

ПЕРВАЯ ФОРМУЛА БИНЕ В ЗАДАЧЕ  
О ПОВЕДЕНИИ ГАММА-ФУНКЦИИ  
НА МНИМОЙ ОСИА.Б. КОСТИН ,  
В.Б. ШЕРСТЮКОВ *Представлено Е.М. Рудым*

**Abstract:** The behavior of the argument taken from the values of the gamma function at the points of the imaginary axis is studied in detail.

**Keywords:** gamma function, first Binet formula, argument, integral representation, Lambert W function.

## 1 Введение

Гамма-функцию Эйлера комплексной переменной стандартно обозначаем символом  $\Gamma$ . Эта классическая мероморфная функция имеет простые полюсы в точках  $0, -1, -2, \dots$  и задается, как правило, либо сходящимся в правой полуплоскости несобственным интегралом с последующим аналитическим продолжением, либо соответствующим бесконечным произведением (см., например, [1, §§ 12.1, 12.2], [2, §§ 5.2, 5.8, 5.9]).

---

KOSTIN, A.B., SHERSTYUKOV, V.B., THE FIRST BINET FORMULA IN THE PROBLEM OF THE BEHAVIOR OF THE GAMMA FUNCTION ON THE IMAGINARY AXIS.

© 2025 Костин А.Б., Шерстюков В.Б.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2025-345.

*Поступила 4 декабря 2025 г., опубликована 25 марта 2026 г.*

Для  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$  под  $\text{Arg } \Gamma(z)$  понимаем счетное множество значений аргумента комплексного числа  $\Gamma(z)$ , т. е.

$$\text{Arg } \Gamma(z) = \arg \Gamma(z) + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где главное значение аргумента выделяем условием  $\arg \Gamma(z) \in (-\pi, \pi]$ .

Нас интересует поведение величины  $\arg \Gamma(iy)$  как функции вещественной переменной  $y$ . Считаем, что  $y > 0$ , поскольку значения  $\Gamma(-iy)$  и  $\Gamma(iy)$  комплексно сопряжены.

Будем опираться на ключевое соотношение

$$\Phi(y) \equiv y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(yt) dt \in \text{Arg } \Gamma(iy), \quad y > 0, \quad (1)$$

в котором функция  $g$  определена по правилу

$$g(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right) \frac{1}{t}, \quad t > 0, \quad g(0) = \frac{1}{12}, \quad (2)$$

и на луче  $t \geq 0$  убывает от  $1/12$  до  $0$ . Формула (1) доказана в статье авторов [3] как результат распространения на мнимую ось первой формулы Бине

$$\ln \Gamma(z) = \left( z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-zt} dt,$$

действующей в открытой правой полуплоскости.

Помимо [3] отметим работы последнего времени [4]–[6], содержащие применения интегральных представлений для гамма-функции и их аналогов к различным вопросам анализа. Укажем еще, что величины вида  $\arg \Gamma(iy)$  востребованы в математической физике (см. [2, § 33.2], [7]–[9]), а значения  $\arg \Gamma(1/4 + iy)$  используются в теории дзета-функции Римана (см., например, [10, гл. 9, § 9.3], [11]). Все это послужило дополнительным стимулом к проведению нашего исследования.

Ниже будет дан подробный анализ поведения функции  $\Phi$ , заданной в (1), и указаны удобные на практике точные и приближенные формулы для вычисления  $\arg \Gamma(iy)$  на луче  $y > 0$ . Часть результатов анонсирована без доказательств в [12] (см. также [13]).

## 2 Свойства непрерывной ветви аргумента

Функция  $\Phi$  из соотношения (1) определяет непрерывную на множестве

$$\bar{\Pi}_{++}^{\circ} \equiv \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

ветвь  $\text{Arg } \Gamma(z)$ , заданную нулевым значением в точках полуоси  $z = x > 0$ . Выделим ключевые свойства этой функции.

1°. *Справедливо представление*

$$\Phi(y) = y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} h(t) \frac{\sin(yt)}{t} dt, \quad y > 0, \quad (3)$$

в котором функция  $h$  определена по правилу

$$h(t) = \frac{1}{2} - t \cdot g(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t(e^t - 1)}, \quad t > 0, \quad h(0) = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

с функцией  $g$  из формулы (2).

*Доказательство.* Переход от (1) к (3) использует интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad y > 0,$$

и связь функций  $g$  и  $h$ , выраженную посредством (4).  $\square$

2°. *Функция  $\Phi$ , доопределенная значением  $\Phi(0) = -\pi/2$ , непрерывна при  $y \geq 0$ .*

*Доказательство.* Достаточно проверить, что интеграл

$$\Psi(y) \equiv \int_0^{+\infty} h(t) \frac{\sin(yt)}{t} dt, \quad y > 0, \quad \Psi(0) = 0, \quad (5)$$

непрерывен по параметру  $y \geq 0$ . Отметим, кстати, что фигурирующий в (1) интеграл этим свойством не обладает, так как формальная подстановка  $y = 0$  в выражение для  $\Phi(y)$  из (1) приводит к неверному результату  $\Phi(0) = -\pi/4$ .

Из определения (4) видно, что интеграл (5) сходится абсолютно при каждом  $y > 0$ . Функцию (5) запишем в виде

$$\Psi(y) = \int_0^1 K(t, y) dt + \int_1^{+\infty} K(t, y) dt, \quad (6)$$

где ядро

$$K(t, y) = \begin{cases} h(t) \frac{\sin(yt)}{t}, & t > 0, y \geq 0, \\ \frac{y}{2}, & t = 0, y \geq 0, \end{cases}$$

непрерывно по совокупности переменных  $t \geq 0, y \geq 0$ . Поясним, что непрерывность функции  $K$  в точке  $(0, 0)$  следует из оценки

$$|K(t, y)| \leq h(t) y, \quad t \geq 0, y \geq 0.$$

Первое слагаемое в (6) непрерывно по  $y \geq 0$  как собственный интеграл с параметром от непрерывной функции  $K$ . Оценка

$$|K(t, y)| \leq \frac{h(t)}{t} \leq \frac{1}{t^2}, \quad t \geq 1, y \geq 0,$$

влечет равномерную сходимость и непрерывность по  $y \geq 0$  второго слагаемого в (6).  $\square$

3°. Функция  $\Phi$  является аналитической на луче  $y > 0$ .

*Доказательство.* Для значений  $z$  из множества

$$\bar{\Pi}_+^{\circ} \equiv \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}$$

воспользуемся первой формулой Бине (см. [1, §12.31], [3])

$$\ln \Gamma(z) = z \ln \frac{z}{e} - \frac{1}{2} \ln z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \int_0^{+\infty} g(t) e^{-zt} dt, \quad (7)$$

в которой ветвь фиксирована условием  $\operatorname{Im} \ln \Gamma(z) = 0$  при  $z = x > 0$ . Отделяя в (7) мнимую часть, для всех  $z = x + iy \in \bar{\Pi}_{++}^{\circ}$  имеем

$$v(x, y) \equiv \operatorname{Im} \ln \Gamma(z) = y \ln \frac{|z|}{e} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \arg z - \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} \sin(yt) dt. \quad (8)$$

При этом

$$\Phi(y) \equiv v(0, y) = y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(yt) dt, \quad y > 0.$$

Функция  $\ln \Gamma(z)$  голоморфна в полуплоскости  $\operatorname{Im} z > 0$ , а функция  $v(x, y) = \operatorname{Im} \ln \Gamma(z)$  — гармоническая и потому вещественно аналитическая в этой же полуплоскости. С учетом связи  $\Phi(y) = v(0, y)$  получаем аналитичность  $\Phi$  при  $y > 0$ .  $\square$

4°. Функция  $\Phi$  строго выпукла вниз при  $y > 0$ .

