S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. A255–A269 (2025) УДК 519.63,519.64
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.A16 MSC 65N21,65R32

АНАЛИЗ ДАННЫХ КОШИ В НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ С ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин

Посвящается 75-летию Василия Ивановича Васильева

Abstract: The paper analyzes the ill-posedness of the Cauchy problem with data on a part of the boundary for partial differential equations. The variants of the boundaries of the region (time-like, characteristic, space-like) are considered, in which the Cauchy data on the part of the boundary are interconnected. The conditions are obtained, the violation of which leads to instability of the continuation problem.

Keywords: ill-posed problem, continuation problems, Cauchy problem, Laplace equation, Helmholtz equation, wave equation, Dirichlet and Neumann data

1 Введение

Термин “задача продолжения” относится к двум основным (во многом взаимосвязанным) направлениям исследований:

(1) Аналитическое продолжение функций с ограниченной области (например, мнимого времени на полную комплексную плоскость).

Kabanikhis S.I., Shishlenin M.A. Analysis of Cauchy data in ill-posed continuation problems from a part of the boundary.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-61-00027, https://rscf.ru/project/25-61-00027/ .

Поступила 1 ноября 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

(2) Численное продолжение решений уравнений с данными на части границы (геофизика, ультразвуковая томография, нелинейные волны).

(1). Задача продолжения функций имеет давнюю историю, начиная с XVIII века. Идея продолжения функции восходит к Эйлеру (изучение расходящихся рядов и специальных функций). Продолжение функций понималось как распространение их свойств и формул за пределы исходных областей определения, например, обобщение дискретных рядов до непрерывных функций или распространение их свойств с действительных чисел на комплексные. В XIX веке Риман и Вейерштрасс формализовали аналитическое продолжение в комплексном анализе: если функция аналитична в некоторой области, то её можно однозначно распространить на более широкую область, даже если исходный ряд расходится.

Определение 1. *Пусть области $D_1 \subset D_2 \subset \mathbb{C}$, функции f_1 и f_2 голоморфны в областях D_1 и D_2 соответственно и $f_1 = f_2$ на D_1. Тогда f_2 называется аналитическим продолжением f_1 с D_1 на D_2.*

Бывает, что вместо D_1 исходная функция f_0 задана на интервале или луче $I \subset \mathbb{R}$:

$$f_0 : I \to \mathbb{C} \text{ или } \mathbb{R}.$$

Ищется область $D_2 \supset I$ и функция $f_2 \in \mathcal{O}(D_2)$ такая, что

$$f_2 = f_0 \text{ на } I.$$

В физике аналитическое продолжение стало ключевым инструментом в XX веке благодаря квантовой теории поля и статистической механике [38].

(2). Задача продолжения в ультразвуковой томографии (УЗТ) понимается как численное решение волнового уравнения с данными на части границы области. УЗТ появилась в 1970-х—1980-х годах наряду с достижениями компьютерной томографии. С начальными теоретическими результатами по задачам продолжения решений уравнений математической физики можно познакомится в работах М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, С.П. Шишатского [8, 9, 10], а с современным обзором теории задачи продолжения можно познакомиться в работах В.Г. Романова, см. статьи [16, 17, 28, 29], а также имеющиеся там ссылки.

Задача Коши для уравнения Лапласа (задача продолжения) является одной из некорректных задач, имеющих большое практическое значение. Например, эта задача возникает в горной инженерии для интерпретации гравитационных и магнитных полей (М.М. Лаврентьев, Л.Я. Савельев, 1999, [14]). Для определения местоположения подповерхностных неоднородностей необходимо предварительно определить аномальное гравитационное поле на глубине, используя измеренные на поверхности геофизические данные.

Во многих обратных задачах искомые неоднородности располагаются на определенной глубине под слоем среды с известными параметрами (в геофизике это, как правило, либо однородные, либо слоистые среды). В этом случае возможность хотя бы приближенно решать задачу продолжения геофизических полей от поверхности земли к месту расположения неоднородностей становится важным инструментом в руках специалиста-практика.

