \ 0<y<h,$$

а также, воспользовавшись краевыми условиями (4) и (5), находим основные функциональные соотношения

$$\nu_1{}^{-}(x)=\tau_1'(x)-\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^x p_1\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x f_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)g_1\left(\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi,\ 0<x<1; \tag{14}$$

и

$$\nu_2{}^-(y) = \tau_2'(y) - \psi_2'\left(\frac{y}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_0^y p_2\left(\frac{\xi-y}{2}, \frac{\xi+y}{2}; \tau_2'\left(\frac{\xi+y}{2}\right)\right) d\xi +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^y f_2\left(\frac{\xi+y}{2}\right) g_2\left(\frac{\xi-y}{2}\right) d\xi, , 0 < y < h, \tag{15}$$

соответственно из гиперболических областей Ω_1 и Ω_2.

Вводя обозначения $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \nu_1{}^+(x)$ и $u_x(+0,y) = \nu_2{}^+(y)$, из нелинейных условий склеивания (8) и (9), имеем

$$\nu_1{}^+(x) = \lambda_1(x)\nu_1{}^-(x) + \lambda_2(x)\tau_1'(x) + \lambda_3(x)r_1(x,\tau_1(x)) +$$

$$+\lambda_4(x), x \in [0,1], \tag{16}$$

$$\nu_2{}^+(y) = \mu_1(y)\nu_2{}^-(y) + \mu_2(y)\tau_2'(y) + \mu_3(y)r_2(y,\tau_2(y)) +$$

$$+\mu_4(y),\ y \in [0,h]. \tag{17}$$

Далее, из диффузионного уравнения (1) при $y \to +0$, с учетом равенства $\lim\limits_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}f(y) = \Gamma(\alpha)\lim\limits_{y\to 0} y^{1-\alpha}f(y)$ (см [8]) и условия склеивания (16), имеем

$$\tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\nu_1^-(x) - \Gamma(\alpha)\lambda_2(x)\tau_1'(x) -$$

$$-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)r_1(x,\tau_1(x)) - f_1(x)g_1(0) -$$

$$-\Gamma(\alpha)\lambda_4(x) + p_0(x,0;\tau_1(x)) = 0 \tag{18}$$

Учитывая (12), подставляем (14) в уравнение (18), и получим интегро-дифферен циальное уравнение относительно $\tau_1(x)$:

$$\tau_1''(x) - \Gamma(\alpha)(\lambda_1(x)+\lambda_2(x))\tau_1'(x) -$$

$$-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)r_1(x,\tau_1(x)) + p_0(x,0;\tau_1(x)) - g_1(0)A_1(x,\tau_1(x)) +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x p_1\left(\frac{\xi+x}{2}, \frac{\xi-x}{2}; \tau_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right) d\xi -$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x A_1\left(\frac{\xi+x}{2}, \tau_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right) g_1\left(\frac{\xi-x}{2}\right) d\xi -$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x B_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right) g_1\left(\frac{\xi-x}{2}\right) d\xi - \Gamma(\alpha)\left(\lambda_4(x) - \lambda_1(x)\psi_1'\left(\frac{x}{2}\right)\right) +$$

$$+g_1(0)B_1(x) = 0, \tag{19}$$

где

$$A_1(x,\tau_1(x)) \ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{g_1(-x)}p_1(x,-x,\tau_1(x)),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ -\frac{1}{g_1(x-1)}p_1(x,x-1,\tau_1(x)),\ \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{array} \right.$$

$$B_1(x) \ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{g_1(-x)}\varphi_1'(x),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}; \\ -\frac{\sqrt{2}}{g_1(x-1)}\varphi_2'(x),\ \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{array} \right.$$

3 Нелинейные интегральные уравнения

В силу класс искомой функции, учитывая (14), имеем

$$\tau_1(0)=\psi_1(0),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}\varphi_1'(0)-\psi_1'(0)). \tag{20}$$

Далее, интегрируя уравнение (19) от 0 до x дважды, с учетом условий (20), получим нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода:

$$\tau_1(x)+\int\limits_0^x K(x,z)\tau_1(z)dz+\int\limits_0^x (x-z)\Phi_1(z;\tau_1(z))dz=G(x), \tag{21}$$

