




ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ
КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. И. КАБАНИХИН 
Е. Е. ТЫРТЫШНИКОВ 
М. А. ШИШЛЕНИН 

Посвящается памяти профессора А.Г. Яголы

Abstract: The paper proposes a direct method for the numerical solution of a two-dimensional coefficient inverse problem for a hyperbolic equation. The problem is reduced to solving a linear integral equation, after discretization of which a system of linear algebraic equations with a block-Toeplitz matrix is obtained. Algorithms for numerical solutions of the direct and inverse problems are constructed and analyzed. The singular numbers of the matrix are numerically investigated and it is shown that the number of matrix conditionality, which characterizes the degree of incorrectness of the problem, increases with the depth of the coefficient recovery and with the increase in the error in the data. It is shown that the number of harmonics to be restored is a regularization parameter. The algorithm for solving the inverse problem has been tested on an analytical solution.

КАБАНИХИН S.I., ТЫРТЫШНИКОВ E.E., SHISHLENIN M.A. A DIRECT METHOD FOR SOLVING A MULTIDIMENSIONAL COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION.

© 2025 КАБАНИХИН S.I., ТЫРТЫШНИКОВ E.E., SHISHLENIN M.A.

Работа С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина поддержана РФФ, проект 19-11-00154-П “Создание принципиально новых математических моделей акустической томографии в медицине. Численные методы, высокопроизводительные вычисления и комплексы программ”.

Поступила 12 июля 2025 г., опубликована 13 апреля 2026 г.

Keywords: coefficient inverse problem, string equation, direct method, Gelfand-Levitan equation.

1 Введение

В данной статье представлен прямой метод решения двумерной коэффициентной обратной задачи для уравнения колебаний, который является обобщением метода И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана на динамический вариант обратной задачи.

Упомянем несколько работ, имеющих прямое отношение к результатам данной статьи.

И. М. Гельфанд и Б. М. Левитана предложили метод восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральной функции, а также сформулировали достаточные условия того, чтобы заданная монотонная функция являлась спектральной функцией оператора [1]. М. Г. Крейн исследовал задачу о струне и сформулировал теоремы о разрешимости обратной задачи [2]. Нелинейная обратная задача для уравнения струны была сведена к интегральному уравнению (уравнение Крейна).

Идеи метода Гельфанда–Левитана активно использовались в обратных динамических задачах сейсмологии, начиная с работ А. С. Алексева [4], G. Kunetz [28], Б. С. Парийского [30, 31]. А. С. Благовещенский [10, 11] разработал динамический (во временной области) вариант метода Гельфанда–Левитана для обратной задачи акустики. В. Gopinath и М. Sondhi независимо предложили альтернативное интегральное уравнение во временной области в задаче восстановления формы речевого тракта человека по акустическим измерениям [15]. А. С. Алексеев и В. И. Добринский использовали дискретный аналог метода Гельфанда–Левитана при исследовании численных алгоритмов решения одномерной обратной динамической задачи сейсмологии [5]. W. Symes применил нелинейные интегральные уравнения во временной области [35] для решения нелинейных обратных задач сейсмологии восстановления коэффициентов на конечном интервале по данным на границе области. R. Burridge исследовал применение уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко для теории упругости во временной области и установил связь между ними и уравнением Gopinath–Sondhi [13]. F. Santosa [34] разработал точный метод решения обратной задачи распространения плоской волны с помощью метода Гельфанда–Левитана. В работе апробирована численная схема решения интегрального уравнения и исследованы вопросы устойчивости и аппроксимации. С. И. Кабанихин [16] предложил новый алгоритм решения уравнения Гельфанда–Левитана, основанный на использовании достаточного условия разрешимости обратной задачи. и разработал многомерный аналог уравнений Гельфанда–Левитана

и М.Г. Крейна [18]. В.Г. Романов [38] исследовал локальную разрешимость многомерных обратных задач в классах коэффициентов, обладающих конечной гладкостью по выводящей пространственной переменной и аналитических по горизонтальным переменным. М. И. Белишев и А. С. Благовещенский [7] предложили многомерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана на основе метода граничного управления. Rakesh [32] доказал теорему единственности решения обратной задачи на основе метода Сильвестра–Ульмана [50] для ограниченных областей в случае полуплоскости. С.И. Кабанихин и др. [26] опубликовали монографию о прямых численных методах решения коэффициентных обратных задач для волнового уравнения и уравнения акустики. Алгоритм, основанный на спектральном варианте метода граничного управления, разработан и апробирован в работе М.И. Белишева [9]. Динамический вариант метода граничного управления рассматривается во временной области [6, 8] (гиперболический вариант Dirichlet-to-Neumann map). В статье С.И. Кабанихина и др. [22] предложен метод восстановления плотности, основанный на N -аппроксимации конечной системой одномерных задач и двумерном подходе М.Г. Крейна, позволяющий сводить нелинейную обратную задачу к семейству линейных интегральных уравнений. Алгоритм, основанный на использовании блочно-теплицевой структуры матрицы, позволяет получить решение целого семейства интегральных уравнений, решая только одну линейную систему. С.И. Кабанихин и др. разработали численный метод решения одномерной коэффициентной обратной задачи сейсморазведки [23]. С помощью динамической версии подхода Гельфанда–Левитана–Крейна нелинейная обратная задача восстановления скорости волны и плотности среды сводится к последовательному решению двух линейных интегральных уравнений, на основе быстрого обращения теплицевых матриц. В статье [24] предложен метод стохастической проекции решения двумерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения. Метод отличается низкой вычислительными затратами и требованиями к памяти. В работе [25] решена двумерная коэффициентная обратная задача для двумерного волнового уравнения методом Гельфанда–Левитана. Представлен метод Монте-Карло для решения уравнения Гельфанда–Левитана, который позволяет найти решение интегрального уравнения в одной конкретной точке. В.Г. Романов [33] обосновал отдельные элементы схемы, связанные с построением бесконечной системы интегральных уравнений в случае, когда коэффициент $q(x, y)$ является аналитической функцией по переменной y . В частности, доказана сходимости рядов в этих уравнениях, найдены условия, при выполнении которых обосновано N -приближение системы. Установлено также, что бесконечная система интегральных уравнений не является фредгольмовой, вопрос разрешимости которой остается открытым. С.И. Кабанихин и др. [36] представили краткий исторический обзор подхода Гельфанда–Левитана–Марченко–Крейна, отражающий развитие и

варианты метода для одномерных и двумерных задач и некоторые аспекты численного решения соответствующих интегральных уравнений. В статье Н.С. Новикова и М.А. Шишленина [37] построен алгоритм восстановления скорости распространения волн в среде, зависящей от глубины, и плотности среды, зависящей от двух пространственных переменных, на основе комбинации интегрального уравнения Гельфанда–Левитана и уравнения Крейна. Работа А.С. Михайлова и В.С. Михайлова [42] посвящена расширению метода граничного управления на случай систем с дискретным временем. В работе А.В. Баева [49] решаются прямые и обратные задачи для обобщенного уравнения типа Кортевега — де Фриза, полученного на основе модели Ферми–Пасты–Улама–Цингу для неоднородных решеток. В обратной задаче требуется восстановить коэффициенты по солитонным данным. Получена единственность решения и устойчивые алгоритмы для кусочно-постоянных функций.

Теория, методы и алгоритмы, основанные на подходе Гельфанда–Левитана–Марченко, активно применяются в геофизике [51, 54, 52, 55, 53, 56].

Одно из преимуществ подхода Гельфанда–Левитана для решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений заключается в отсутствии необходимости многократного решения прямых задач.