Первые результаты, связанные с построением эффективного алгоритма решения задачи Коши для уравнения Лапласа, опубликованы М.М. Лаврентьевым (1956, [2]). Основываясь на формуле Карлемана, М.М. Лаврентьев (1957, [3]) предложил несколько эффективных методов решения задачи в классе ограниченных функций, а для пространственной задачи были получены оценки, характеризующие их устойчивость в классе ограниченных решений. A.P. Calderón (1958, [4]) доказал теорему единственности для эллиптического оператора второго порядка с гладкими коэффициентами в ограниченной области. F. John (1960, [5]) исследовал устойчивость решений задач Коши для эллиптических и гиперболических уравнений. Заметим, что в работах М.М. Лаврентьева (1956, [2]) и А.Н. Тихонова (1965, [7]) задача Коши для уравнения Лапласа сведена к интегральному уравнению первого рода.

В.А. Козлов и др. (1991, [12]) предложили метод решения задачи Коши для эллиптических уравнений, основанный на итерационной процедуре, которая представляет собой последовательное решение корректных смешанных краевых задач для исходного уравнения. Одним из преимуществ этого метода является то, что он сохраняет исходное уравнение. Была доказана сходимость метода и его регуляризующие свойства, полученные путем выбора соответствующих граничных условий. С.И. Кабанихин и А.Л. Карчевский (1995, [13]) свели некорректную задачу Коши для уравнения Лапласа к обратной задаче: восстановить граничное условие на недоступной части границы. Обратная задача решена методом соответствующего целевого функционала. V.N. Titarenko и A.G. Yagola (2002, [15]) исследовали задачу Коши для двумерного уравнения Лапласа при условии, что точное решение принадлежит компактному множеству. Задача решается как операторное уравнение, найдены погрешности оператора и правой части при условии, что решение принадлежит множествам монотонных, выпуклых функций или функций с константой Липшица. G. Alessandrini и др. (2009, [18]) исследовали задачу продолжения решения эллиптического уравнения для системы Ламе. В.Г. Романов (2005, 2006, [16, 17]) исследовал задачу Коши для гиперболического уравнения второго порядка с данными на времениподобной поверхности и получил оценку устойчивости. D.N. Hao и др. (2010, [19]) исследовали задачу Коши для линейных уравнений в частных производных общего эллиптического типа второго порядка. Методом сопряженных градиентов минимизируется функционал дискретной постановки задачи на основе интерполяции с использованием метода конечных разностей или граничных элементов. S.I. Kabanikhin и др. (2013, [20]) построены в явном виде и проанализированы сингулярные числа оператора задачи продолжения для уравнения Гельмгольца с комплексным волновым числом. S.I. Kabanikhin и др. (2014, [21]) провели сравнительный анализ численных методов регуляризации дискретной постановки задачи продолжения для уравнения Гельмгольца. D. Maxwell (2014, [23]) показал, что итерационный метод Козлова–Мазьи–Фомина может быть переформулирован в виде итераций Ландвебера. M. Klibanov (2015, [24, 25]) применил весовые функции Карлемана в функционале Тихонова для обоснования строго гарантированной сходимости численных методов решения некорректных задач Коши для уравнений второго порядка в частный производных. D.N. Hao и др. (2018, [26]) представили концепцию "очень слабого" решения задачи Коши для эллиптических уравнений. Задача Коши упорядочивается с помощью корректной нелокальной краевой задачи, решение которой также понимается в очень слабом смысле. Для решения нелокальной краевой задачи предлагается устойчивая конечно-разностная схема, которая затем применяется для регуляризации задачи Коши. C. Liu и др. (2018, [27]) предложили новый двухэтапный метод решения трехмерного уравнения Пуассона в произвольной ограниченной области на основе представления частного и однородного решения. J. Cheng и др. (2022, [32]) исследовали задачу продолжения решений эллиптических и параболических уравнений, ограниченных на гиперплоскости, при некоторых условиях симметрии коэффициентов, и получили оценки устойчивости. Q. Huang и др. (2023, [31]) исследовали задачу Коши о восстановлении как граничного условия, так и потока на недоступной границе по данным Дирихле и Неймана, измеренным на доступной границе, на основе регуляризации Тихонова и регуляризованной формулировки. M. Botchev и др. (2023, [30]) провели сравнительный анализ метода горизонтальной диагонализации и подгонки (МГДП) с итерациями Ландвебера для трехмерной задачи Коши для уравнения Пуассона. МГДП дискретизирует горизонтальные переменные и преобразует трехмерную задачу в серию несвязанных одномерных задач в вертикальном измерении, что значительно уменьшает размерность задачи. Показано, что количество одномерных задач является параметром регуляризации. Y. Chen и др. (2023, [34]) получили оценку условной устойчивости. Гармоническая мера использована в качестве индикаторной функции для точной оценки уклонения численного решения для нахождения подобласти, где локальная скорость сходимости превышает определенный порядок. С.Б. Сорокин (2024, [37]) предложил прямой метод численного решения задачи Коши для уравнения Лапласа в прямоугольной области, основанный на разложении искомого решения по собственным функциям разностного аналога оператора Лапласа. Y. Chen и др. (2024, [36]) исследовали единственность задачи продолжения для уравнений Гельмгольца на сфере. Доказана оценка условной устойчивости типа Гельдера. Y. Dai и др. (2025, [39]) исследовали нейросетевой метод решения задач оптимального управления для линейных и полулинейных эллиптических задач. A. Bukhgeim и др. (2025, [40]) получили новые оценки устойчивости задач продолжения решений эллиптических уравнений по данным на конечных дискретных множествах с использованием оценок типа Карлемана–Хёрмандера. E. Burman и др. (2025, [45]) исследовали обратную граничную задачу для нелинейного уравнения в частных производных, на основе сжатия граничных данных с использованием ортогонального разложения и идентификации нелинейной малоранговой структуры с использованием автоэнкодера. E. Burman и др. (2025, [46]) исследовали численные аппроксимации некорректных эллиптических задач с условной устойчивостью. B. Kaltenbacher и др. (2025, [43]) исследовали задачу Коши для уравнения Лапласа с помощью замены производных дробными и метода квазиобращения.