где

$$K(x,z)=\Gamma(\alpha)(x-z)(\lambda_1'(z)+\lambda_2'(z))-\Gamma(\alpha)(\lambda_1(z)+\lambda_2(z)), \tag{22}$$

$$\Phi_1(x;\tau_1(x))=p_0(x,\tau_1(x))-\Gamma(\alpha)\lambda_3(x)r_1(x,\tau_1(x))-g_1(0)A_1(x,\tau_1(x))+$$
$$+\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int_0^x p_1\left(\frac{\xi+x}{2},\frac{\xi-x}{2};\tau_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right)d\xi-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\lambda_1(x)\int\limits_0^x A_1\left(\frac{\xi+x}{2},\tau_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right)g_1\left(\frac{\xi-x}{2}\right)d\xi, \tag{23}$$

$$G(x)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}\int\limits_0^x\lambda_1(t)(x-t)dt\int\limits_0^t B_1\left(\frac{\xi+t}{2}\right)g_1\left(\frac{\xi-t}{2}\right)d\xi+$$
$$+\Gamma(\alpha)\int\limits_0^x(x-t)\left(\lambda_4(t)-\lambda_1(t)\psi_1'\left(\frac{t}{2}\right)\right)dt-g_1(0)\int\limits_0^x(x-t)B_1(t)dt+$$
$$+\psi_1(0)+\frac{x}{2}(\sqrt{2}\varphi_1'(0)-\psi_1'(0)). \tag{24}$$

С другой стороны, воспользовавшись решением первой краевой задачи для параболического уравнения в области Ω_0, находим второе функциональное соотношение между $\tau_2(y)$ и $\nu_2^+(y)$ на отрезке B_1B_2, которое имеет вид [2, 9]:

$$\nu_2^+(y)=-\int_0^y K_1(y-t)\tau_2'(t)dt+F(y), \tag{25}$$

где

$$K_1(y-t)=\frac{1}{(y-t)^\beta}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}+2\sum_{n=1}^{\infty}e_{1,\beta}^{1,1-\beta}\left(-\frac{2n}{(y-t)^\beta}\right)\right],\ \beta=\frac{\alpha}{2},$$

$$F(y)=2\int\limits_0^y\sum_{m=0}^{\infty}(y-\eta)^{-\beta-1}e_{1,\beta}^{1,-\beta}\left(-\frac{2m+1}{(y-\eta)^\beta}\right)\varphi(\eta)d\eta-$$
$$-\int\limits_0^1\sum_{m=0}^{\infty}y^{-\alpha}e_{1,\beta}^{1,1-\alpha}\left(-\frac{2m-\xi}{y^\beta}\right)\tau_1(\xi)d\xi-$$
$$-\lim_{x\to+0}\int\limits_0^y\int\limits_0^l G_x(x,y,\xi,\eta)p_0(\xi,\eta,\tau_1(\xi))d\xi d\eta+$$

$$+\lim_{x\to+0}\int\limits_0^y d\eta\int\limits_0^1 G_x(x,y,\xi,\eta)f_1(\xi)g_0(\eta)d\xi.$$

$e_{1,\beta}^{1,\gamma}(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\gamma-\beta n)}-$ функция типа Райта [8], а

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\alpha/2-1}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)-\right.$$

$$\left.-e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}\left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(y-\eta)^{\alpha/2}}\right)\right],$$

функции Грина первой краевой задачи [8, 10].

Заметим, что ядро $K(y-t)$ представленное в виде ряда функций типа Райта, имеет слабую особенность (см [8], (2.2.5), (2.2.24)), т.е. $|K(y-t)|\le const\cdot(y-t)^{-\beta}$. Также, можно убедится что $|F_1(y)|\le const$ (см. [8])

Учитывая (15), (17) и (25), получим:

$$\mu_0(y)\tau_2'(y)+\int\limits_0^y K_1(y-t)\tau_2'(t)dt+\mu_3(y)r_2(y,\tau_2(y))-$$

$$-\frac{\mu_1(y)}{2}\int\limits_0^y p_2\left(\frac{\xi+y}{2},\frac{\xi-y}{2},\tau_2\left(\frac{\xi+y}{2}\right)\right)dz+$$

$$+\frac{\mu_1(y)}{2}\int\limits_0^y A_2\left(\frac{\xi+y}{2},\tau_2\left(\frac{\xi+y}{2}\right)\right)g_2\left(\frac{\xi-y}{2}\right)d\xi=F_1(y), \tag{26}$$