2 Описание метода в одномерном случае

Рассмотрим коэффициентную динамическую обратную задачу: определить $q(x)$ из соотношений

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x); \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad u_x|_{x=0} = 0. \quad (3)$$

В.Г. Романов [39] показал, что обратная задача (1)–(3) сводится к уравнению Гельфанда–Левитана:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t-\tau) + f'(t+\tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}[f'(t-x) + f'(t+x)], \quad t \in [0, x]. \quad (4)$$

Решение обратной задачи находится по формуле:

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x-0), \quad x > 0.$$

Теорема [39]

Для однозначной разрешимости обратной задачи (1)–(3) на отрезке $-[T/2, T/2]$ в классе непрерывных функций необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла следующим условиям

$$(1) f(t) \in C^2[0, T], f(+0) = 1/2, f'(+0) = 0;$$

(2) интегральное уравнение (4), где $f(-t) = f(t)$, $t \in (0, T]$ однозначно разрешимо $\forall x \in (0, T/2)$.

Второе условие теоремы можно заменить эквивалентным ему условием положительной определенности оператора A_x :

$$A_x \varphi = \varphi(t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \varphi(\tau) d\tau$$

для $x \in [0, T/2]$, т.е. условием

$$(A_x \varphi, \varphi) > 0, \quad x \in (0, T/2], \quad \varphi \in L_2(0, x).$$

3 Двумерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана

Рассмотрим последовательность прямых задач $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ [18]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad (5)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x)e^{iky}. \quad (6)$$

Предполагаем, что функция $q(x, y)$ является 2π -периодической по переменной y .

Обратная задача: определить четную по переменной x функцию $q(x, y)$ по дополнительной информации о решениях прямых задач:

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную последовательность прямых задач ($m \in \mathbb{Z}$) [18]:

$$w_{tt}^{(m)} = w_{xx}^{(m)} + w_{yy}^{(m)} - q(x, y)w^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (8)$$

$$w^{(m)}|_{x=0} = e^{imy}\delta(t), \quad w_x^{(m)}|_{x=0} = 0. \quad (9)$$

Используя формулу Даламбера для решения задачи (8), (9), получим [17, 26]:

$$\begin{aligned} w^{(m)}(x, y, t) &= \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t - x) + \delta(t + x)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-w_{yy}^{(m)} + q(x, y)w^{(m)}](\xi, y, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Функция $w^{(m)}$ обладает следующим свойством:

$$w^{(m)}(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < |t| < x, \quad y \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = w^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(t - x) + \delta(t + x)]. \quad (11)$$

и

$$Q(x, y, t) = \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi.$$

Подставив (11) в уравнение (10), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(m)}(x, y, t) = & \frac{1}{4} e^{imy} \theta(x - |t|) [xm^2 + Q(x, y, t)] + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-\tilde{w}_{yy}^{(m)} + q(x, y)\tilde{w}^{(m)}](\xi, y, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

и

$$\tilde{w}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{e^{imy}}{4} \left[xm^2 + \int_0^x q(\xi, y) d\xi \right]. \quad (12)$$

Продолжим нечетным образом функцию $u^{(k)}(x, y, t)$, а значит и $f^{(k)}(y, t)$, на отрицательные t :

$$u^{(k)}(x, y, t) = -u^{(k)}(x, y, -t), \quad t < 0.$$

Тогда для функции $f^{(k)}(y, t)$ справедливо представление

$$f^{(k)}(y, t) = \frac{e^{iky}}{2} [\theta(t) - \theta(-t)] + \tilde{f}^{(k)}(y, t), \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $\tilde{f}^{(k)}(y, t)$ непрерывная и нечетная по переменной t функция.

Предположим, что решение обратной задачи (5)–(7) существует. Тогда функция $u^{(k)}(x, y, t)$, $k \in \mathbb{Z}$, как решение соответствующей прямой задачи с учетом нечетного продолжения, удовлетворяет следующей задаче

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (13)$$

$$u^{(k)}|_{x=0} = f^{(k)}(y, t), \quad u_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (14)$$

Можно проверить, что решения задач (13), (14) и (8), (9) связаны соотношением:

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f_m^{(k)}(t-s) w^{(m)}(x, y, s) ds, \quad x > 0, \quad y, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

из которого в области $|t| < x$, $y \in \mathbb{R}$ можно перейти к следующей системе интегральных уравнений первого рода ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t-x) + f^{(k)}(y, t+x)]. \quad (16)$$

После дифференцирования по переменной t уравнения (16), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_m f_m^{(k)'}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) s = \\ = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t-x) + \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t+x) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Систему уравнений (17) назовем двумерным аналогом уравнения Гельфанда–Левитана.

Заметим, что в соответствии с формулой (12), решение $q(x, y)$ обратной задачи (5)–(7) может быть вычислено, например, по формуле

$$q(x, y) = 4 \frac{d}{x} \tilde{w}^{(0)}(x, y, x-0).$$

Дискретные аналоги уравнения Гельфанда–Левитана исследованы в работах [14, 29, 21, 19, 20, 26].

4 Оценка решения уравнения Гельфанда–Левитана

Учитывая (10), запишем

$$\begin{aligned} w^{(m)}(x, y, t) &= \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-w_{yy}^{(m)}(\xi, y, \tau) + q(\xi, y) w^{(m)}(\xi, y, \tau)] \xi \tau = \\ &= \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \frac{1}{4} e^{imy} \theta(x-|t|) [xm^2 + Q(x, y, t)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [-w_{yy}^{(m)}(\xi, y, \tau) + q(\xi, y) w^{(m)}(\xi, y, \tau)] \xi \tau. \end{aligned}$$

Обозначим

$$w_j^{(m)}(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} w^{(m)}(x, y, t) e^{ijy} dy$$

и получим следующие соотношения ($m \in Z$)

$$\begin{aligned} w_j^{(m)}(x, t) &= \frac{1}{4} \theta(x-|t|) \left[\delta_{jm} x m^2 + \int_0^{\frac{x+t}{2}} q_{j-m}(\xi) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q_{j-m}(\xi) d\xi \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} [j^2 w_j^{(m)}(\xi, \tau) + \sum_k q_k(\xi) w_{j-k}^{(m)}(\xi, \tau)] \xi \tau. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$J_0^{j,m}(x,t) = \frac{1}{4}\theta(x-|t|) \left[\delta_{jm}xm^2 + \int_0^{\frac{x+t}{2}} q_{j-m}(\xi)d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q_{j-m}(\xi)d\xi \right]$$

$$w_j^{(m)}(x,t) = J_0^{j,m} + J_1^{j,m} + J_2^{j,m}$$

$$J_1^{j,m}(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} j^2 w_j^{(m)}(\xi,\tau)\xi\tau$$

$$J_2^{j,m}(x,t) = \frac{1}{2} \sum_k \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q_k(\xi)w_{j-k}^{(m)}(\xi,\tau)\xi\tau$$

и новые нормы:

$$\|w_j^{(m)}\|(\xi) = \sup_{\tau} |w_j^{(m)}(\xi,\tau)|,$$

$$\|w_j^{(m)}\|_{\alpha|j|}(x) = \sup_{x' \in [0,x]} \left\{ \|w_j^{(m)}\|(x) e^{-\alpha|j|x'} \right\}$$