*Доказательство.* Из соотношения

$$v_{yy}(x, y) \equiv (\operatorname{Im} \ln \Gamma(z))_{yy} = (\operatorname{Im} (\ln \Gamma(z+1) - \ln z))_{yy}, \quad x \geq 0, y > 0,$$

и формулы (8) извлекаем

$$\Phi''(y) = v_{yy}(0, y) = \left( y \ln \frac{\sqrt{1+y^2}}{e} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y - \int_0^{+\infty} g(t) e^{-t} \sin(yt) dt \right)''.$$

После элементарных вычислений приходим к записи

$$\Phi''(y) = \frac{y}{1+y^2} + \frac{y}{(1+y^2)^2} + \int_0^{+\infty} g(t) t^2 e^{-t} \sin(yt) dt, \quad y > 0. \quad (9)$$

Возможность двукратного дифференцирования по параметру  $y$  несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-t} \sin(yt) dt$$

следует из равномерной сходимости на  $\mathbb{R}$  как самого интеграла, так и «продифференцированных» интегралов

$$\int_0^{+\infty} g(t) t e^{-t} \cos(yt) dt, \quad \int_0^{+\infty} g(t) t^2 e^{-t} \sin(yt) dt.$$

При этом свойство равномерной сходимости обеспечено оценками

$$g(t) t^k e^{-t} |\sin(yt)| \leq \frac{t^k e^{-t}}{12}, \quad k = 0, 2, \quad g(t) t e^{-t} |\cos(yt)| \leq \frac{t e^{-t}}{12},$$

справедливыми для всех  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \geq 0$  (с учётом поведения  $g$  из (2)), и сходимостью соответствующих интегралов от мажорант.

Возникший в (9) интеграл разбиваем на два с учетом формулы

$$g(t) t^2 = \left( \frac{t}{2} - 1 \right) + \frac{t}{e^t - 1}, \quad t > 0$$

(снова см. (2)). При всех  $y > 0$  имеем

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{2} - 1 \right) e^{-t} \sin(yt) dt = -\frac{y}{1+y^2} + \frac{y}{(1+y^2)^2}, \quad (10)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{e^t - 1} \sin(yt) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-(n+2)t} \sin(yt) dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2y n}{(n^2 + y^2)^2}. \quad (11)$$

Поясним, что при фиксированном  $y > 0$  функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} t e^{-(n+2)t} \sin(yt)$$

сходится абсолютно и равномерно по  $t \geq 0$  ввиду оценки

$$t e^{-(n+2)t} |\sin(yt)| \leq y t^2 e^{-(n+2)t} \leq \frac{4y}{e^2(n+2)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} e^{-t} \sin(yt) dt$$

с параметром  $y$  также сходится абсолютно, и осуществленное в (11) внесение интеграла под знак суммы законно (см. [14, гл. 1, § 7]).

Подставив найденные выражения (10), (11) в (9), получим компактную формулу для второй производной

$$\Phi''(y) = 2y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + y^2)^2} > 0, \quad y > 0. \quad (12)$$

Отсюда следует заявленное свойство выпуклости.  $\square$

5°. Производная  $\Phi'$  при  $y \geq 0$  строго возрастает от  $\Phi'(0) = -\gamma$  до  $+\infty$ , причем

$$\Phi'(y) = \ln y + O\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Здесь  $\gamma = 0.57\dots$  — константа Эйлера–Маскерони.

*Доказательство.* Возрастание  $\Phi'$  при  $y > 0$  следует из (12). Найдем предел  $\Phi'(y)$  при  $y \rightarrow 0+$ . Для этого воспользуемся представлением (8) и соображениями из доказательства свойства 4°. Имеем

$$v_y(x, y) = (\operatorname{Im}(\ln \Gamma(z+1) - \ln z))_y, \quad x \geq 0, \quad y > 0,$$

откуда

$$\Phi'(y) = v_y(0, y) = \left( y \ln \frac{\sqrt{1+y^2}}{e} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y - \int_0^{+\infty} g(t) e^{-t} \sin(yt) dt \right)'$$

при всех  $y > 0$ . Выполнив дифференцирование, с учетом (4) получим

$$\Phi'(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) - \frac{1}{1+y^2} + \int_0^{+\infty} h(t) e^{-t} \cos(yt) dt, \quad y > 0. \quad (14)$$

Поскольку интеграл в (14) сходится равномерно при  $y \geq 0$ , то

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \Phi'(y) = -1 + \int_0^{+\infty} h(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}} \right) e^{-t} dt = -\gamma.$$

По поводу последнего равенства см., например, [15, гл. I, § 3].

Докажем теперь асимптотику (13). Для этого удобно использовать представление (см. (3))

$$\Phi(y) = y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} + \Psi(y), \quad y > 0, \quad (15)$$

где последнее слагаемое задается интегралом (5). Тогда

$$\Phi'(y) = \ln y + \int_0^{+\infty} h(t) \cos(yt) dt, \quad y > 0. \quad (16)$$

Дифференцирование по параметру  $y$  законно ввиду равномерной сходимости интеграла в (16) на любом луче вида  $y \geq \delta > 0$ . Проверим, что производная

$$\Psi'(y) = \int_0^{+\infty} h(t) \cos(yt) dt \tag{17}$$

положительна для всех значений  $y > 0$ . Функция  $h$  из формулы (4) обладает при  $t > 0$  свойствами

$$h(t) \equiv \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} > 0, \quad h'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{e^t}{(e^t - 1)^2} < 0,$$

$$h''(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{e^t(e^t + 1)}{(e^t - 1)^3} > 0,$$

которые доказываются стандартными средствами анализа. Так, для нахождения знака второй производной  $h''$  требуется установить при  $t > 0$  неочевидное неравенство

$$2(e^t - 1)^3 - t^3 e^t (e^t + 1) > 0.$$

Это можно сделать разными способами, например, разложив его левую часть в степенной ряд вида

$$\sum_{n=7}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad a_n = 2(3^n - 3 \cdot 2^n + 3) - (n-2)(n-1)n(2^{n-3} + 1),$$

и убедившись в том, что  $a_n > 0$  при всех  $n \geq 7$ .

В результате по следствию 2 из теоремы 2 гл. 2 монографии [16] делаем вывод о положительности интеграла (17) и имеем оценку снизу

$$\Phi'(y) > \ln y, \quad y > 0.$$

Поскольку еще (см. (17), (4))

$$\Psi'(y) = -\frac{1}{y} \int_0^{+\infty} h'(t) \sin(yt) dt < \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} (-h'(t)) dt = \frac{h(0)}{y} = \frac{1}{2y},$$

то из (16) получим двустороннюю оценку

$$\ln y < \Phi'(y) < \ln y + \frac{1}{2y}, \quad y > 0, \tag{18}$$

которая дает асимптотику (13). □

**Замечание 1.** Оценка (18) информативна при больших  $y$  и ничего не говорит о поведении производной  $\Phi'$  вблизи точки  $y = 0$ . Об этом будет сказано в разделе 4. Выше по формуле (5) введена функция  $\Psi$  и установлено, что  $\Psi'(y) > 0$  для всех  $y > 0$  (см. 5°). Так как  $\Psi(0) = 0$  и  $\Psi \in C[0, +\infty)$ , то  $\Psi(y) > 0$  при  $y > 0$ . Из (16), (17) и соотношения  $\Phi'(0+) = -\gamma$  ясно, что  $\Psi'(y) \rightarrow +\infty$  при  $y \rightarrow 0+$ . Дополнительные сведения о функции  $\Psi$  будут приведены в разделе 3.