где $\mu_0(y)=\mu_1(y)+\mu_2(y)$,

$$F_1(y)=F(y)+\mu_1(y)\psi_2'\left(\frac{y}{2}\right)-\frac{\mu_1(y)}{2}\int\limits_0^y B_2\left(\frac{\xi+y}{2}\right)g_2\left(\frac{\xi-y}{2}\right)d\xi-\mu_4(y),$$

$$A_2(y,\tau_2(y))=\begin{cases}-\frac{1}{g_2(-y)}p_2(-y,y,\tau_2(y)),\ 0\le y\le\frac{h}{2};\\ -\frac{1}{g_2(y-h)}p_2(y-h,y,\tau_2(y)),\ \frac{h}{2}\le h\le 1,\end{cases} \tag{27}$$

$$B_2(y)=\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{g_2(-y)}\varphi_2'(y),\ 0\le y\le\frac{h}{2};\\ \frac{\sqrt{2}}{g_2(y-h)}\varphi_3'(y),,\ \frac{h}{2}\le h\le 1.\end{cases}$$

Учитывая $\int\limits_z^y K_1(t-z)dt=(y-z)^{1-\beta}K_2(y-z)$, причем $|K_2(y-z)|\le const$, интегрируем уравнение (26) от 0 до y, и имеем

$$\mu_0(y)\tau_2(y)-\mu_0(0)\tau_2(0)-\int\limits_0^y\mu_0'(t)\tau_2(t)dt+\int\limits_0^y K_0(y,t)\tau_2(t)dt-\tau_2(0)y^{1-\beta}K_2(y)+$$

$$+\int\limits_0^y\mu_3(t)r_2(t,\tau_2(t))dt-\int\limits_0^y\frac{\mu_1(t)}{2}dt\int\limits_0^t p_2\left(\frac{\xi+t}{2},\frac{\xi-t}{2},\tau_2\left(\frac{\xi+t}{2}\right)\right)dz+$$

$$+\int\limits_0^y \frac{\mu_1(t)}{2}dt\int\limits_0^t A_2\left(\frac{\xi+t}{2},\tau_2\left(\frac{\xi+t}{2}\right)\right)g_2\left(\frac{\xi-t}{2}\right)d\xi=\int\limits_0^y F_1(t)dt \tag{28}$$

где $K_0(y,t)=\left[(y-t)^{1-\beta}K_2(y-t)\right]_t'$.

Пусть $\mu_0(y)\neq 0$, тогда интегральное уравнение (28) перепишем в виде:

$$\tau_2(y)+\int\limits_0^y K_3(y,t)\tau_2(t)dt+\int\limits_0^y \frac{\mu_3(t)}{\mu_0(y)}r_2(t,\tau_2(t))dt-$$

$$-\int\limits_0^y \frac{\mu_1(t)}{2\mu_0(y)}dt\int\limits_0^t \Phi_2\left(\frac{\xi+t}{2},\frac{\xi-t}{2},\tau_2\left(\frac{\xi+t}{2}\right)\right)d\xi=F_2(y), \tag{29}$$

где $K_3(y,t)=\frac{K_0(y,t)-\mu_2'(t)}{\mu_0(y)}$,

$$\Phi_2\left(\xi,\eta,\tau_2(\xi)\right)=p_2\left(\xi,\eta,\tau_2(\xi)\right)-A_2\left(\xi,\tau_2(\xi)\right)g_2(\eta), \tag{30}$$

$$F_2(y)=\frac{\psi_1(0)(\mu_0(0)+y^{1-\beta}K_2(y))}{\mu_0(y)}+\frac{1}{\mu_0(y)}\int\limits_0^y F_1(t)dt. \tag{31}$$