Более детальный обзор полученных научных результатов можно найти в работах [22, 24, 41, 42].

В данной статье мы рассмотрим относительно редко затрагиваемый вопрос о взаимосвязи данных Коши на части границы. Начнем с очевидных и известных фактов, связанных с функцией Грина, и исследуем влияние взаимосвязи данных Коши на неустойчивость задачи продолжения.

2 Примеры некорректных задач продолжения

Задача продолжения решения с части границы была одной из первых, на возможную некорректность которой обратили внимание математики. Ж. Адамар (1923, [1]) привел пример последовательности решений задачи Коши для уравнения Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{x=0} = \frac{1}{n}\sin(ny), \qquad u_x|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x,y) = \frac{1}{n}\frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}\sin(ny). \tag{3}$$

Видно, что данные Коши (2) убывают, а решение (3) неограниченно растет при стремлении параметра n к бесконечности.

Это же свойство имеет задача Коши для гиперболического уравнения с данными на времениподобной поверхности $x = 0$:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \tag{4}$$

$$u|_{x=0} = \frac{1}{n}\cos(\sqrt{2}ny)\cos(nt), \qquad u_x|_{x=0} = 0, \tag{5}$$

решение которой дается формулой:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{n}\frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2}\cos(\sqrt{2}ny)\cos(nt). \tag{6}$$

На некорректность второй задачи обратил внимание Р.Курант (1964, [6]), но уже по другому поводу. Доказав теорему единственности решения задачи (4)—(6) восстановления $u(x, y, t)$ по данным Коши (5), (6), он отметил “the peculiar circumstances”, что данные Коши, точнее, функция $f(y, t) = u(0, y, t)$, обладает свойством, аналогичным аналитичности. Точнее говоря, эта функция однозначно определяется в области (см. Рис. 1) своими значениями в полосе $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (0, T)$ при сколь угодно малом положительном ε.

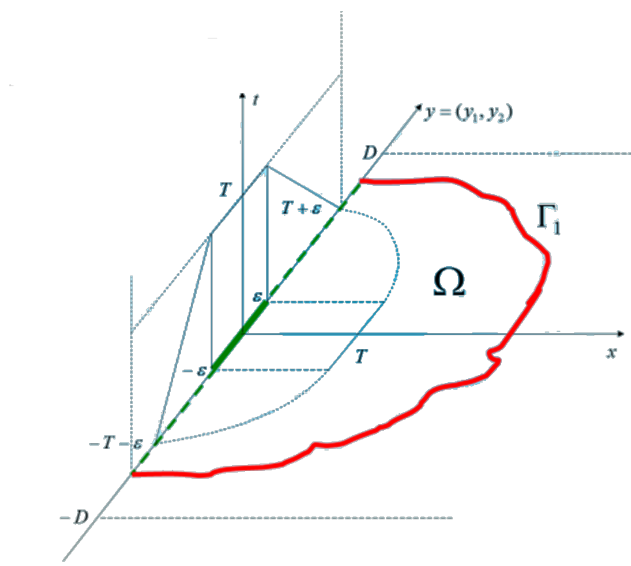

Рис. 1. Данные Коши

В данной работе мы покажем, что на корректность такого рода задач влияют свойства начальных данных.