Доказанные свойства позволяют схематично обрисовать общую картину поведения функции  $\Phi$ .

6°. Существуют точки  $y_{\min} \in (0, 1)$  и  $y_* \in (1, +\infty)$  такие, что на промежутке  $[0, y_{\min}]$  функция  $\Phi$  убывает от  $-\pi/2$  до  $\Phi_{\min} \equiv \Phi(y_{\min})$ , на промежутке  $[y_{\min}, +\infty)$  функция  $\Phi$  возрастает от  $\Phi_{\min}$  до  $+\infty$ , и  $\Phi(y_*) = 0$ . Другими словами,  $y_{\min}$  — точка строгого глобального минимума  $\Phi$  на луче  $[0, +\infty)$ , а  $y_*$  — единственный нуль  $\Phi$  на этом луче.

График функции  $\Phi$  — непрерывной при  $y \geq 0$  ветви  $\text{Arg } \Gamma(iy)$  — представлен на рис. 1. Численные границы для значений  $y_{\min}$ ,  $\Phi_{\min}$ ,  $y_*$ , а также поведение  $\Phi$  на бесконечности мы обсудим позже.

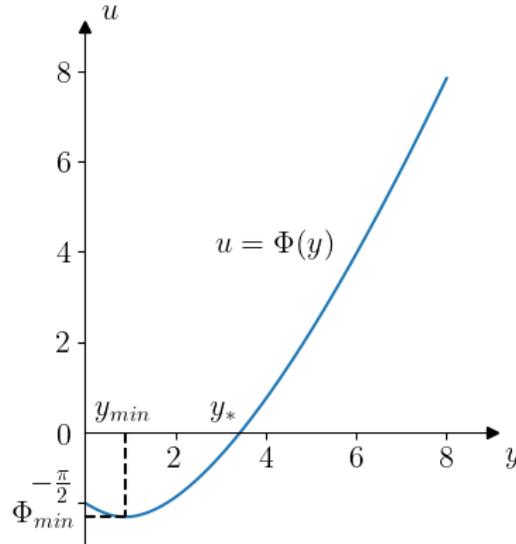


Рис. 1. График функции  $\Phi$  с ключевыми значениями

$$\Phi(0) = -\pi/2, \quad \Phi'(0) = -\gamma, \quad y_{\min} \approx 0.88,$$

$$\Phi_{\min} \approx -1.87, \quad y_* \approx 3.43.$$

### 3 Выделение главного значения аргумента

Для точных формулировок результатов этого раздела потребуются вещественная версия так называемой  $W$ -функции Ламберта  $w = W(\beta)$ , которую определяют как вещественный корень уравнения

$$w e^w = \beta$$

при  $\beta \geq -1/e$ . Большой корень этого уравнения задает основную ветвь  $W$ -функции Ламберта, обозначаемую  $W_0(\beta)$ . Меньший корень, возникающий при  $\beta \in (-1/e, 0)$ , задает другую ветвь  $W_{-1}(\beta)$ . Подробнее о функции Ламберта и ее применениях см. [17]–[20].

**Теорема 1.** *Для функции  $\Phi$ , определенной в (1), при всех  $y > 0$  справедлива двусторонняя оценка*

$$\underline{\Phi}(y) < \Phi(y) < \overline{\Phi}(y), \tag{19}$$

в которой миноранта  $\underline{\Phi}$  и мажоранта  $\overline{\Phi}$  определяются соответственно формулами

$$\underline{\Phi}(y) = \begin{cases} y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2}, & 0 < y < \frac{2}{3\pi}, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}, & y \geq \frac{2}{3\pi}, \end{cases}$$

$$\overline{\Phi}(y) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & 0 < y < y_0, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}, & y \geq y_0, \end{cases}$$

где

$$\frac{3}{2\pi} = 0.21 \dots, \quad y_0 = -\frac{\pi}{4W_{-1}\left(-\frac{\pi}{4e}\right)} = 0.42 \dots,$$

а  $W_{-1}$  – подходящая ветвь  $W$ -функции Ламберта.

*Доказательство.* Считаем, что  $y > 0$ . Воспользуемся для  $\Phi$  представлением (1), в котором функция  $g$  при  $t > 0$  обладает свойствами

$$g(t) > 0, \quad g'(t) < 0,$$

легко вытекающими из разложения на сумму элементарных дробей

$$g(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

По следствию 1 из теоремы 2 гл. 2 монографии [16] интеграл

$$\int_0^{+\infty} g(t) \sin(yt) dt$$

положителен, и поэтому для  $\Phi$  верна оценка

$$\Phi(y) < y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4}. \tag{20}$$

С другой стороны, после интегрирования по частям

$$\int_0^{+\infty} g(t) \sin(yt) dt = \frac{1}{12y} + \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} g'(t) \cos(yt) dt < \frac{1}{6y},$$

поскольку

$$\int_0^{+\infty} g'(t) \cos(yt) dt < - \int_0^{+\infty} g'(t) dt = g(0) = \frac{1}{12}.$$

Поэтому выполнена оценка снизу

$$\Phi(y) > y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}. \quad (21)$$

Правые части (20) и (21) дают соответственно формулы для  $\bar{\Phi}$  и  $\underline{\Phi}$  при «больших»  $y$ . При «малых» же значениях  $y > 0$  лучше воспользоваться представлением (3), записав его в виде

$$\Phi(y) = y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} + \Psi(y)$$

с функцией (5). При доказательстве свойства 5° из раздела 2 установлено, что  $\Psi$  положительна и возрастает. Отсюда имеем другую оценку снизу

$$\Phi(y) > y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Возьмем теперь

$$\underline{\Phi}(y) = y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y \in \left(0, \frac{2}{3\pi}\right).$$

Точка  $2/(3\pi)$  выбрана для сшивки по непрерывности с правой частью (21). Таким образом, миноранта  $\underline{\Phi}$  построена. Перейдем к нахождению мажоранты  $\bar{\Phi}$  при «малых» значениях  $y$ . Правая часть (20) для этого плоха, поскольку  $\Phi(0) = -\pi/2$ . Выберем в качестве простейшей мажоранты при  $y \in (0, y_0)$  постоянную функцию  $\bar{\Phi}(y) \equiv \Phi(0) = -\pi/2$ . Непрерывность мажоранты дает для точки  $y_0$  значение

$$y_0 = -\frac{\pi}{4W_{-1}\left(-\frac{\pi}{4e}\right)}.$$

При  $y \in (0, y_0)$  действительно выполнено неравенство  $\Phi(y) < -\pi/2$ , поскольку  $\Phi$  выпукла вниз (см. 4°) и (в силу выбора  $y_0$ )

$$\Phi(y_0) = y_0 \ln \frac{y_0}{e} - \frac{\pi}{4} - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(y_0 t) dt = -\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} g(t) \sin(y_0 t) dt < -\frac{\pi}{2}.$$

Мажоранта  $\bar{\Phi}$  построена. Доказательство теоремы 1 завершено.  $\square$

Графики мажоранты и миноранты из теоремы 1 даны на рис. 2.