Получим

$$\begin{aligned} |J_1^{j,m}| &\leq j^2 \int_0^x (x-\xi) \|w_j^{(m)}\|(\xi)\xi = j^2 \int_0^x \int_{\xi}^x \|w_j^{(m)}\|(\eta)d\eta\xi = \\ &= j^2 \int_0^x \int_0^{\eta} \|w_j^{(m)}\|(\xi)d\xi\eta = j^2 \int_0^x \int_0^{\eta} \|w_j^{(m)}\|(\xi)e^{-\alpha|j|\xi}e^{\alpha|j|\xi}d\xi\eta \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha|j|x} \|w_j^{(m)}\|_{\alpha|j|}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |J_2^{j,m}| &\leq \sum_k \int_0^x \int_0^{\eta} \|q_k(\xi)\| e^{\alpha|k|\xi} \|w_{j-k}^{(m)}\|(\xi) e^{-\alpha|j-k|\xi} e^{-\alpha|k|\xi} e^{\alpha|j-k|\xi} \xi\eta \leq \\ &\leq e^{\alpha|j|x} \sum_k \int_0^x (x-\xi) \|q_k\|_{-\alpha|k|}(\xi) \|w_{j-k}^{(m)}\|_{\alpha|j-k|}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2 |j|^2} e^{\alpha|j|x} \sum_k \|q_k\|_{-\alpha|k|} \|w_{j-k}^{(m)}\|_{\alpha|j-k|} \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} |w_j^{(m)}(x, t)| &\leq |J_0^{j,m}| + |J_1^{j,m}| + |J_2^{j,m}| \leq \\ &\leq |J_0^{j,m}| + \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha|j|x} \|w_j^{(m)}\|_{\alpha|j|}(x) + \\ &+ e^{\alpha|j|x} \sum_k \int_0^x (x-\xi) \|q_k\|_{-\alpha|k|}(\xi) \|w_{j-k}^{(m)}\|_{\alpha|j-k|}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} \|w_j^{(m)}\|_{\alpha|j|}(x) &\leq |J_0^{j,m}| e^{-\alpha|j|x} + \frac{1}{\alpha^2} \|w_j^{(m)}\|_{\alpha|j|}(x) + \\ &+ \sum_k \int_0^x (x-\xi) \|q_k\|_{-\alpha|k|}(\xi) \|w_{j-k}^{(m)}\|_{\alpha|j-k|}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Введем согласованные нормы вектора

$$\|w^{(m)}\|_1 = \sum_k \|w_k^{(m)}\|$$

и матрицы:

$$\|q_{ij}\|_1 = \max_j \sum_i \|q_{ij}\|$$

Получим

$$\begin{aligned} \|w^{(m)}\|_1(x) &\leq \|J_0^m\|(x) + \frac{1}{\alpha^2} \|w^{(m)}\|_1(x) + \\ &+ \sum_k \int_0^x \|q_k\|_{-\alpha|k|}(\xi) \|w^{(m)}\|_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \|w_1^{(m)}\|_1(x) \leq \|J_0^m\|(x) + \int_0^x Q(\xi) \|w^{(m)}\|_1(\xi) d\xi$$

В силу леммы Гронуолла-Беллмана

$$\|w_1^{(m)}\|_1(x) \leq C e^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \int_0^x Q(\xi) d\xi},$$

где

$$C = \sup_{x \in [0, L]} \left\{ \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \|J_0^m\|(x) \right\}$$

Оценим

$$|J_0^{j,m}|(x,t) \leq \int_0^{\frac{x+t}{2}} |q_{j-m}(\xi)| e^{-\alpha|j-m|\xi} e^{\alpha|j-m|\xi} d\xi + \\ + \int_0^{\frac{x-t}{2}} |q_{j-m}(\xi)| e^{-\alpha|j-m|\xi} e^{\alpha|j-m|\xi} d\xi$$

$$|J_0^{j,m}|(x,t) \leq \frac{1}{4} \delta_{jm} x m^2 + \frac{1}{2} \int_0^x |q_{j-m}(\xi)| d\xi \leq \\ \leq \frac{1}{4} \delta_{jm} x m^2 + \frac{1}{2} e^{-\alpha|j-m|x} \|q_{j-m}\|_{-\alpha|j-m|}(x)$$

$$e^{-\alpha|j|x} |J_0^{j,m}|(x,t) \leq \frac{1}{4} \delta_{jm} x m^2 e^{-\alpha|j|x} + \frac{1}{2} \|q_{j-m}\|_{-\alpha|j-m|}(x) e^{-\alpha|j|x} e^{\alpha|j|x}$$

Заметим, что

$$\int_0^x |q_{j-m}(\xi)| e^{-\alpha|j-m|\xi} e^{\alpha|j-m|\xi} d\xi \leq \|q_{j-m}\|_{-\alpha|j-m|}(x) \int_0^x e^{-\alpha|j-m|\xi} d\xi.$$

Тогда

$$|J_0^{j,m}|(x,t) \leq \frac{1}{4} \delta_{jm} x m^2 + \frac{1}{2} \int_0^x |q_{j-m}(\xi)| d\xi.$$

$$e^{-\alpha|j|x} \|J_0^{j,m}\|(x,t) \leq \frac{1}{4} \delta_{jm} L m^2 e^{-\alpha|j|x} + e^{-\alpha|j|x} \|q_{j-m}\|_{-\alpha|j-m|}(x)$$

Таким образом, суммируя по j получим следующее соотношение

$$\sum_j e^{-\alpha|j|x} \|J_0^{j,m}\|(x) \leq \frac{1}{4} \sum_j L j^2 e^{-\alpha|j|x} + e^{-\alpha|j|x} \|q_{j-m}\|_1(x).$$

5 Явные формулы решения

Отметим, что численное решение уравнения (16) и/или (17) сильно затрудняет наличие больших параметров k и m , а также связанных с этим осцилляцией e^{iky} . Для решения этой проблемы мы предлагаем использовать известные формулы явного решения некоторых задач, связанных с (16) и (17).

Рассмотрим прямую задачу [12]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x,y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (18)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = e^{iky} \delta(x). \quad (19)$$

Решение и ее частный случай, когда $q(x, y) = 0$

$$\begin{aligned} v_{tt}^{(k)} &= v_{xx}^{(k)} + v_{yy}^{(k)}, & x > 0, & y \in \mathbb{R}, & t \in \mathbb{R}; \\ v^{(k)}|_{t=0} &= 0, & v_t^{(k)}|_{t=0} &= e^{iky} \delta(x). \end{aligned}$$

Функция $v^{(k)}(x, y, t)$ выражается в явном виде:

$$\begin{aligned} v^{(k)}(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x-\xi|<t} \frac{e^{ik\xi_2} \delta(\xi_1)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi_1)^2 - (y-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y-\xi_2|<t} \frac{e^{ik\xi_2}}{\sqrt{t^2 - x^2 - (y-\xi_2)^2}} d\xi_2 \end{aligned}$$

Рассмотрим далее последовательность прямых задач

$$w_{tt}^{(k)} = w_{xx}^{(k)} + w_{yy}^{(k)} - q(x, y)w^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (20)$$

$$w^{(k)}|_{x=0} = e^{iky} \delta(t), \quad w_x^{(k)}|_{x=0} = 0. \quad (21)$$

В терминах коэффициентов Фурье (20), (21) переписется в виде

$$\frac{\partial^2 w_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 w_n^{(k)}(x, t) - \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m(x) w_{n-m}^{(k)}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$w_n^{(k)}|_{x=0} = \delta_{kn} \delta(t), \quad \frac{\partial w_n^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = 0.$$

Здесь δ_{kn} символ Кронеккера

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье функции $v^{(k)}(x, y, t)$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_n^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 v_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 v_n^{(k)}, \\ v_n^{(k)}|_{x=0} &= \delta(t), \quad \left. \frac{\partial v_n^{(k)}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

$$v_n^{(k)} = \frac{1}{2} [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \frac{n^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} v_n^{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

$$u^{(k)} = w^{(k)} - v^{(k)}$$

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - q(x, y)(u^{(k)} + v^{(k)}),$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = 0.$$

$$w^{(k)} = \frac{1}{2e^{imy}} [\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \tilde{w}^{(k)}$$

Рассмотрим уравнение электродинамики

$$w_{tt} = aw_{xx} + 2bw_t + cw.$$

Введем новую функцию

$$u = we^{\frac{b}{a}t}$$

Тогда получим следующее уравнение

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + b^2u \quad (22)$$

Отметим, что решение уравнение (22) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x)$$