3 Анализ данных двумерной задачи продолжения для гиперболического уравнения

Для выяснения взаимосвязи данных Коши задачи продолжения мы сначала используем известные формулы для явного решения некоторых задач.

3.1. Рассмотрим прямую задачу [11]:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - a^2 u, \qquad x \in (0, L), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (x, 2L - x); \tag{7}$$

$$u|_{x=0} = g_0(y, t), \qquad u_x|_{x=0} = g_1(y, t), \tag{8}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0. \tag{9}$$

Пусть

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u^{(m)}(x, t) \sin(my).$$

Рассмотрим последовательность прямых задач для коэффициентов Фурье:

$$\frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u^{(m)}}{\partial x^2} - (m^2 + a^2) u^{(m)}(x, t), \qquad |m| \le N;$$

$$u^{(m)}\Big|_{x=0} = g_0^{(m)}(t), \qquad \frac{\partial u^{(m)}}{\partial x}\Big|_{x=0} = g_1^{(m)}(t).$$

Здесь

$$g_0(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_0^{(m)}(y) \sin(my), \qquad g_1(y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_1^{(m)}(y) \sin(my).$$

$$u^{(m)}(x, t) = \frac{1}{2}[g_0^{(m)}(t + x) + g_0^{(m)}(t - x)] + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t+x} g_1^{(m)}(\tau) d\tau + \frac{c^2}{2} \int\limits_0^x \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u^{(m)}(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Обозначим

$$g^{(m)}(x, t) = \frac{1}{2}[g_0^{(m)}(t + x) + g_0^{(m)}(t - x)] + \frac{1}{2} \int\limits_{t-x}^{t+x} g_1^{(m)}(\tau) d\tau. \tag{10}$$

Тогда

$$|u^{(m)}(x, t)| \le |g^{(m)}(x, t)| + \frac{c^2}{2} \int\limits_0^x \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} |u^{(m)}(\xi, \tau)| d\tau d\xi \le$$

$$\le |g^{(m)}(x, t)| + \frac{c^2}{2} \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi} ||u^{(m)}(\xi, \tau)|| d\tau d\xi \le c^2 \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2} ||u^{(m)}||_{\alpha}(x).$$

Здесь $c^2 = m^2 + \alpha^2$, $\alpha^2 > c^2$,

$$||u^{(m)}||(x) = \sup_{\tau \in [x, L-x]} |u^{(m)}(x, \tau)|,$$

$$||u^{(m)}||_{\alpha}(x) = \sup_{\xi \in [0, x]} \{||u^{(m)}||(\xi) e^{-\alpha\xi}\}, \quad \alpha > 0,$$

$$\sup_{\xi\in[0,x],\tau\in[x,L-x]} |u^{(m)}(\xi,\tau)| = ||u^{(m)}||_C(x).$$

Откуда имеем следующую оценку

$$e^{-\alpha x}||u^{(m)}||_C(x) \leq ||u^{(m)}||_\alpha(x). \tag{11}$$

Получаем, что

$$||u^{(m)}||_\alpha(x) \leq ||g^{(m)}||_\alpha(x) + c^2\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}||u^{(m)}||_\alpha(x).$$

Положим $\alpha > c$, тогда

$$||u^{(m)}||_\alpha \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - c^2}||g^{(m)}||_\alpha \tag{12}$$

3.2. Перейдем к анализу двумерной задачи (7)–(9).
Используя оценку (12) получим

$$||u^{(m)}||_\alpha \leq \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - c^2}||g^{(m)}||_\alpha.$$

В силу (11) получим

$$||u^{(m)}||_C(x) \leq e^{\alpha x}\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - c^2}||g^{(m)}||_C(x)$$

Сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}||g^{(m)}||_C e^{\alpha x}\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - c^2},$$

из которого следует достаточное условие существование и единственность решения задачи продолжения (7)–(9) и данные Коши $g_0(y,t)$ и $g_1(y,t)$, точнее на взаимосвязь их коэффициентов Фурье.