**Замечание 2.** В теореме 1 по сравнению с [12] мы уточняем границы для функции  $\Phi$ , используя дополнительные сведения о ее поведении,

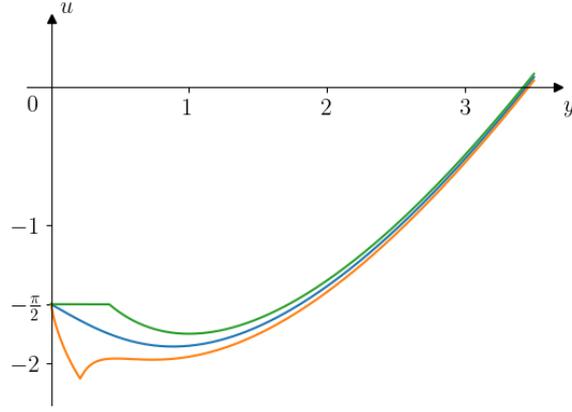


Рис. 2. Графики функций  $\Phi$  (синий),  $\bar{\Phi}$  (зеленый) и  $\underline{\Phi}$  (оранжевый).

доказанные в разделе 2. Отметим также, что свойство выпуклости функции  $\Phi$  позволяет легко улучшить и миноранту  $\underline{\Phi}$  при «малых»  $y$ , взяв ее в виде

$$\underline{\Phi}(y) = \begin{cases} -\gamma y - \frac{\pi}{2}, & 0 < y < \tilde{y}_0, \\ y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y}, & y \geq \tilde{y}_0, \end{cases}$$

где  $\tilde{y}_0 = 0.69\dots$  — корень трансцендентного уравнения

$$y \ln y - (1 - \gamma)y - \frac{1}{6y} = -\frac{\pi}{4},$$

который не выписывается явно. Авторы остановились на более грубом варианте, но с «хорошей» точкой сшивки  $2/(3\pi)$ . Впрочем, поведение  $\Phi$  при «малых»  $y > 0$  подробнее исследуется в разделе 4 (см. иллюстрацию на рис. 5).

Двусторонняя оценка (19) позволяет выделить промежутки по переменной  $y > 0$  с указанием правила вычисления на них главного значения аргумента величины  $\Gamma(iy)$ . Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Введем необходимые обозначения, положив

$$y_m = \frac{(8m - 3)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m-3)\pi}{4e}\right)}, \quad \underline{y}_m = \frac{3(8m - 3)\pi y_m + 2}{12 y_m W_0\left(\frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12e y_m}\right)}, \quad (23)$$

$$\bar{y}_m = \frac{(8m + 5)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m+5)\pi}{4e}\right)}, \quad \bar{y}_0 = \frac{5\pi}{4W_0\left(\frac{5\pi}{4e}\right)}. \quad (24)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\Phi$  — функция, определенная в (1). Тогда главное значение аргумента величины  $\Gamma(iy)$  при попадании  $y$  в начальный интервал  $(0, \bar{y}_0) = (0, 5.52\dots)$  вычисляется по правилу

$$\arg \Gamma(iy) = \Phi(y).$$

Если же  $y \in (\underline{y}_m, \bar{y}_m)$  с выбранным  $m \in \mathbb{N}$ , то правило выглядит так

$$\arg \Gamma(iy) = \Phi(y) - 2\pi m.$$

Границы фигурирующих здесь интервалов заданы в (23), (24).

*Доказательство.* Минимальное значение функции  $y \ln y - y$  равно  $-1$  и достигается при  $y = 1$ . Из (22) следует, что

$$\Phi(y) > \left( y \ln \frac{y}{e} \right) \Big|_{y=1} - \frac{\pi}{2} = -1 - \frac{\pi}{2} > -\pi \quad (25)$$

при всех  $y > 0$ . Возьмем в качестве правой границы начального интервала корень уравнения

$$y \ln \frac{y}{e} = \frac{5\pi}{4}, \quad (26)$$

приравняв для этого правую часть (20) к  $\pi$ . Уравнение (26) имеет единственное решение

$$\bar{y}_0 = \frac{5\pi}{4W_0\left(\frac{5\pi}{4e}\right)} > e.$$

С учетом (20) для всех  $y \in (0, \bar{y}_0)$  имеем

$$\Phi(y) < y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} < \bar{y}_0 \ln \frac{\bar{y}_0}{e} - \frac{\pi}{4} = \pi.$$

В сочетании с (25) получим, что

$$-\pi < \Phi(y) < \pi, \quad y \in (0, \bar{y}_0).$$

Зафиксируем теперь произвольное  $m \in \mathbb{N}$  и докажем, что всюду на интервале  $(\underline{y}_m, \bar{y}_m)$  справедливо двойное неравенство

$$2\pi m - \pi < \Phi(y) < 2\pi m + \pi. \quad (27)$$

Правая граница интервала есть корень уравнения

$$y \ln \frac{y}{e} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m,$$

которое получается приравниванием правой части (20) к  $\pi + 2\pi m$ . Записанное уравнение имеет единственное решение

$$\bar{y}_m = \frac{(8m+5)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m+5)\pi}{4e}\right)} > e.$$

Как и выше, для всех  $y \in (0, \bar{y}_m)$  с учетом (20) имеем

$$\Phi(y) < y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} < \bar{y}_m \ln \frac{\bar{y}_m}{e} - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m. \quad (28)$$

Левую границу интервала построим в два этапа. Сначала решим уравнение

$$y \ln \frac{y}{e} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,$$

полученное приравниванием правой части (20) к  $-\pi + 2\pi m$ . Его решение

$$y_m = \frac{(8m-3)\pi}{4W_0\left(\frac{(8m-3)\pi}{4e}\right)} > e$$

используем для составления подправленного уравнения

$$y \ln \frac{y}{e} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m + \frac{1}{6y_m}.$$

Решением последнего является

$$\underline{y}_m = \frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12 y_m W_0\left(\frac{3(8m-3)\pi y_m + 2}{12e y_m}\right)} > y_m.$$

Согласно (21) для всех  $y > \underline{y}_m$  запишем

$$\begin{aligned} \Phi(y) &> y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y} > \underline{y}_m \ln \frac{\underline{y}_m}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6\underline{y}_m} \\ &= -\pi + 2\pi m + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\underline{y}_m} - \frac{1}{y} \right) > -\pi + 2\pi m. \end{aligned}$$

Осталось привлечь соотношение (28), чтобы убедиться в справедливости (27) при  $y \in (\underline{y}_m, \bar{y}_m)$ . Теорема 2 доказана.  $\square$

Трансцендентные уравнения, подобные (26), находят важные применения в теории экстремальных задач для выпуклых и целых функций (см., например, [21]).

Дополним картину поведения функции (1) полезными фактами.

**Предложение 1.** *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\Phi(y) = y \ln y - y - \frac{\pi}{4} + O\left(\frac{1}{y}\right), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (29)$$

*Доказательство.* В процессе доказательства теоремы 1 установлены оценки (20) и (21), которые дают двойное неравенство

$$y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6y} < \Phi(y) < y \ln \frac{y}{e} - \frac{\pi}{4},$$

верное при всех  $y > 0$  и влекущее (29). Предложение 1 доказано.  $\square$

График функции  $u = \arg \Gamma(iy)$  с отмеченными границами интервалов из теоремы 2 представлен на рис. 3. В силу формулы (9) и асимптотики (13) при  $y \rightarrow +\infty$  имеем  $\Phi''(y) \rightarrow 0$  и  $\Phi'(y) \rightarrow +\infty$ , вследствие чего (см. также (29)) с ростом  $y$  к бесконечности связанные части графика «выпрямляются», стремясь к вертикальному положению.