дается формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \Phi(x, t, z)z.$$

Здесь

$$\Phi(x, t, z) = \frac{1}{a}\psi(z)J_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}\right) + bt\varphi(z)\frac{J'_0\left(\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}\right)}{\frac{b}{a}\sqrt{(z-x)^2 - a^2t^2}}$$

и J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

В работе [3] показано, как от уравнения

$$p_{tt} = p_{xx} + p_{yy} - \nabla\sigma\nabla p$$

перейти к уравнению (18) с помощью замены

$$u^{(k)}(x, y, t) = p(x, y, t)e^{-\frac{1}{2}\sigma(x, y)}.$$

Тогда потенциал вычисляется по формуле

$$q(x, y) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

6 Численный алгоритм решения

6.1. N -приближение двумерного аналога уравнения И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана. Для численного решения двумерной обратной задачи (5)–(7) мы применим метод регуляризации, основанный на проекции изначальной постановки задачи на N -мерное подпространство, образуемое базисной системой функций $\{e^{iky}\}_{k=0, \pm 1, \dots, \pm N}$ [48]. Данный подход сводит двумерную обратную задачу к системе одномерных обратных задач [26].

Пусть

$$u^{(k)}(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n^{(k)}(x, t)e^{iny}.$$

Перейдем от (5)–(7) к следующей постановке обратной задачи на коэффициенты Фурье функций ($k, n \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - n^2 u_n^{(k)}(x, t) - \sum_{m \in \mathbb{Z}} q_m(x) u_{n-m}^{(k)}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \quad (23)$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x); \quad (24)$$

$$u_n^{(k)}|_{x=0} = f_n^{(k)}(t). \quad (25)$$

Здесь

$$q(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k(x) e^{iky}.$$

Обратной задаче (23)–(25) сопоставим ее N -приближение:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial x^2} - (K + P(x)) \vec{V}^{(k)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (26)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \vec{V}_t^{(k)}|_{t=0} = \vec{E}^{(k)} \delta(t), \quad (27)$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{x=0} = \vec{F}^{(k)}(t). \quad (28)$$

Здесь

$$\vec{V}^{(k)}(x, t) = (v_{-N}^{(k)}(x, t), v_{-N+1}^{(k)}(x, t), \dots, v_0^{(k)}(x, t), \dots, v_N^{(k)}(x, t));$$

$$\vec{E}^{(k)} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где единица стоит на месте $k = n$;

$$\vec{F}^{(k)}(t) = (f_{-N}^{(k)}(t), f_{-N+1}^{(k)}(t), \dots, f_N^{(k)}(t));$$

K, P являются квадратными матрицами размерности $2N + 1$:

$$K_{km} = k^2 \delta_{km}, \quad |k|, |m| \leq N;$$

$$P_{km} = q_{k-m}, \quad |k|, |m| \leq N, \quad |k - m| \leq N.$$

В работе [27] получена оценка точности решения коэффициентной обратной задачи (5)–(7) и ее N -приближения (26)–(28).

Заметим, что решение прямой задачи (26), (27) обладает следующим свойством

$$\vec{V}^{(k)}(x, t) \equiv 0, \quad |x| > t,$$

поэтому вместо (26), (27) будем решать эквивалентную ей прямую задачу:

$$\frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{V}^{(k)}}{\partial x^2} - (K + P(x)) \vec{V}^{(k)}, \quad |x| < t,$$

$$\vec{V}_x^{(k)}|_{x=0} = 0,$$

$$\vec{V}^{(k)}|_{t=x} = \frac{1}{2} \vec{E}^{(k)}.$$

В дальнейшем удобно перейти к матричным обозначениям, обозначив $B(x) = K + P(x)$, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial x^2} - B(x)\mathbb{V}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \mathbb{V}|_{t=0} &= 0, \quad \mathbb{V}|_{t=0} = \mathbb{E}\delta(t), \\ \mathbb{V}|_{x=0} &= \mathbb{F}(t). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{E}_{km} = \delta_{k-m}$, $\mathbb{F}_{km}(t) = f_m^{(k)}(t)$, а матрица \mathbb{V} составлена из столбцов $\vec{V}^{(k)}$.

Продолжим все функции нечетным образом на $t < 0$ и запишем

$$\frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{V}}{\partial x^2} - B(x)\mathbb{V}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

$$\mathbb{V}|_{x=0} = \mathbb{F}(t), \quad \mathbb{V}_x|_{x=0} = 0. \quad (30)$$

Введем вспомогательную матричную задачу

$$\frac{\partial^2 \mathbb{W}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathbb{W}}{\partial x^2} - B(x)\mathbb{W}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (31)$$

$$\mathbb{W}|_{x=0} = \mathbb{E}\delta(t), \quad \mathbb{W}_x|_{x=0} = 0. \quad (32)$$

Тогда решение задач (29), (30) связано с решением задачи (31), (32) следующим образом

$$\mathbb{V}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{W}(x, s)\mathbb{F}(t-s)s, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |k| \leq N,$$

а матрица \mathbb{W} имеет следующую структуру:

$$\mathbb{W}(x, t) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\delta(x-|t|) - \frac{1}{4}\theta(x-|t|) \int_0^x B(\xi)d\xi + \bar{\mathbb{W}}^{(k)}(x, t),$$

где $\bar{\mathbb{W}}^{(k)}(x, t)$ непрерывна при $x > 0$.

Обозначим

$$\tilde{\mathbb{W}}^{(k)}(x, t) = \mathbb{W}(x, t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}\delta(x-|t|).$$

Тогда можно записать следующую систему на $\tilde{\mathbb{W}}(x, t)$:

$$\tilde{\mathbb{W}}(x, t) + \int_x^x \mathbb{F}(t-s)\tilde{\mathbb{W}}(x, s)ds = -\frac{1}{2}[\mathbb{F}'(t-x) + \mathbb{F}'(t+x)], \quad |t| < x. \quad (33)$$

Здесь матрица

$$\mathbb{F}(t) = \begin{pmatrix} f_{-N}^{(-N)'} & f_{-N+1}^{(-N)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(-N)'} & \cdots & f_N^{(-N)'} \\ f_{-N}^{(-N+1)'} & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(-N+1)'} & \cdots & f_N^{(-N+1)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N}^{(0)'} & f_{-N+1}^{(0)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(0)'} & \cdots & f_N^{(0)'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{-N}^{(N)'} & f_{-N+1}^{(N)'} & \cdots & f_{-N+1}^{(N)'} & \cdots & f_N^{(N)'} \end{pmatrix} (t). \quad (34)$$

Матрица $P(x)$ определяется из соотношения:

$$P(x) = -K + 4 \frac{d}{dx} \mathbb{W}(x, x-0).$$

Рассмотрим численный метод решения систему интегральных уравнений (33). Обозначим шаг дискретизации h , $x = nh$. Метод коллокации с приближенным интегрированием по формуле прямоугольников сводит задачу к решению последовательности линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-n}^n a_{i-j} w_{nj} = g_{ni}, \quad -n \leq j \leq n, \quad 0 \leq n \leq N_t.$$

Здесь $a_{i-j} = F(ih - jh)$.