В силу (10), то мы получаем, что для существования единственного решения задачи продолжения достаточно того, чтобы ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}||g^{(m)}(x,t)||_C e^{\alpha^2+m^2}$$

сходился. Это накладывает очевидные условия на взаимосвязи данных Коши задачи продолжения (7)–(9).

4 Взаимосвязи данных Коши задачи продолжения для эллиптического уравнения

4.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}
u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x > 0, \quad y \in (0,\pi); \\
u\big|_{x=0} = g_0(y), \qquad u_x\big|_{x=0} = g_1(y); \\
u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0.
\end{gathered}$$

Решение данной задачи будем искать в виде ряда Фурье:

$$u(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} u^{(m)}(x)\sin(my).$$

Получим следующее соотношение на коэффициенты Фурье:

$$u^{(m)''}(x) - m^2 u^{(m)} = 0, \tag{13}$$

$$u^{(m)}(0) = g_0^{(m)}, \qquad u^{(m)'}(0) = g_1^{(m)}. \tag{14}$$

Здесь

$$g_0(y) = \sum_{m=0}^{\infty} g_0^{(m)}\sin(my), \qquad g_1(y) = \sum_{m=0}^{\infty} g_1^{(m)}\sin(my).$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$u^{(m)}(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Учитывая начальные условия (14), получим следующие соотношения

$$g_0^{(m)} = C_1 + C_2, \qquad g_1^{(m)} = C_1 m - C_2 m.$$

Откуда находим, что

$$C_1 = \frac{g_0}{2} + \frac{g_1}{2m}, \qquad C_2 = \frac{g_0}{2} - \frac{g_1}{2m}.$$

Тем самым

$$u^{(m)}(x) = \left[\frac{g_0}{2} + \frac{g_1}{2m}\right]e^{mx} + \left[\frac{g_0}{2} - \frac{g_1}{2m}\right]e^{-mx}.$$

Получаем следующее условие

$$g_0 m + g_1 = 0$$

или

$$(g_0 m + g_1)e^{mx} \leq \text{const}.$$

Данное условие гарантирует, что решение на бесконечности не убывает и дает условие на данные Коши для задачи продолжения.

4.2. Рассмотрим для примера задачу продолжения решения с окружности в область $a < r$, $a > 1$, $|r| = a$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, \tag{15}$$

$$u(0,\varphi) = g_0(\varphi) = \sum_n g_0^{(n)} e^{in\varphi}, \tag{16}$$

$$u_r(0,\varphi) = g_1(\varphi) = \sum_n g_1^{(n)} e^{in\varphi}. \tag{17}$$

Метод разделения переменных: ищем решение в виде

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi).$$

Решение задачи

$$\Phi''(\varphi) + n^2\Phi = 0,$$

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = C_n e^{in\varphi}.$$

Решение задачи

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

$$R_0(r) = a_0 \ln r + b_0$$

$$R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Ищем ограниченные при $r \to \infty$ решение задачи Коши (15)–(17):

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n}\big) \sin n\varphi,$$

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n a^n + \beta_n a^{-n}\big) \sin n\varphi, \tag{18}$$

$$u_r(a, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n n a^{n-1} - \beta_n n a^{-n-1}\big) \sin n\varphi. \tag{19}$$

С учётом (16) и (17): получаем

$$\begin{cases} \alpha_n a^n + \beta_n a^{-n} = g_0^{(n)}, \\ \alpha_n n a^{n-1} + \beta_n (-n) a^{-n-1} = g_1^{(n)}. \end{cases}$$

Решаем систему (18), (19):

$$\begin{cases} \alpha_n a^n + \beta_n a^{-n} = g_0^{(n)}, \\ \alpha_n a^{n-1} - \beta_n a^{-n} = \frac{a}{n} g_1^{(n)}. \end{cases}$$

Откуда находим, что

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{2} a^{-n} \left(g_0^{(n)} + \frac{a}{n} g_1^{(n)} \right), \\ \beta_n = \frac{1}{2} a^{n} \left(g_0^{(n)} - \frac{a}{n} g_1^{(n)} \right). \end{cases}$$

Отсюда получаем связь $g_0^{(n)}$ и $g_1^{(n)}$, при которой решение ограничено при $r \to \infty$.