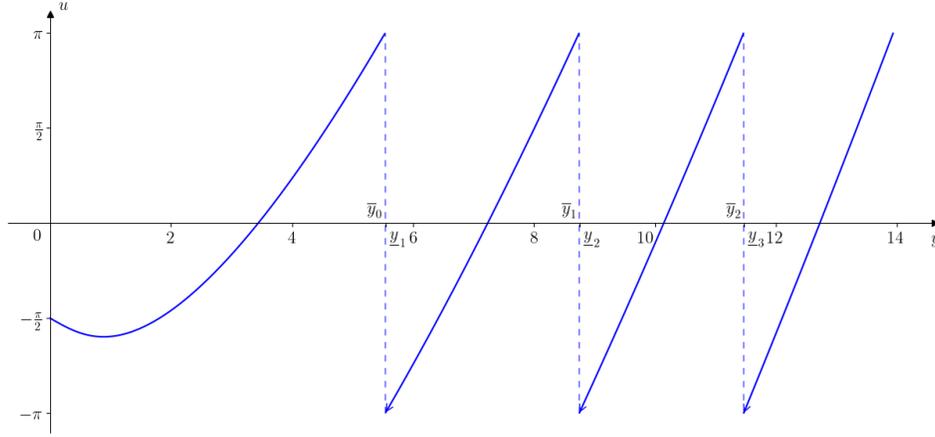


Рис. 3. График функции  $u = \arg \Gamma(iy)$  при  $y \geq 0$ .

В разделе 2 (см. там свойство 6°) показано, что функция  $\Phi$  имеет единственный нуль  $y_* \in (1, +\infty)$ . Из неравенства (20) очевидно, что  $y_* > e$ . Более точную информацию о расположении  $y_*$  дает такое утверждение.

**Предложение 2.** Нуль  $y_*$  лежит в интервале  $(\underline{y}_*, \bar{y}_*)$ , где

$$\underline{y}_* = \frac{\pi}{4W_0\left(\frac{\pi}{4e}\right)} = 3.42\dots, \quad \bar{y}_* = \frac{3\pi\underline{y}_* + 2}{12\underline{y}_* W_0\left(\frac{3\pi\underline{y}_* + 2}{12e\underline{y}_*}\right)} = 3.45\dots,$$

и других нулей на  $[0, +\infty)$  функция  $\Phi$  не имеет.

*Доказательство.* Как уже отмечалось, нуль  $y_*$  функции  $\Phi$  существует, единственный и больше  $e$ . Рассмотрим уравнение

$$y \ln \frac{y}{e} = \frac{\pi}{4},$$

приравняв правую часть (20) к нулю. Получим корень

$$\underline{y}_* = \frac{\pi}{4W_0\left(\frac{\pi}{4e}\right)}.$$

Из (20) следует, что  $\Phi(\underline{y}_*) < 0$ , откуда  $y_* > \underline{y}_*$ . Оценим  $y_*$  сверху, решив уравнение

$$y \ln \frac{y}{e} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6\underline{y}_*}.$$

Его корень

$$\bar{y}_* = \frac{3\pi\underline{y}_* + 2}{12\underline{y}_* W_0\left(\frac{3\pi\underline{y}_* + 2}{12e\underline{y}_*}\right)} > \underline{y}_*.$$

В соответствии с (21) имеем

$$\Phi(\bar{y}_*) > \bar{y}_* \ln \frac{\bar{y}_*}{e} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6\bar{y}_*} = \frac{1}{6\underline{y}_*} - \frac{1}{6\bar{y}_*} > 0.$$

Поэтому  $y_* < \bar{y}_*$ . Предложение 2 доказано.  $\square$

В верхней полуплоскости на мнимой полуоси найдём точки, в которых гамма-функция принимает вещественные значения. Все такие точки находятся как решения следующих двух серий уравнений

$$\Phi(y) = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (30)$$

$$\Phi(y) = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (31)$$

При фиксированном  $m$  каждое из уравнений (30), (31) имеет единственное решение  $\mu_m$  и  $\eta_m$  соответственно (см. 6° и рис. 1). В точках  $i\mu_m$  мнимой полуоси гамма-функция принимает отрицательные значения, в точках  $i\eta_m$  — положительные, а во всех остальных точках полуоси значения гамма-функции комплексные (невещественные). Пример локализации  $\eta_0 = y_*$  дан в предложении 2. Тем же способом можно оценить значение  $\mu_m$  или  $\eta_m$  при любом заданном номере  $m \in \mathbb{N}_0$ .

Используя логарифмическую шкалу, опишем поведение членов возникших последовательностей при больших номерах. Для этого введем краткие обозначения

$$\alpha_m = \frac{1}{e} \left( \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \right), \quad \beta_m = \frac{1}{e} \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi m \right), \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

и докажем следующий результат.

**Предложение 3.** При  $m \rightarrow \infty$  верны асимптотические равенства

$$\ln \mu_m = \ln \alpha_m - \ln \ln \alpha_m + 1 + \frac{\ln \ln \alpha_m}{\ln(e\alpha_m)} + O\left(\frac{\ln^2 \ln \alpha_m}{\ln^2 \alpha_m}\right), \quad (32)$$

$$\ln \eta_m = \ln \beta_m - \ln \ln \beta_m + 1 + \frac{\ln \ln \beta_m}{\ln(e\beta_m)} + O\left(\frac{\ln^2 \ln \beta_m}{\ln^2 \beta_m}\right). \quad (33)$$

*Доказательство.* Выведем формулу (33). Обоснование асимптотики (32) проводится аналогично. Итак, в наших обозначениях имеем

$$\Phi(\eta_m) = 2\pi m, \quad \beta_m = \frac{\pi}{4e} (8m + 1), \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Зафиксируем  $m \in \mathbb{N}_0$ . Согласно (20) запишем

$$\eta_m \ln \frac{\eta_m}{e} > \frac{\pi}{4} + 2\pi m,$$

откуда

$$\eta_m > \frac{\pi(8m+1)}{4W_0\left(\frac{\pi(8m+1)}{4e}\right)} = \frac{e\beta_m}{W_0(\beta_m)} \equiv \underline{\eta}_m, \quad (34)$$

что дает оценку снизу для корня уравнения (31). Оценку сверху выведем из (21) с учетом (34). Получим

$$\eta_m \ln \frac{\eta_m}{e} < \frac{\pi}{4} + 2\pi m + \frac{1}{6\eta_m} < \frac{\pi}{4} + 2\pi m + \frac{1}{6\underline{\eta}_m},$$

откуда

$$\eta_m < \frac{3\pi(8m+1)\underline{\eta}_m + 2}{12\underline{\eta}_m W_0\left(\frac{3\pi(8m+1)\underline{\eta}_m + 2}{12e\underline{\eta}_m}\right)} \equiv \bar{\eta}_m. \quad (35)$$

Итак, справедливо двойное неравенство

$$\underline{\eta}_m < \eta_m < \bar{\eta}_m, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (36)$$

с границами, заданными в (34) и (35). Поскольку  $\Phi(y)$  заведомо возрастает при  $y > y_*$ , то обратная функция  $\Phi^{-1}(\beta)$  возрастает при  $\beta > 0$ . Поэтому  $\eta_m = \Phi^{-1}(2\pi m)$  является монотонно возрастающей и бесконечно большой последовательностью.