Введем в рассмотрение последовательность теплицевых матриц

$$A_k = [a_{i-j}], \quad 0 \leq i, j \leq k, \quad k = 0, 1, \dots, N = 2N_t$$

и векторов

$$w^{2n} = [w_{-j}^k], \quad -n \leq j \leq n, \quad g^k = [g_{?i}^{2n}], \quad -n \leq i \leq n.$$

Тогда нашей целью является получение решений систем

$$A_k w^k = g^k, \quad k = 0, 2, \dots, N.$$

Заметим, что A_k — ведущая подматрица порядка $k+1$ в матрице A_N . Будем считать, что все эти подматрицы невырожденные, и обозначим через u^k и v^k первый и последний столбцы матрицы, обратной к A_k . В нашей задаче правая часть g^{2n+2} получается из g^{2n} окаймлением сверху и снизу:

$$g^{2n+2} = \begin{bmatrix} g^{n+1} \\ g^{2n} \\ g^{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ g^{2n} \\ 0 \end{bmatrix} + g^{n+1} e_0^{2n+2} + g^{-n-1} e_{2n+2}^{2n+2}.$$

где e_0^{2n+2} и e_{2n+2}^{2n+2} — первый и последний столбцы единичной матрицы порядка $2n+3$. Используя специальный вид теплицевой матрицы, находим

$$w^{2n+2} = \begin{bmatrix} 0 \\ w^{2n} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha^{2n+2} u^{2n+2} + \beta^{2n+2} 2n+2.$$

Здесь

$$\alpha_{2n+2} = g^{n+1} - \sum_{j=1}^{2n} a_{-j} g_{n+2-j}, \quad \beta_{2n+2} = g^{-n-1} - \sum_{j=1}^{2n} a_{2n-j} g_{n+2-j}.$$

Таким образом, если мы умеем последовательно вычислять первые и последние столбцы матриц, обратных к A_k , то дополнительные затраты на получение решений последовательности интересующих нас систем составят $O(N^2)$. Алгоритмы для вычисления первых и последних столбцов матриц A_k^{-1} арифметической сложности $O(N^2)$ хорошо известны [44, 45]. Такие алгоритмы имеются и для случая, когда элементы a_{i-j} являются квадратными блоками одного порядка.

В работах С.И. Кабанихина и М.А. Шишленина [47, 47] показано, что в случае выбора специального вида граничных управлений, дискретный аналог уравнения метода граничного управления и уравнения Крейна совпадают, и приводят к решению системы линейных алгебраических уравнений с теплицевой матрицей. В работах М.И. Белишева и Н.А. Каразеевой [40] показано, что использование специфического выбора граничных управлений позволяет свести численную реализацию метода граничного управления к обращению матриц с блочно-теплицевой структурой.

Отметим, что двумерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана (17) для N -приближения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(k)}(x, y, t) + \int_{-x}^x \sum_{|m| \leq N} f_m^{(k)'}(t-s) \tilde{w}^{(m)}(x, y, s) ds = \\ = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t-x) + \frac{\partial}{\partial t} f^{(k)}(y, t+x) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь $|k| \leq N$, $|t| < x$, $y \in (-\pi, \pi)$.

Проведем дискретизацию системы уравнений (35). Для этого разобьем отрезок $(-x, x)$ на $2N_x + 1$ равных частей. Обозначим $h = x/N_x$, $h_y = \pi/N_y$, $\bar{w}_{l,n}^{(k)} = w^{(k)}(x, lh_y, nh)$ и пусть $t = jh$ и $|j| \leq N_x$. Тогда получим

следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \bar{w}_{l,j}^{(k)} + \sum_{|m| \leq N} \frac{h}{2} \left[[f_m^{(k)'}]_{j-N_x} \bar{w}_{l,N_x}^{(m)} + [f_m^{(k)'}]_{j+N_x} \bar{w}_{l,-N_x}^{(m)} \right] + \\ + h \sum_{|m| \leq N} \sum_{i=-N_x+1}^{N_x-1} [f_m^{(k)'}]_{j-i} \bar{w}_{l,i}^{(m)} = -\frac{1}{2} \left[[f_t^{(k)}]_{l,j-N_x} + [f_t^{(k)}]_{l,j+N_x} \right], \\ |k| \leq N, |j| \leq N_x, |l| \leq N_y. \quad (36) \end{aligned}$$

С.И. Кабанихиным и Г.Б. Бакановым доказано [20], что если решение дискретного аналога обратной задачи (26)–(28) существует, то система уравнений (36) (дискретный аналог двумерного уравнения Гельфанда-Левитана) однозначно разрешима. Если система уравнений (36) однозначно разрешима, то решение дискретного аналога обратной задачи (26)–(28) существует и единственно.

. Сравнение решения прямой задачи с аналитическим

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} u_{tt}^{(k)} &= u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} - a^2 u^{(k)}; \\ u^{(k)}|_{t=0} &= 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = \delta(x) e^{iky}. \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство прямых задач на первые N коэффициентов Фурье:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - (n^2 + a^2) u_n^{(k)}(x, t), \quad |n| \leq N; \quad (37)$$

$$u_n^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial t}|_{t=0} = \delta_{kn} \delta(x). \quad (38)$$

Отметим, что решение прямой задачи (37), (38) дается через функцию Бесселя нулевого порядка [43]:

$$u_n^{(k)}(x, t) = \delta_{kn} J_0 \left(-\sqrt{(n^2 + a^2)(t^2 - x^2)} \right) \theta(t - |x|).$$

Здесь

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s}.$$

Для численного решения прямой задачи (37), (38) перейдем к эквивалентной постановке (задаче Гурса) [27, 26]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_n^{(k)}}{\partial x^2} - (n^2 + a^2) u_n^{(k)}(x, t), \quad 0 < x < t, \quad |n| \leq N; \\ u_n^{(k)}|_{t=x} &= \frac{1}{2} \delta_{kn}, \quad \frac{\partial u_n^{(k)}}{\partial x}|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

6.2. Анализ численного решения обратной задачи. Найдем решение прямой задачи, в случае, когда $q(x, y) = a^2 = \text{const}$ в области $(x, y) \in (0, 2.5) \times (-\pi, \pi)$, $t \in (0, 5)$. Введем равномерную сетку по переменной x с шагом h , $h = 2.5/N_x$, $N_x = 500$. Число коэффициентов Фурье $N = 30$.

Решим последовательность прямых задач (37), (38) конечно-разностным методом в случае, когда $a \equiv 1$. На рисунке 1 приведены коэффициенты Фурье функции $u_n^{(k)}(0, t)$.

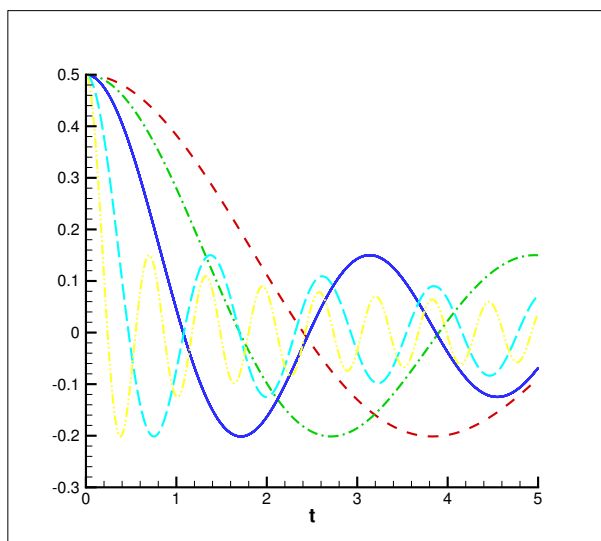


Рис. 1. Коэффициенты Фурье $u_0^{(0)}(0, t)$, $u_1^{(1)}(0, t)$, $u_2^{(2)}(0, t)$, $u_5^{(5)}(0, t)$, $u_{10}^{(10)}(0, t)$

Исследуем устойчивость решения прямой задачи. Найдем решение прямой задачи в области $(x, y) \in (0, 1) \times (-\pi, \pi)$, $t \in (0, 2)$. Пусть число разбиений по переменной x равно $N_x = 200$.