Задача продолжения и нейронные сети

В данном разделе мы остановимся на некоторых подходах к численному решению и регуляризации задачи продолжения.

M. Nechita (2023, [35]) исследовал численную аппроксимацию на основе нейронных сетей, основанных на физике (PINNs), задачи продолжения решения для уравнения Гельмгольца. Используя условную устойчивость задачи, получена оценка погрешности PINNs. Численные расчеты двумерной задачи показали, что для получения PINNs, устойчивых к частоте, для решения обратных задач для уравнением Гельмгольца, необходимы более сложные методы.

Отметим пример задачи Коши для уравнения Гельмгольца:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 & \text{in } \Omega := (0,1) \times (0,1), \\ u(x,0) = 0 & \text{for } x \in [0,1], \\ u_y(x,0) = \sin(nx) & \text{for } x \in [0,1], \end{cases}$$

Для $n > k$ решение имеет вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \sin(nx) \sinh(\sqrt{n^2 - k^2}\, y).$$

Для $n = k$:

$$u(x,y) = \sin(kx) y.$$

Для $n < k$ решение имеет вид:

$$u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin(nx) \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\, y).$$

Отметим, что если n больше k, то задание произвольных данных Коши приводит к экспоненциальному росту решения.

K. Ito и др. в работе (2025, [44]) предложили итерационный метод прямой выборки для решения нелинейных эллиптических обратных задач на основе ограниченного числа пар данных Коши. Этот метод применим к широкому классу эллиптических обратных задач. Численные эксперименты по электроимпедансной томографии, оптической томографии и электрофизиологии сердца подтверждают его эффективность и надёжность, особенно благодаря повышению точности определения местоположения и формы неоднородностей в условиях сильного шума. Метод прямой выборки получил широкое признание благодаря возможности работы с малым количеством данных Коши.

Y. Chen ит др. (2025, [47]) предложили численный метод, основанный на обучении, для нахождения решения задачи :

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

используя функцию Грина:

$$\begin{cases} \Delta G(x,y) + k^2 G(x,y) = \delta(y-x), & y \in \Omega, \\ G(x,y) = 0, & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Авторы использовали представление

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x,y)}{\partial n} f(y) \mathrm{d}S_y, \quad x \in \Omega,$$

а также метод регуляризации А.Н. Тихонова для построения оператора прямой задачи. Ниже мы покажем, что данное представление позволяет установить взаимосвязь данных Коши (функции и ее нормальной производной) на части границы.

M. Hanke и O. Scherzer (2025, [48]) исследовали устойчивость регуляризации с помощью проекции для решения линейных обратных задач, если прямой оператор задан неявно, с помощью некоторых обучающих пар ввода–вывода.

Отметим, что аналогичный подход рассмотрен в работах С.И. Кабанихина (2023, [33]), S. Liu и др. (2025, [49]), в которых исследованы свойства обучающих пар и вытекающие из этих свойств условия, при которых линейная нейронная сеть либо может быть однозначно построена, либо возможно построить некоторые комбинации параметров линейной нейронной сети. Основная идея упомянутых работ заключается в сведении задачи построения линейной нейронной сети к анализу корректности систем линейных алгебраических уравнений.

5 Заключение

В работе рассматривается некорректность задач продолжения с точки зрения задания данных на части границы. Проведен анализ некорректности задачи Коши с данными на части границы для уравнений в частных производных.

References

[1] J. Hadamard, *Lectures on the Cauchy Problem in Linear Differential Equations*, Yale University Press, New Haven, CT, 1923.