4 Основной результат. Исследования нелинейных интегральных уравнений

Пусть,

$$r_1(x,z)\in C\left([0,1]\times R\right), r_2(y,z)\in C\left([0,h]\times R\right), |r_i(\cdot,z)|\leq const|z|, \tag{32}$$

$$p_0(x,y,z)\in C\left(\overline{\Omega_0}\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\Omega_0\times R\right),\ \ |p_0(x,y,z)|\leq const|z|, \tag{33}$$

$$p_i(x,y,z)\in C\left(\overline{\Omega_i}\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\Omega_i\times R\right),\ \ |p_i(x,y,z)|\leq const|z|, \tag{34}$$

$$|p_0(x,y;z_1)-p_0(x,y;z_2)|\leq L_0|z_1-z_2|,\ \forall(x,y)\in\Omega_0,\ \ \forall z_1,z_2\in R, \tag{35}$$

$$|p_i\left(x,y;z_1\right)-p_i\left(x,y;z_2\right)|\leq L_i|z_1-z_2|,\ \forall(x,y)\in\Omega_i,\ \ \forall z_1,z_2\in R, \tag{36}$$

$$|r_1(x,z_1)-r_1(x,z_2)|\leq L_3|z_1-z_2|,\ \forall x\in(0,1),\ \ \forall z_1,z_2\in R, \tag{37}$$

$$|r_2(y,z_1)-r_2(y,z_2)|\leq L_4|z_1-z_2|,\ \forall y\in(0,h),\ \ \forall z_1,z_2\in R, \tag{38}$$

где $L_0, L_i=const>0$, $(i=1,\bar{}4)$. Тогда, имеет место,

Теорема 1. *Пусть имеют место условия* (32)-(38) *и*

$$\lambda_i(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\ \mu_i(y),\varphi(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h)\,(i=\overline{3,4}); \tag{39}$$

$$\lambda_j(x)\in C^1[0,1],\ (j=1,2),\ \psi_1(x),\varphi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{1}{2}\right); \tag{40}$$

$$\mu_j(y)\in C^1[0,h],\ (j=1,2),\ \varphi_3(y),\psi_2(y)\in C^1\left[0,\frac{h}{2}\right]\cap C^2\left(0,\frac{h}{2}\right); \tag{41}$$

$$\varphi_4(y)\in C^1\left[\frac{h}{2},h\right]\cap C^2\left(\frac{h}{2},h\right),\ \varphi_2(x)\in C^1\left[\frac{1}{2},1\right]\cap C^2\left(\frac{1}{2},1\right), \tag{42}$$

$$g_0(y),g_1(y)\in C^1[0,h],\ g_2(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1); \tag{43}$$

тогда решение задачи IP существует и единственно.

Доказательство. Сперва доказываем однозначную разрешимость нелинейных интегральных уравнений (21) и (29). В силу класс заданных функций из (22) и (24) имеем

$$|K(x,z)| \le k_0 = const > 0,\ \forall (x,z) \in [0,1] \times [0,x], \tag{44}$$

$$|G(x)| \le G_0 = const > 0,\ \forall x \in [0,1]. \tag{45}$$

С другой стороны, воспользовавшись неравенствами (35)-(37) из (23), получим

$$|\Phi_1(x;z_1) - \Phi_1(x;z_2)| \le L_0|z_1 - z_2| + c_1L_3\,|z_1 - z_2| + c_2L_1\,|z_1 - z_2| +$$
$$+c_3L_1\left|\int\limits_0^x \left|z_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right) - z_2\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right| d\xi\right| =$$
$$= c_0|z_1 - z_2| + c_3L_1\left|\int\limits_0^x \left|z_1\left(\frac{\xi+x}{2}\right) - z_2\left(\frac{\xi+x}{2}\right)\right| d\xi\right|, \tag{46}$$

где $c_0 = L_0 + c_1L_3 + c_2L_1,\ _1, c_2, c_3 = const > 0$.

Разрешимость интегрального уравнения (21) доказываем методом последовательных приближений, при этом, функциональную последовательность относительно $\{\tilde{\tau}_n(x)\}$ $(\tilde{\tau}(x) = \tau_1(x))$ построим основываясь на рекуррентное уравнение

$$\tilde{\tau}_n(x) = G(x) - \int\limits_0^x K(x,z)\tilde{\tau}_{n-1}(z)dz - \int\limits_0^x (x-z)\Phi_1(z;\tilde{\tau}_{n-1}(z))dz \tag{47}$$

где $\tilde{\tau}_0(x) = G(x)$.