Рассмотрим задачу восстановления константы $a \equiv 1$ (см. рис. 2, 4). На рис. 3, 5 приведено приближенное решение обратной задачи в случае данных с шумом $\varepsilon = 0.05$. Приближенное решение обратной задачи, полученное для N гармоник, обозначим через q_N . Расчеты показывают, что норма невязки $\|1 - q_N\|_{L^2((0, 2.5) \times (-\pi, \pi))}$ для $N = 1$, $N = 2$, $N = 5$, $N = 10$, $N = 20$ примерно одинакова. На рис. 6 приведен график функции $\|1 - q_N\|$ в зависимости от числа восстанавливаемых гармоник Фурье N в случае данных с шумом $\varepsilon = 0.05$. Видно, что N является параметром регуляризации.

Исследуем сначала свойства матрицы A .

На рисунках 8–10 приведены графики десятичного логарифма числа обусловленности матрицы $\log(\mu(A))$ двумерного аналога уравнения

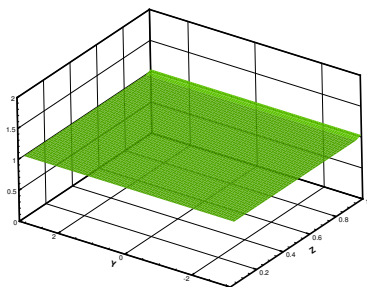


Рис.
2. Приближенное
решение обратной
задачи, $N = 2$, $\varepsilon = 0$.

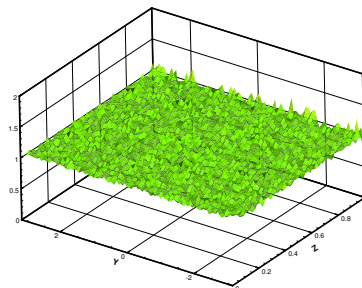


Рис.
3. Приближенное
решение обратной
задачи, $N = 2$, $\varepsilon =$
 0.05 .

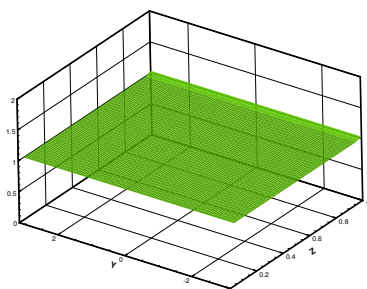


Рис.
4. Приближенное
решение обратной
задачи, $N = 10$, $\varepsilon =$
 0 .

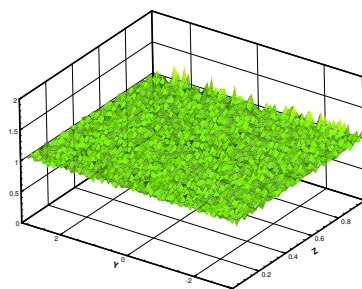


Рис.
5. Приближенное
решение обратной
задачи, $N = 10$, $\varepsilon =$
 0.05 .

Гельфанда–Левитана после дискретизации. На всех рисунках горизонтальная ось означает глубину. Из рисунков видно, что глубина решения уравнения Гельфанда–Левита влияет на число обусловленности матрицы.

Рассмотрим задачу восстановления функции $q(x, y)$ (см. рис. 11). Данные для решения обратной задачи насчитывались при $x = 1$, $N_x = 200$, $N = 40$. На рис. 12 приведены коэффициенты Фурье данных обратной

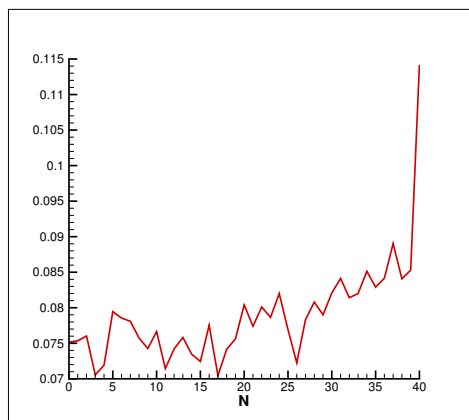


Рис. 6. График функции $\|1 - q_N\|$, $\varepsilon = 0.1$.

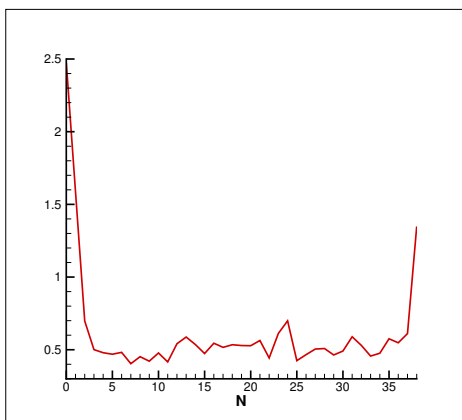


Рис. 7. График функции $\|1 - q_N\|$, $\varepsilon = 0.05$.

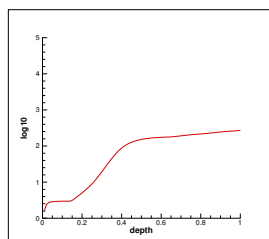


Рис. 8. График функции $\log(\mu(A))$. Параметры задачи: $T = 1$, $N_x = 100$, $N = 10$

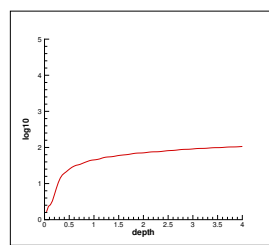


Рис. 9. График функции $\log(\mu(A))$. Параметры задачи: $T = 4$, $N_x = 100$, $N = 10$.

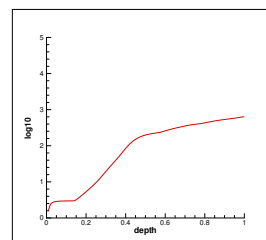


Рис. 10. График функции $\log(\mu(A))$. Параметры задачи: $T = 1$, $N_x = 100$, $N = 10$, $\varepsilon = 0.05$

задачи: $f_0^{(0)}(t)$, $f_2^{(2)}(t)$, $f_3^{(3)}(t)$, $f_5^{(5)}(t)$, $f_{10}^{(10)}(t)$, $f_{20}^{(20)}(t)$. На рис. 13–17 приведены результаты численного решения двумерного аналога уравнения Гельфанда–Левитана (35) для различного числа гармоник Фурье — приближенное решение обратной задачи $q(x, y)$.

Приближенные данные брались в виде

$$f^\varepsilon(y, t) = f(y, t) + \varepsilon\alpha(y, t)(f_{\max} - f_{\min}).$$

Здесь ε уровень шума в данных, $\alpha(y, t)$ равномерно распределенное случайное число на отрезке $[-1, 1]$ для фиксированного значения переменных y и t , f_{\max} и f_{\min} максимум и минимум значений точных данных обратной задачи.

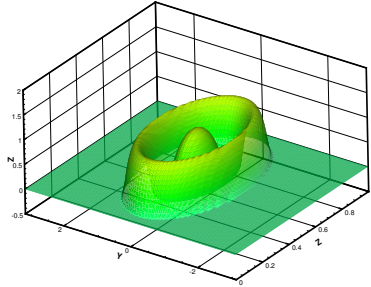


Рис. 11. Точное решение.

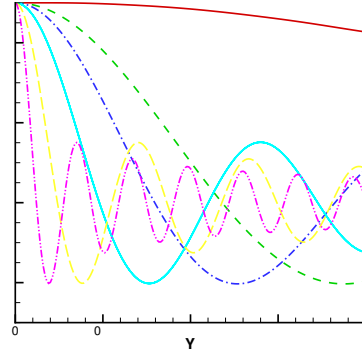


Рис. 12. Коэффициенты данных Фурье обратной задачи: $f_0^{(0)}(t)$, $f_2^{(2)}(t)$, $f_3^{(3)}(t)$, $f_5^{(5)}(t)$, $f_{10}^{(10)}(t)$, $f_{20}^{(20)}(t)$.