Обозначим еще

$$\bar{\beta}_m \equiv \frac{\pi}{4e}(8m+1) + \frac{1}{6e\underline{\eta}_m} = \beta_m + \frac{1}{6e\underline{\eta}_m}, \quad (37)$$

чтобы переписать неравенство (36) в «симметричной» форме

$$\frac{\beta_m}{W_0(\beta_m)} < \frac{\eta_m}{e} < \frac{\bar{\beta}_m}{W_0(\bar{\beta}_m)}$$

через значения основной ветви  $W$ -функции Ламберта. С учетом определения последней возможна эквивалентная запись

$$\exp(W_0(\beta_m)) < \frac{\eta_m}{e} < \exp(W_0(\bar{\beta}_m)).$$

После логарифмирования получим результат

$$1 + W_0(\beta_m) < \ln \eta_m < 1 + W_0(\bar{\beta}_m), \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad (38)$$

удобный для обоснование асимптотической формулы (33).

Будем опираться на двустороннюю оценку

$$\ln \frac{\beta}{\ln \beta} + \frac{\ln \ln \beta}{\ln(\beta e)} \leq W_0(\beta) \leq \ln \frac{\beta}{\ln \beta} + \frac{\ln \ln \beta}{\ln(\beta e)} + \frac{\ln \beta}{\ln^3(\beta e)} \ln^2 \ln \beta, \quad (39)$$

справедливую при  $\beta \geq e$ . Простейшим следствием из (39) является соотношение

$$W_0(\beta) = \ln \beta + O(\ln \ln \beta), \quad \beta \rightarrow +\infty. \quad (40)$$

Оценка (39) доказана авторами в [18] и дополняет развернутый асимптотический результат работы [19]. Применяя (39) к (38), получим, что

$$\ln \eta_m > 1 + \ln \beta_m - \ln \ln \beta_m + \frac{\ln \ln \beta_m}{\ln(\beta_m e)}, \quad (41)$$

$$\ln \eta_m < 1 + \ln \bar{\beta}_m - \ln \ln \bar{\beta}_m + \frac{\ln \ln \bar{\beta}_m}{\ln(\bar{\beta}_m e)} + \frac{\ln \bar{\beta}_m}{\ln^3(\bar{\beta}_m e)} \ln^2 \ln \bar{\beta}_m \quad (42)$$

для всех  $m \geq 2$ . Обработаем неравенство (42), используя (40) и связь (37), в которой величина  $\eta_m$  взята из (34).

При  $m \rightarrow \infty$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta_m} &= \frac{W_0(\beta_m)}{e\beta_m} = O\left(\frac{\ln \beta_m}{\beta_m}\right), \\ \bar{\beta}_m &= \beta_m + O\left(\frac{1}{\eta_m}\right) = \beta_m + O\left(\frac{\ln \beta_m}{\beta_m}\right), \\ \ln \bar{\beta}_m - \ln \beta_m &= \ln\left(1 + O\left(\frac{\ln \beta_m}{\beta_m^2}\right)\right) = O\left(\frac{\ln \beta_m}{\beta_m^2}\right), \\ \ln \ln \bar{\beta}_m - \ln \ln \beta_m &= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{\beta_m^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\beta_m^2}\right), \\ \frac{\ln \ln \bar{\beta}_m}{\ln(\bar{\beta}_m e)} - \frac{\ln \ln \beta_m}{\ln(\beta_m e)} &= O\left(\frac{\ln \ln \beta_m}{\beta_m^2 \ln \beta_m}\right), \\ \frac{\ln \bar{\beta}_m}{\ln^3(\bar{\beta}_m e)} \ln^2 \ln \bar{\beta}_m &= O\left(\frac{\ln^2 \ln \beta_m}{\ln^2 \beta_m}\right). \end{aligned}$$

Теперь видно, что правые части неравенств (41), (42) отличаются на величину порядка

$$O\left(\frac{\ln^2 \ln \beta_m}{\ln^2 \beta_m}\right), \quad m \rightarrow \infty,$$

откуда и следует формула (33). Предложение 3 доказано.  $\square$

Формулы (32), (33) детально описывают асимптотическое поведение логарифмов  $\mu_m$  и  $\eta_m$ , показывая, в частности, что  $\mu_m \sim \eta_m$  при  $m \rightarrow \infty$ . Поведение самих  $\mu_m$  и  $\eta_m$  асимптотики (32), (33) отражают хуже, хотя соответствующая задача, возможно, представляет интерес.

В конце этого раздела уточним поведение функции (5), тесно связанной с основной функцией (1).

**Предложение 4.** *Функция  $\Psi$ , заданная в (5), обладает свойствами*

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \Psi(y) = \frac{\pi}{4}, \quad (43)$$

$$\Psi''(y) < 0 \quad \text{при всех } y > 0. \quad (44)$$

*Доказательство.* Проверим сначала равенство (43). Для этого запишем формулу (5) в виде

$$\Psi(y) = \int_0^{+\infty} \frac{2h(t) - 1}{2t} \sin(yt) dt + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{2t} dt$$

с функцией  $h$  из определения (4). При  $R > 0$  осуществим еще одно преобразование

$$\Psi(y) = \int_0^R \frac{2h(t) - 1}{2t} \sin(yt) dt + \int_R^{+\infty} \frac{h(t) \sin(yt)}{t} dt - \int_R^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{2t} dt + \frac{\pi}{4}. \quad (45)$$

Зададим произвольное малое  $\varepsilon > 0$  и подберем  $R > 0$  так, чтобы для всех  $y \geq 1$  одновременно выполнялись неравенства

$$\left| \int_R^{+\infty} \frac{h(t)}{t} \sin(yt) dt \right| \leq \int_R^{+\infty} \frac{h(t)}{t} dt < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \int_R^{+\infty} \frac{\sin(yt)}{2t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем найденное  $R > 0$  и применим к непрерывной на  $[0, R]$  функции  $(h(t) - 0.5)/t$  лемму Римана (см., например, [22, гл. 18, § 2]), в силу которой найдется такое  $Y_0 \geq 1$ , что при всех  $y \geq Y_0$  справедливо неравенство

$$\left| \int_0^R \frac{2h(t) - 1}{2t} \sin(yt) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак, согласно (45), для всех  $y \geq Y_0$  имеем  $|\Psi(y) - \pi/4| < \varepsilon$ . Предельное соотношение (43) доказано.

Перейдем к доказательству свойства (44), влекущего строгую выпуклость вверх функции  $\Psi$  на положительной полуоси. Из формулы (9) получим представление

$$\Phi''(y) = \int_0^{+\infty} \left( g(t)t^2 + 1 + \frac{t}{2} \right) e^{-t} \sin(yt) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \sin(yt) dt,$$

в силу которого с учётом связи (15) имеем

$$\Psi''(y) = \Phi''(y) - \left( y \ln \frac{y}{e} \right)'' = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \sin(yt) dt - \frac{1}{y}, \quad y > 0. \quad (46)$$

Интегрируя в (46) два раза по частям, приходим к тождеству

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \sin(yt) dt - \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2} \int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)'' \sin(yt) dt, \quad y > 0.$$

Доказательство (44) свелось к обоснованию неравенства

$$\int_0^{+\infty} \left( \frac{t}{e^t - 1} \right)'' \sin(yt) dt > 0 \quad \text{при всех } y > 0. \quad (47)$$

Отдельно проверяется, что бесконечно дифференцируемая функция

$$w(t) = \frac{t}{e^t - 1}, \quad t \neq 0, \quad w(0) = 1,$$

обладает свойствами

$$w''(t) > 0, \quad w'''(t) < 0, \quad t > 0.$$

Поэтому, согласно [16, гл. 2, следствие 1 теоремы 1], выполнено (47). Предложение 4 полностью доказано.  $\square$

Наглядное представление о свойствах вспомогательной функции  $\Psi$ , отмеченных в замечании 1 и предложении 4, можно получить из рис. 4.