Учитывая $|\Phi_1(z;\tilde{\tau}(z))| \le \Phi_{01},\ \ \Phi_{01} = const > 0$ с учетом неравенств (44),(45) и (46), можно убедиться, что

$$|\tilde{\tau}_1(x) - \tilde{\tau}_0(x)| \le k_0\Phi_{01}x + \Phi_{01}\frac{x^2}{2} \le \Phi_{01}(k_0+1)x,$$
$$|\tilde{\tau}_2(x) - \tilde{\tau}_1(x)| \le \Phi_{01}(k_0+1)\left(k_0 + c_0 + c_3L_1\right)\frac{x^2}{2!},$$
$$\ldots$$
$$|\tilde{\tau}_n(x) - \tilde{\tau}_{n-1}(x)| \le \left(k_0 + c_0 + c_3L_1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\Phi_{01}(k_0+1). \tag{48}$$

Из оценки (48) следует, что оператор в правой части интегрального уравнения (47) является сжимающим. Следовательно, для этого оператора существует единственная неподвижная точка, т.е. интегральное уравнение (21) имеет единственное решение в классе $C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$. После определения функции $\tau_1(x)$, из функционального соотношения (14) находим $\nu_1^-(x)$, а также из (12) однозначно определяется функция $f_1(x)$. Следовательно, решение исследуемой задачи в области Ω_1 можно восстановить как решение задачи Коши.

Теперь исследуем однозначную разрешимость интегрального уравнения (29). В силу класс заданных функций, (34) и (41) - (43), находим

$$|K_3(y,t)| \le K_{03} = const > 0,\ 0 \le t \le y \le h;$$
$$|\Phi_2(x,y,z)| \le \Phi_{02} = const > 0,\ \forall (x,y) \in \Omega_2,\ \forall z \in (-\infty, +\infty);$$
$$\left|\frac{\mu_3(t)}{\mu_0(y)}\right| \le \mu_{03} = const > 0,\ \ \left|\frac{\mu_1(t)}{2\mu_0(y)}\right| \le \mu_{02} = const > 0,\ 0 \le t \le y \le h.$$

Учитывая (36), (27), из (30) нетрудно убедится, что

$$|\Phi_2(\xi,\eta,z_1)-\Phi_2(\xi,\eta,z_2)|\le L_2|z_1-z_2|+g_{02}L_2|z_1-z_2|=c_4L_2|z_1-z_2|,$$

где $c_4=L_2(1+g_{02})$, $\left|\frac{g_2(\eta)}{g_2(\xi)}\right|\le g_{02}$, $g_{02}=const>0$.

Рассмотрим рекуррентное уравнение

$$\tau_n^*(y)+\int\limits_0^y K_3(y,t)\tau_{n-1}^*(t)dt+\int\limits_0^y \frac{\mu_3(t)}{\mu_0(y)}r_2(t,\tau_{n-1}^*(t))dt-$$

$$-\int\limits_0^y \frac{\mu_1(t)}{2\mu_0(y)}dt\int\limits_0^t \Phi_2\left(\frac{\xi+t}{2},\frac{\xi-t}{2},\tau_{n-1}^*\left(\frac{\xi+t}{2}\right)\right)d\xi=F_2(y), \tag{49}$$

где $\tau^*(y)=\tau_2(y)$.