Число восстанавливаемых гармоник Фурье N — параметр регуляризации

Анализ графика невязки 7 показывает, что число восстанавливаемых гармоник Фурье N является параметром регуляризации. Для определения оптимального числа гармоник N используется следующий алгоритм.

Зафиксируем N и решив двумерный аналог уравнения Гельфанда–Левитана найдем приближенное решение обратной задачи. По восстановленной функции решаем семейство прямых задач (26), (28) при $k = -N, \bar{N}$ и находим $u^{(k)}(x, y, t)$ для всех $k = -N, \bar{N}$. Для каждого N ищем значение невязки

$$\max_{|k| \leq N} \|u^{(k)}(0, y, t) - f^{(k)}(y, t)\|_{L_2}^2.$$

Число гармоник Фурье N , для которых невязка принимает минимальное значение, возьмем в качестве оптимального числа восстанавливаемых гармоник приближенного решения обратной задачи.

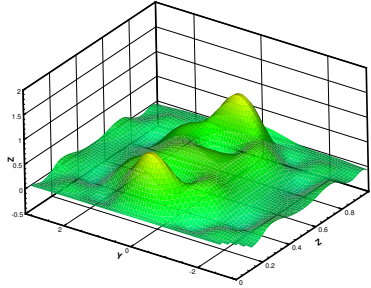


Рис.
13. Приближенное
решение, $N = 3$, $\varepsilon =$
0.

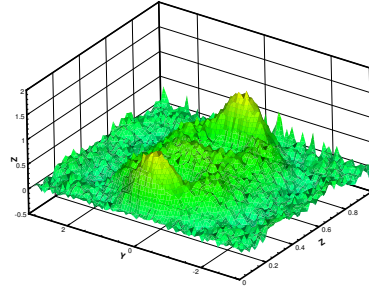


Рис.
14. Приближенное
решение, $N = 3$, $\varepsilon =$
0.02.

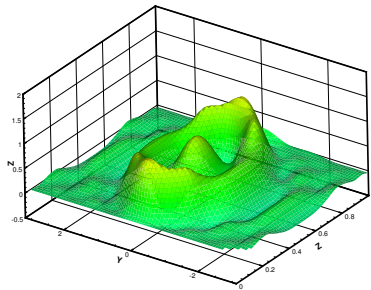


Рис.
15. Приближенное
решение, $N = 5$, $\varepsilon =$
0.

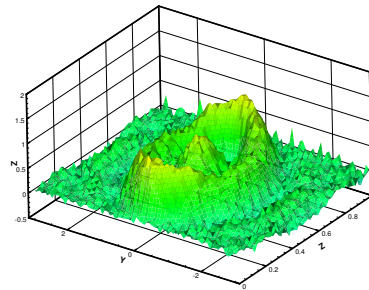


Рис.
16. Приближенное
решение, $N = 5$, $\varepsilon =$
0.02.

Отметим, что для решения уравнения Гельфанда-Левитана метод сингулярного разложения требует $O(N_x(N_x N)^2)$ операций, памяти $O((N_x N)^2)$, при этом метод, использующий свойства блочно-теплицевых матриц $O((N_x N)^2)$, памяти $O(N_x N)$.

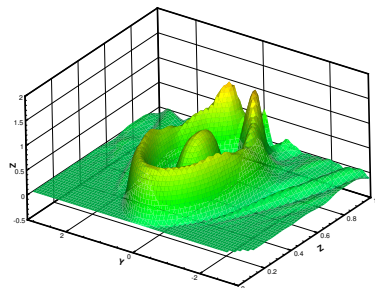


Рис.
17. Приближенное
решение, $N = 20$,
 $\varepsilon = 0$.

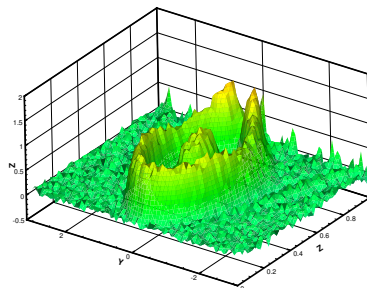


Рис.
18. Приближенное
решение, $N = 20$,
 $\varepsilon = 0.02$.

7 Заключение

В представленной работе предложен прямой метод численного решения двумерной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения. Коэффициентная обратная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения, после дискретизации которого получается система линейных алгебраических уравнений с блочно-теплицевой матрицей. Проведена апробация решения прямой и обратной задачи на точных данных. Исследованы сингулярные числа матрицы и показано, что число обусловленности матрицы, характеризующее степень некорректности задачи, растет с глубиной восстановления коэффициента и с ростом погрешности в данных. Показано, что число восстанавливаемых гармоник является параметром регуляризации. Алгоритм решения обратной задачи протестирован на аналитическом решении.

References

- [1] I. M. Gel'fand, B. M. Levitan, *On the determination of a differential equation from its spectral function*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **15**:4 (1951), 309–360. Zbl 0044.09301
- [2] M. G. Krein, *On one method of effective solution of inverse boundary problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **94**:6 (1954), 987–990. Zbl 0058.39903
- [3] S. He, S. I. Kabanikhin, *An optimization approach to a three-dimensional acoustic inverse problem in the time domain*, Journal of Mathematical Physics, **36** (1995), 4028–4043.
- [4] A. S. Alekseev, *Dynamic inverse problems of seismics. Some methods and algorithms of geophysics data interpretation*, Nauka, Moscow, 1967, 9–84 (in Russian).
- [5] A. S. Alekseev, V. I. Dobrinskii, *Some questions of practical usage of dynamic inverse problems of seismics*, Mat. Probl. Geofiz., Novosibirsk, **6**:2 (1975), 7–53. Zbl 0356.35074 (in Russian)

- [6] M. I. Belishev, *An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **297**:3 (1987), 524–527.
- [7] M. I. Belishev, A. S. Blagoveshchensky, *Multidimensional analogs of the Gelfand–Levitan–Krein-type equations in an inverse problem for the wave equation*, conditionally well-posed problems of mathematical physics and analysis, Nauka, Novosibirsk, 1992, 50–63. Zbl 0928.35193
- [8] M. I. Belishev, A. S. Blagoveshchensky, *Dynamic inverse problems of wave theory*, SPbSU Publishing, Sankt-Petersburg, 1999 (in Russian).
- [9] M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Problems, **23**:5 (2007), R1–R67. Zbl 1126.35089
- [10] A. S. Blagoveshchenskii, *On inverse problems of seismic waves theory*, Problemy mat. fiziki, **1** (1966), 68–81 (in Russian).
- [11] A. S. Blagoveshchenskii, *The local method of solution of the nonstationary inverse problem for an inhomogeneous string*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **115** (1971), 28–38. Zbl 0231.35044
- [12] A. S. Blagoveshchenskii, S. I. Kabanikhin, *On an inverse problem of the theory of wave propagation in a semi-infinite non-regular wave-guide*, Differ. Uravn., **19**:4 (1983), 603–607. Zbl 0531.35074
- [13] R. Burridge, *The Gelfand–Levitan, the Marchenko and the Gopinath–Sondhi integral equation of inverse scattering theory, regarded in the context of inverse impulse-response problems*, Wave Motion, **2** (1980), 305–323. Zbl 0444.45010
- [14] G. M. L. Gladwell, N. B. Willms, *A discrete Gelfand–Levitan method for band-matrix inverse eigenvalue problems*, Inverse Problems, **5**:2 (1989), 165–179. Zbl 0673.65019
- [15] B. Gopinath, M. Sondhi, *Inversion of telegraph equation and synthesis of nonuniform lines*, Proc. IEEE, **59**:3 (1971), 383–392.
- [16] S. I. Kabanikhin, *Regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations on the basis of a projection method*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:3 (1987), 534–537. Zbl 0691.35092
- [17] S. I. Kabanikhin, *Linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **309**:4 (1989), 791–795. Zbl 0728.35142
- [18] S. I. Kabanikhin, *Linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Preprint No. 27, Institut Matematiki AN SSSR, Novosibirsk, 1988 (in Russian).
- [19] S. I. Kabanikhin, G. B. Bakanov, *A discrete analogue of the Gel’fand–Levitan method*, Dokl. Math., **56**:2 (1997), 670–673. Zbl 0973.35198
- [20] S. I. Kabanikhin, G. B. Bakanov, *discrete analog of the Gelfand–Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation*, Sib. Math. J., **40**:2 (1999), 262–280. Zbl 0938.35192
- [21] S. I. Kabanikhin, G. B. Bakanov, *Discrete analog of the Gel’fand – Levitan equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **4**:5 (1996), 409–435. Zbl 0880.35134
- [22] S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, I. V. Oseledets, M. A. Shishlenin, *Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **23**:6 (2015), 687–700. Zbl 1327.65184
- [23] S. I. Kabanikhin, N. S. Novikov, M. A. Shishlenin, *Gelfand–Levitan–Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem*, Journal of Physics: Conference Series, 2092 (2021), 012022.
- [24] S. Kabanikhin, K. Sabelfeld, N. Novikov, M. Shishlenin, *Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods*, Monte Carlo methods and applications, **21**:3 (2015), 189–203. Zbl 1323.65103
- [25] S. Kabanikhin, K. Sabelfeld, N. Novikov, M. Shishlenin, *Numerical solution of the multidimensional Gelfand–Levitan equation*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **23**:5 (2015), 439–450. Zbl 1326.65124