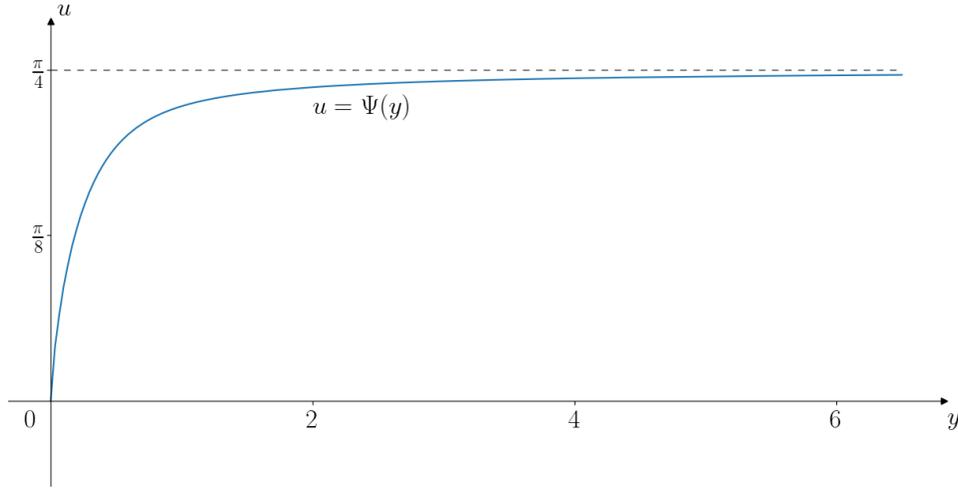


Рис. 4. График вспомогательной функции  $\Psi$ , заданной в (5).

#### 4 Альтернативный подход к решению задачи

Обсудим здесь другой возможный подход к изучению свойств функции  $\Phi$ , основанный на представлении

$$\Phi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{y}{n} - \operatorname{arctg} \frac{y}{n} \right) - \gamma y - \frac{\pi}{2}, \quad y > 0. \quad (48)$$

Формула (48) фактически отмечена в [13]. Там же указана связь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{y}{n} - \operatorname{arctg} \frac{y}{n} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \zeta(2m+1)}{2m+1} y^{2m+1}, \quad 0 < y \leq 1, \quad (49)$$

в которой  $\zeta$  — дзета-функция Римана.

Рассмотрим «комплексифицированный» ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{w}{n} - \operatorname{arctg} \frac{w}{n} \right), \quad (50)$$

где переменная  $w$  принадлежит полосе  $|\operatorname{Im} w| < 1$ . Пусть  $K$  — произвольный компакт из этой полосы и  $d \equiv \max\{|w| : w \in K\} > 0$ . Для  $w \in K$  и номеров  $n > \sqrt{2}d$  запишем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{w}{n} - \operatorname{arctg} \frac{w}{n} \right| &= \left| \int_0^{w/n} \frac{\tau^2}{1 + \tau^2} d\tau \right| \leq \frac{|w|}{n} \max_{\tau \in [0, w/n]} \frac{|\tau|^2}{|1 + \tau^2|} \leq \\ &\leq \frac{d}{n} \frac{d^2/n^2}{1 - d^2/n^2} < 2 \frac{d^3}{n^3}, \end{aligned}$$

где интеграл взят по отрезку  $[0, w/n]$ . Как видим, ряд (50), составленный из аналитических в полосе  $|\operatorname{Im} w| < 1$  функций, сходится равномерно на компактах из  $|\operatorname{Im} w| < 1$ , и поэтому его сумма, согласно теореме Вейерштрасса, является аналитической в этой полосе. Тем самым  $\Phi$  есть аналитическая функция вещественной переменной  $y > 0$  как сужение на положительную полуось функции, аналитической при  $|\operatorname{Im} w| < 1$ . Считая, что  $\Phi(0) = -\pi/2$ , получим непрерывную при  $y \geq 0$  функцию.

Формула для производной имеет вид

$$\Phi'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{n(n^2 + y^2)} - \gamma, \quad y \geq 0, \quad (51)$$

поскольку ряд в (51), полученный почленным дифференцированием ряда (50), сходится равномерно на любом отрезке  $[0, c]$ , где  $c > 0$ . В частности,  $\Phi'(0) = -\gamma$ . Очевидно, что функция (51) возрастает от  $-\gamma$  до  $+\infty$ , принимая значение, равное нулю, в единственной точке  $y_{\min} > 0$ . Локализуем точку  $y_{\min}$  глобального минимума функции (48). Вначале заметим, что  $y_{\min} < 1$ , так как

$$\Phi'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + 1)} - \gamma > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \gamma = \frac{1}{2} \zeta(3) - \gamma = 0.02 \dots > 0.$$

С другой стороны,

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{\min}^2}{n(n^2 + y_{\min}^2)} < \frac{y_{\min}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} y_{\min},$$

откуда  $y_{\min} > 12\gamma/\pi^2 > 0.7$ . Интервал  $(0.7, 1)$  локализации точки  $y_{\min}$  можно существенно уменьшить, если оценить производную (51) не столь грубо. Например, вполне ясно, что

$$a \equiv \frac{4}{5} (\zeta(3) - 1) < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 + y_{\min}^2)} < \zeta(3) - 1 \equiv b,$$

ибо  $0 < y_{\min} < 1 \leq n/2$  при всех  $n \geq 2$ . Это дает неравенства

$$\frac{1}{1 + y_{\min}^2} + a < \frac{\gamma}{y_{\min}^2} < \frac{1}{1 + y_{\min}^2} + b,$$

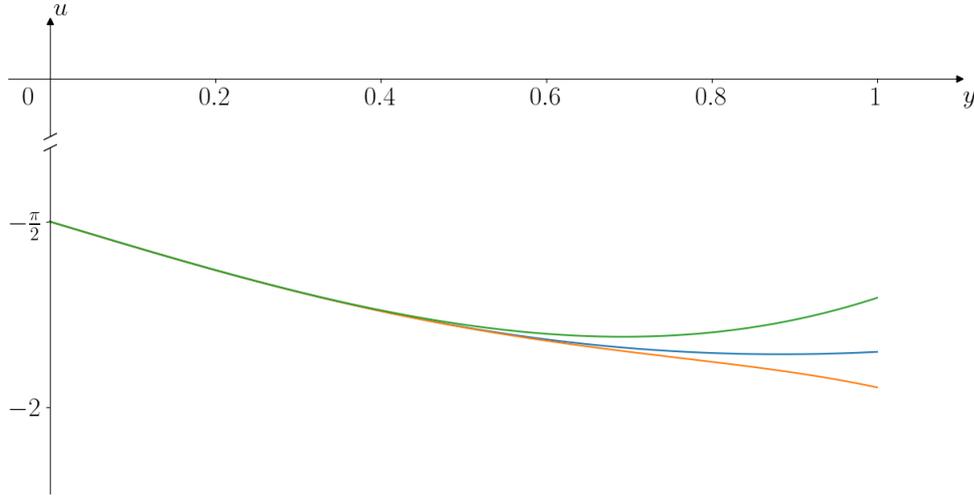


Рис. 5. Графики функций  $\Phi$  (синий),  $\Phi_1$  (оранжевый) и  $\Phi_2$  (зеленый).

которые можно переписать в форме двусторонней оценки

$$(0.86)^2 < \frac{\sqrt{D_b} - (b + 1 - \gamma)}{2b} < y_{\min}^2 < \frac{\sqrt{D_a} - (a + 1 - \gamma)}{2a} < (0.9)^2,$$

где обозначено  $D_\xi = (\xi + 1 - \gamma)^2 + 4\xi\gamma$  для  $\xi = a$  и  $\xi = b$ . Компьютерный анализ формулы (51) показывает, что на самом деле  $y_{\min} \in (0.88, 0.89)$ .