Предполагая $\tau_0^*(y)=F_2(y)$, из рекуррентного уравнения (49), составим функциональную последовательность $\{\tau_n^*(y)\}$ сходимость которая следует из неравенств:

$$|\tau_1^*(y)-\tau_0^*(y)|\le K_{03}f_{02}\cdot y+\mu_{03}r_0y+\mu_{01}\Phi_{02}\cdot\frac{y^2}{2}\le\tilde{c}\cdot y,$$

$$|\tau_2^*(y)-\tau_1^*(y)|\le K_{03}\tilde{c}\frac{y^2}{2!}+\mu_{03}\tilde{c}L_4\frac{y^2}{2!}+\mu_{01}\tilde{c}L_2\frac{y^3}{3!}\le\tilde{c}\frac{y^2}{2!}\tilde{c}_0;$$

$$|\tau_3^*(y)-\tau_2^*(y)|\le\tilde{c}\tilde{c}_0\left(K_{03}+\mu_{03}L_4+\mu_{01}L_2\right)\frac{y^3}{3!}\le\tilde{c}{\tilde{c}_0}^2\frac{y^3}{3!};$$

$$\ldots$$

$$|\tau_n^*(y)-\tau_{n-1}^*(y)|\le\tilde{c}{\tilde{c}_0}^{n-1}\frac{y^n}{n!},$$

при $0<y<h\le 1$, где $\tilde{c}=K_{03}f_{02}+\mu_{03}r_0+\mu_{01}\Phi_{02}$, $\tilde{c_0}=K_{03}+\mu_{03}L_4+\mu_{01}L_2$. Отметим также, что если $1<y<h<\infty$, то можно получить аналогичные неравенства, с помощью которых следует абсолютно и равномерная сходимость функциональной последовательности $\{\tau_n^*(y)\}$. Таким образом, доказано что интегральное уравнение (29) однозначно разрешимо. После определения функции $\tau_2(y)$, из функционального соотношения (14) находим $\nu_2^+(y)$, а также из (13) однозначно определяется функция $f_2(y)$. Следовательно, решение обратной задачи IP можно будет восстановить и в областях Ω_1 и Ω_2, как решение задачи Коши, а в области Ω_1 как решение первой краевой задачи [8, 10]. Так как, искомые функции являются решениями нелинейных интегральных уравнений, для которых, с помощью принципа сжимающих отображений найдены условия однозначной разрешимости, из полученного результата также следует единственность решения поставленной задачи. □

References

[1] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, **204**, Elsevier, Amsterdam, 2006. Zbl 1092.45003

[2] B.J. Kadirkulov, *Boundary problems for mixed parabolic-hyperbolic equations with two lines of changing type and fractional derivative*, Electron. J. Differ. Equ., **2014** (2014), Paper No. 57. Zbl 1288.35360

[3] O.Kh. Abdullaev, *A nonlocal problem with an integral matching condition for a loaded parabolic-hyperbolic equation with a fractional Caputo derivative*, Differ. Equ., **59**:3 (2023) 351–358. Zbl 1516.35449

[4] O.Kh. Abdullaev, *Solvability of BVPs for the parabolic-hyperbolic equation with non-linear loaded term*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **14**:2 (2021), 133—143. Zbl 1535.35199

[5] O.Kh. Abdullaev, *Boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation with nonlinear loaded terms*, Lobachevskii J. Math., **44**:10 (2023), 4205–4214. Zbl 1541.35314

[6] O.Kh. Abdullaev, T.K. Yuldashev, *Inverse problems for the loaded parabolic-hyperbolic equation involves Riemann-Liouville operator*, Lobachevskii J. Math., **44**:3 (2023), 1080–1090. Zbl 1518.35660

[7] O.Kh. Abdullaev, O.Sh. Salmanov, T.K. Yuldashev, *Direct and inverse problems for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann–Liouville derivatives*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math., **43**:1 (2023), 21–33. Zbl 1534.35440

[8] A.V. Pskhu, *Partial differential equations of fractional order*, Moscow, Nauka, 2005. Zbl 1193.35245

[9] T.D. Dzhuraev, M Mamazhanov, *Correctness of the formulation of boundary-value problems for a class of third-order parabolic-hyperbolic equations*, Differ. Equations, **19** (1983), 31–42. Zbl 0519.35060

[10] M.O. Mamchuev, *Solutions of the main boundary value problems for the time-fractional telegraph equation by the Green function method*, Fract. Calc. Appl. Anal., **20**:1 (2017), 190–211. Zbl 1366.35222

Obidjon Abdullaev
Alfraganus University, V.I. Romanovskiy institute of Mathematics
Yukori Karakamish street 2a, Yunusabad district,
100190, Tashkent, Uzbekistan
Email address: obidjon.mth@gmail.com