- [26] S.I. Kabanikhin, A.D. Satybaev, M.A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2004.
- [27] S. Kabanikhin, O. Scherzer, M. Shishlenin, *Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **11**:1 (2003), 87–109. Zbl 1028.35166
- [28] G. Kunetz, *Essai d'analyse de traces sismiques*, Geophysical Prospecting, 9 (1961), 317–341.
- [29] F. Natterer, *A discrete Gelfand-Levitan theory*, Technical report, Institut fuer Numerische und instrumentelle Mathematik Universitaet Muenster Germany, 1994.
- [30] B.S. Pariiskii, *Inverse problem for wave equation with impact at depth*, Some direct and inverse problems of seismology, Moscow, 1968, 139–169 (in Russian).
- [31] B.S. Pariiskii, *An economical method for the numerical solution of convolution equations and algebraic systems with Toeplitz matrices*, Computational center of AN SSSR, Moscow, 1977 (in Russian).
- [32] Rakesh, *An inverse problem for the wave equation in the half plane*, Inverse Problems, **9**:3 (1993), 433–441. Zbl 0785.35112
- [33] V.G. Romanov, *On justification of the Gelfand–Levitan–Krein method for a two-dimensional inverse problem*, Sib. Mat. Zh., **62**:5 (2021), 1124–1142. Zbl 1501.65056
- [34] F. Santosa, *Numerical scheme for the inversion of acoustical impedance profile based on the Gelfand–Levitan method*, Geophys. J. R. Astr. Soc., **70** (1982), 229–243. Zbl 0539.73019
- [35] W.W. Symes, *Inverse boundary value problems and a theorem of Gelfand and Levitan*, J. Math. Anal. Appl., **71** (1979), 379–402. Zbl 0425.35092
- [36] S. Kabanikhin, M. Shishlenin, N. Novikov, N. Prokhoshin, *Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations*, Mathematics, **11**:21 (2023), 4458.
- [37] N. Novikov, M. Shishlenin, *Direct Method for Identification of Two Coefficients of Acoustic Equation*, Mathematics, **11**:13 (2023), 3029.
- [38] V.G. Romanov, *On the solvability of inverse problems for hyperbolic equations in a class of functions analytic in some of the variables*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **304**:4 (1989), 807–811. Zbl 0682.35105
- [39] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1984. Zbl 0576.35001
- [40] M.I. Belishev, N.A. Karazeeva, *Toeplitz matrices in the BC-method for the plane domains*, J. Math. Sci., New York, **283**:4 (2024), 505–515. Zbl 1546.35256
- [41] M.I. Belishev, *Equations of Gel'fand-Levitan type in multidimensional inverse problem for the wave equation*, Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, **165** (1987), 15–20. Zbl 0695.35111
- [42] A. Mikhaylov, V. Mikhaylov, *Discrete dynamical systems: Inverse problems and related topics*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **33**:2 (2025), 217–252. Zbl 1565.39001
- [43] V.I. Smirnov, *Course of higher mathematics*, Vol. 2, Fiz. mat. lit., Moscow, 1962 (in Russian).
- [44] V.V. Voevodin, E.E. Tyrtysnikov, *Numerical processes with Toeplitz matrices*, Nauka, Moscow, 1987. Zbl 0636.65018
- [45] E.E. Tyrtysnikov, *Toeplitz matrices, some of their analogs and applications*, Moskva: Otdel Vychislitel'noj Matematiki AN SSSR, 1989. Zbl 0744.65028
- [46] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Comparative Analysis of boundary control and Gel'fand-Levitan methods of solving inverse acoustic problem*, International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics 2003 (ISIP 2003) Nagano, Japan, 2003, 503–512.

- [47] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Boundary control and Gelfand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem*, Journal of Inverse Ill-Posed Problem, **12**:2 (2004), 125–144. Zbl 1051.35107
- [48] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on the Gelfand-Levitan-Krein equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **18**:9 (2011), 979–996.
- [49] A. Baev, *Direct and inverse problems for Korteweg–de Vries’ family equations in the Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou model for an inhomogeneous structure of lattice*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **33**:5 (2025), 665–681. Zbl 8114210
- [50] J. Sylvester, G. Uhlmann, *A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection*, J. Comm. Pure Appl. Math., **39** (1986), 91–112. Zbl 0611.35088
- [51] J.H. Rose, *‘Single-sided’ autofocusing of sound in layered materials*, Inverse Problems, **18**:6 (2002), 1923–1934. Zbl 1017.35118
- [52] R.-S. Wu, H. He, *Extension of Gelfand-Levitan-Marchenko solution for layered acoustic media to including oblique incidence for simultaneous p-v inversion*, SEG Technical Program Expanded Abstracts, (2019), 1475–1479.
- [53] P.-N. Bao, Y. Shi, X.-M. Shang, H.-X. Liang, W.-H. Wang, *Three-dimensional internal multiple elimination in complex structures using Marchenko autofocusing theory*, Petroleum Science, **22**:1 (2025), 222–233.
- [54] K. Wapenaar, J. Thorbecke, J. van der Neut, F. Broggini, E. Slob, R. Snieder, *Marchenko imaging*, Geophysics, **79**:3 (2014), WA39–WA57.
- [55] Z.-C. Li, Y.-M. Qu, *Research progress on seismic imaging technology*, Petroleum Science, **19**:1 (2022), 128–146.
- [56] N.S. Novikov, *New analogue of M.G. Krein equation for 1D acoustic inverse problem with the arbitrary source function*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **22**:2 (2025), 1741–1749.

SERGEY IGOREVICH KABANIKHIN
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS,
PR. LAVRENTIEVA, 6,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: ksi52@mail.ru

EVGENY EVGENIEVICH TYRTYSHNIKOV
MARCHUK INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS,
GUBKINA STR., 8,
119333, MOSCOW, RUSSIA
Email address: eugene.tyrtysnikov@gmail.com

MAXIM ALEXANDROVICH SHISHLENIN
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS,
PR. LAVRENTIEVA, 6,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: m.a.shishlenin@mail.ru