Оценим теперь минимальное значение  $\Phi_{\min} \equiv \Phi(y_{\min})$ . Для этого удобно воспользоваться представлением (49). Поскольку

$$\frac{1}{3} \zeta(3) y^3 - \frac{1}{5} \zeta(5) y^5 < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \zeta(2m+1)}{2m+1} y^{2m+1} < \frac{1}{3} \zeta(3) y^3$$

при всех  $y \in (0, 1]$ , то

$$\Phi_1(y) < \Phi(y) < \Phi_2(y), \quad y \in (0, 1], \quad (52)$$

где обозначено

$$\Phi_1(y) \equiv \frac{1}{3} \zeta(3) y^3 - \frac{1}{5} \zeta(5) y^5 - \gamma y - \frac{\pi}{2}, \quad \Phi_2(y) \equiv \frac{1}{3} \zeta(3) y^3 - \gamma y - \frac{\pi}{2}. \quad (53)$$

Проверяется, что

$$\Phi'_1(y) = \zeta(3) y^2 - \zeta(5) y^4 - \gamma < 0, \quad \Phi'_2(y) = \zeta(3) y^2 - \gamma > 0$$

для всех  $y \in (0.7, 1]$ . Следовательно, на таком промежутке  $\Phi_1$  убывает, а  $\Phi_2$  возрастает, и верны оценки

$$\Phi_1(1) < \Phi_1(y_{\min}) < \Phi(y_{\min}) < \Phi_2(y_{\min}) < \Phi_2(1).$$

Отсюда

$$\frac{1}{3} \zeta(3) - \frac{1}{5} \zeta(5) - \gamma - \frac{\pi}{2} < \Phi_{\min} < \frac{1}{3} \zeta(3) - \gamma - \frac{\pi}{2}$$

со значениями границ  $-1.95\dots$  и  $-1.74\dots$  соответственно. Численный анализ формулы (48) на компьютере дает  $\Phi_{\min} \in (-1.878, -1.877)$ .

Итак, на отрезке  $[0, y_{\min}]$  функция  $\Phi$  убывает от  $-\pi/2$  до  $\Phi_{\min}$ , затем на луче  $[y_{\min}, +\infty)$  функция  $\Phi$  возрастает от  $\Phi_{\min}$  до  $+\infty$ . На всем луче  $y \geq 0$  функция  $\Phi$  выпукла вниз, поскольку из (51) после дифференцирования имеем

$$\Phi''(y) = 2y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + y^2)^2} > 0, \quad y > 0,$$

что совпадает с формулой (12).

Многочлены (53) суть улучшенные миноранта и мажоранта для функции  $\Phi$  при малых положительных  $y$  по сравнению с  $\underline{\Phi}$  и  $\bar{\Phi}$  из теоремы 1 (см. рис. 2 и рис. 5). В то же время, из оценок (52) видно, что  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  не годятся для качественного оценивания корня  $y_*$ . Это проделано в предложении 2 с привлечением интегрального представления (1). Отметим, наконец, что и асимптотическое поведение  $\Phi(y)$  при  $y \rightarrow +\infty$  также проще изучать, исходя из интегрального представления (1) (см. предложение 1), а не из разложения в ряд (48).

Авторы признательны Б.И. Сулейманову за интерес к работе и ценные указания на литературные источники [7]–[9], а также рецензенту за полезные замечания.

## References

- [1] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, V. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1927. JFM 53.0180.04
- [2] F.W.J. Olver (ed.), D.W. Lozier (ed.), R.F. Boisvert (ed.), C.W. Clark (ed.), *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Zbl 1198.00002
- [3] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *Integral representations of quantities associated with Gamma function*, Ufa Math. J., **13**:4 (2021), 50–62. Zbl 1499.33011
- [4] A.Yu. Popov, *Two-sided estimates of the central binomial coefficient*, Chelyabinskii Fiz.-Mat. Zh., **5**:1 (2020), 56–69. Zbl 1470.05013
- [5] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On an analog of the Binet integral representation*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **17** (2020), 840–852. Zbl 1450.30042
- [6] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On one integral representation of Binet type*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **21**:2 (2024), 741–754. Zbl 1552.30023
- [7] V.E. Zakharov, S.V. Manakov, *Asymptotic behavior of non-linear wave systems integrated by the inverse scattering method*, Sov. Phys. JETP, **44**:1 (1976), 106–112. MR0673411
- [8] H. Segur, M.J. Ablowitz, *Asymptotic solutions of nonlinear evolution equations and a Painlevé transcendent*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **3**:1-2 (1981), 165–184. Zbl 1194.35388
- [9] B.I. Suleimanov, *Effect of a small dispersion on self-focusing in a spatially one-dimensional case*, JETP Letters, **106**:6 (2017), 400–405.

- [10] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1986. Zbl 0601.10026
- [11] V.V. Volchkov, *On an equality equivalent to the Riemann hypothesis*, Ukr. Math. J., **47**:3 (1995), 491–493. Zbl 1024.11060
- [12] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *Integral representations for the argument of the Gamma function of a complex variable*, Dokl. RAN. Math. Inf. Proc. Upr., **524** (2025), 19–24.
- [13] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *An analytical formula for the argument of the gamma function as a complex quantity*, Math. Notes, **118**:5 (2025), 1061–1074.
- [14] E.C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford University Press, London, 1958. MR3155290 (1975 Zbl 0336.30001)
- [15] R.O. Kuzmin, *Bessel Functions*, ONTI, Moscow, 1935.
- [16] A.M. Sedletsii, *Classes of analytic Fourier transforms and exponential approximations*, Fizmatlit, Moscow, 2005.
- [17] A.E. Dubinov, I.D. Dubinova, S.K. Saikov, *Lambert W function and its applications in mathematical problems of physics*, Publishing House of RFNC-VNIIEF, Sarov, 2006.
- [18] A.B. Kostin, V.B. Sherstyukov, *Application of the Hausdorff metric in model problems with discontinuous functions in boundary conditions*, J. Math. Sci., New York, **274**:4 (2023), 511–522. Zbl 1537.35198
- [19] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, D.E. Knuth, *On the Lambert W function*, Adv. Comput. Math., **5**:4 (1996), 329–359. Zbl 0863.65008
- [20] A.V. Karev, I.V. Tikhonov, *Zeros distribution of a Mittag-Leffler type entire function with applications to the theory of inverse problems*, Chelyabinskii Fiz.-Mat. Zh., **2**:4 (2017), 430–446. Zbl 1465.30007
- [21] G.G. Braichev, *The least type of an entire function whose zeros have prescribed averaged densities and lie on rays or in a sector*, Sb. Math., **207**:2 (2016), 191–225. Zbl 1342.30018
- [22] V.A. Zorich, *Mathematical analysis II*, Springer Verlag, Berlin, 2004. Zbl 1071.00003

ANDREW BORISOVICH KOSTIN  
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,  
LENINSKIYE GORY, 1,  
119991, MOSCOW, RUSSIA  
Email address: [abkostin@yandex.ru](mailto:abkostin@yandex.ru)

VLADIMIR BORISOVICH SHERSTYUKOV  
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,  
LENINSKIYE GORY, 1,  
119991, MOSCOW, RUSSIA  
Email address: [shervb73@gmail.com](mailto:shervb73@gmail.com)