[2] M. M. Lavrent'ev, *On the Cauchy problem for Laplace equation*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **20**:6 (1956), 819–842. Zbl 0074.09004

[3] M. M. Lavrent'ev, *On Cauchy problem for linear elliptical equations of the second order*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **112**:2 (1957), 195–197. Zbl 0077.30001

[4] A. P. Calderón, *Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations*, Am. J. Math., **80**:1 (1958), 16–36. Zbl 0080.30302

[5] F. John. *Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Commun. Pure Appl. Math., **13** (1960), 551–585. Zbl 0097.08101

[6] R. Courant, *Metody matematiceskoi fiziki. Tom II: Uravneniya s castnymi proizvodnymi*, Mir, Moscow, 1964. Zbl 0121.07801

[7] A.N. Tikhonov, *Nonlinear equations of the first kind*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **161**:5 (1965), 1023–1026. Zbl 0141.13301

[8] V.G. Romanov, *Some inverse problems for equations of hyperbolic type*, Nauka, Novosibirsk, 1972. Zbl 0249.35076

[9] S.P. Shishatskij, *A priori estimates in the problem of extending a wave field from a cylindrical time-like surface*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **213**:1 (1973), 49–50.

[10] M. M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.P. Shishatskij, *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Nauka, Moscow, 1980. Zbl 0476.35001

[11] A.S. Blagoveshchenskij, S.I. Kabanikhin, *On an inverse problem of the theory of wave propagation in a semi-infinite non-regular wave-guide*, Differ. Uravn., **19**:4 (1983), 603–607. Zbl 0531.35074

[12] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, A.V. Fomin, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **31**:1 (1991), 64–74. Zbl 0733.65056

[13] S. I. Kabanikhin, A. L. Karchevsky, *Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **3**:1 (1995), 21–46.

[14] M.M. Lavrent'ev, L.Ya. Savel'ev, *Theory of operators and ill-posed problems*, Izdatel'stvo Instituta Matematiki Im. S. L. Soboleva SO RAN, Novosibirsk, 1999. Zbl 0986.47011

[15] V.N. Titarenko, A.G. Yagola, *Cauchy problems for Laplace equation on compact sets*, Inverse Problems in Engineering, **10**:3 (2002), 235–254.

[16] V.G. Romanov, *A stability estimate for a solution to the wave equation with the Cauchy data on a timelike cylindrical surface*, Siberian Math. J., **46**:5 (2005), 925–934.

[17] V.G. Romanov, *Carleman estimates for second-order hyperbolic equations*, Siberian Math. J., **47**:1 (2006), 135–151.

[18] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella, *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, **25**:12 (2009), 123004.

[19] D.N. Hao, B.T. Johansson, D. Lesnic, P.M. Hien, *A variational method and approximations of a Cauchy problem for elliptic equations*, J. Algorithms Comput. Technol., **4**:1 (2010), 89–119.

[20] S.I. Kabanikhin, Y.S. Gasimov, D.B. Nurseitov, M.A. Shishlenin, B.B. Sholpanbaev, S. Kasenov, *Regularization of the continuation problem for elliptic equations*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **21**:6 2013, 871–884.

[21] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, D.B. Nurseitov, A.T. Nurseitova, S.E. Kasenov, *Comparative analysis of methods for regularizing an initial boundary value problem for the Helmholtz equation*, *J. Appl. Math.* **2014** (2014), Article ID 786326.

[22] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin. *Regularization of the decision prolongation problem for parabolic and elliptic equations from border part*, Journal of Mathematical and Computer Applications, **2**:2 (2014), 81–91.

[23] D. Maxwell, *Kozlov–Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration*, Inverse Probl. Imaging, **8**:2 (2014), 537–560.

[24] M.V. Klibanov, *Carleman estimates for the regularization of ill-posed Cauchy problems*, Appl. Numer. Math., **94** (2015), 46–74.

[25] M. V. Klibanov, *Carleman weight functions for solving ill-posed Cauchy problems for quasilinear PDEs*, Inverse Problems, **31** (2015), 125007.

[26] D.N. Hao, L.T. Thu Giang, S. Kabanikhin, M. Shishlenin, *A finite difference method for the very weak solution to a Cauchy problem for an elliptic equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **26**:6 (2018), 835–857.

[27] C. Liu, F. Wang, W. Qu, *Fast solving the Cauchy problems of Poisson equation in an arbitrary three-dimensional domain*, Comput. Model. Eng. Sci., **114**:3 (2018), 351–380.

[28] V.G. Romanov, *Regularization of a solution to the Cauchy problem with data on a timelike plane*, Siberian Math. J., **59**:4 (2018), 879–890.

[29] V.G. Romanov, *Estimation of the solution stability of the Cauchy problem with the data on a time-like plane*, Sib. Zh. Ind. Mat., **21**:3 (2018), 116–124.

[30] M. A. Botchev, S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, E. E. Tyrtyshnikov, *The Cauchy problem for the 3D Poisson equation: Landweber iteration vs. horizontally diagonalize and fit method*, J. Inverse Ill-Posed Problems, **31**:2 (2023), 203–221.

[31] Q. Huang, R. Gong, Q. Jin, Y. Zhang, *A Tikhonov regularization method for Cauchy problem based on a new relaxation model*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **74** (2023), 103935.

[32] J. Cheng, M. Yamamoto, *Continuation of solutions to elliptic and parabolic equations on hyperplanes and application to inverse source problems*, Inverse Problems, **38**:8 (2022), 085005.

[33] S.I. Kabanikhin, *Siberian IT industry and artificial intelligence*, Nauka i technologii sibiri, **3**:10 (2023), 9–15 (in Russian).

[34] Y. Chen, J. Cheng, S. Lu, M. Yamamoto, *Harmonic Measures and Numerical Computation of Cauchy Problems for Laplace Equations*, Chinese Annals of Mathematics, Series B, 44 (2023), 913–928.

[35] M. Nechita, *Solving ill-posed Helmholtz problems with physics-informed neural networks*, Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory, **52**:1 (2023), 90–101.

[36] Y. Chen, J. Cheng, Y. Jiang, *The conditional stability for unique continuation on the sphere for Helmholtz equations*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47 (2024), 13037–13050.

[37] S.B. Sorokin, *Direct numerical algorithm for calculating the heat flux at an inaccessible boundary*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **32**:3 (2024), 389–411.

[38] L. Zhang, E. Gull, *Minimal pole representation and controlled analytic continuation of Matsubara response functions*, Phys. Rev. B., **110**:3 (2024), 035154.

[39] Dai, Y., Jin, B., Sau, R.C., Zhi Zhou. *Solving elliptic optimal control problems via neural networks and optimality system*, Adv Comput Math., 51 (2025), 31.

[40] A. Bukhgeim, J. Cheng, C.C. Domme, S. Lu, *Continuation of solutions of elliptic systems from discrete sets with application to geometry of surfaces*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **33**:3 (2025), 443–459.

[41] Bakanov, G., Chandragiri, S., Kabanikhin, S., Shishlenin, M. *Comparative Analysis of Numerical Methods for Solving 3D Continuation Problem for Wave Equation*, Mathematics, **13**:18 (2025), 2979.

[42] G. Bakanov, S. Chandragiri, M.A. Shishlenin, *Jacobi numerical method for solving 3D continuation problem for wave equation*, Sib. Electron. Math. Reports, 22 (2025), 428–442.

[43] B. Kaltenbacher, W. Rundell, *Fractional regularisation of the Cauchy problem for Laplace's equation and application in some free boundary value problems*, Mathematics of Computation, 94, (2025), 647–679.

[44] K. Ito, B. Jin, F. Wang, J. Zou, *Iterative Direct Sampling Method for Elliptic Inverse Problems with Limited Cauchy Data*, SIAM Journal on Imaging Sciences. 2025. Vol. 18, Iss. 2. 1284–1313.

[45] E. Burman, M.G. Larson, K. Larsson, C. Lundholm *Stabilizing and solving unique continuation problems by parameterizing data and learning finite element solution operators*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 444 (2025), 118111.

[46] E. Burman, M. Nechita, L. Oksanen, *Optimal Approximation of Unique Continuation*, Found Comput Math, 25 (2025), 1025–1045.

[47] Y. Chen, J. Cheng, T. Li, Y. Miao, *A learning based numerical method for Helmholtz equations with high frequency*, Journal of Computational Physics, 520 (2025), 113478.

[48] M. Hanke, O. Scherzer, *Addendum: Data driven regularization by projection (2020 Inverse Problems36 125009)*, Inverse Problems, 41 (2025), 129401.

[49] S. Liu, S. Kabanikhin, S. Strijhak, Y.-A. Wang, Y. Zhang, *Revisiting linear machine learning through the perspective of inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **33**:2 (2025), 281–303.

Sergey Igorevich Kabanikhin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
pr. Lavrentieva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: ksi52@mail.ru

Maxim Alexandrovich Shishlenin
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
pr. Lavrentieva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: m.a.shishlenin@mail.ru