S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. 1750–1755 (2025) УДК 512.544
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.107 MSC 20E25

О КОММУТАНТАХ ГРУПП С СИМПЛЕКТИЧЕСКИМИ 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ

А.И. Созутов, В.М. Синицин

Представлено И.Б. Горшковым

Abstract: Coxeter groups, better known as reflection-generated groups, have numerous applications in various fields of mathematics and beyond. Groups with Fischer 3-transpositions are also associated with many structures: finite simple groups, triple graphs, geometries of various spaces, Lie algebras, etc. In previous works, the authors established a simple genetic relationship between Coxeter groups and groups with symplectic 3-transpositions Fisher's —symplectic and orthogonal groups over a field of two elements. As it turned out, Fisher groups are obtained from Coxeter groups using a single relation - the square of the product of two conjugate involutions, one of which belongs to the generating set of the Coxeter group, and the second is specially selected. Elements of computer calculations using the *GAP* system were used. In this paper, the genetic codes of the commutators of these groups are found. The series of Coxeter graphs used in the work are provided with markup indicating how

Keywords: genetic code of a group, Coxeter graph, groups with symplectic 3 transpositions.

Sozutov, A.I., Sinitsin, V.M., On commutators of groups with symplectic 3-transpositions.

Работа поддержана РНФ (грант 24-41-10007).

Поступила 28 июля 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

Введение

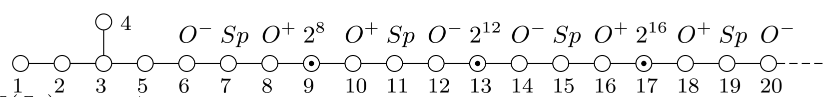
Множество $D = a^G$ инволюций группы G называется классом *3-транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$ [8, 2]; подгруппы $H = \langle D \cap H \rangle$ из G называются D-подгруппами [8]. Когда в G нет D-подгрупп порядков 18 и 54, G называется группой *с симплектическими 3-транспозициями* [9] (в работе [7] G называлась группой типа Σ_4). В известной теореме Б. Фишера [8], [2, теорема 2.58] это симметрические группы S_n, симплектические группы $Sp_{2l}(2)$ и ортогональные группы $O^{\pm}_{2l}(2)$. Б. Фишер в [8] использует описание этих групп из [10].

Группы с 3-транспозициями связаны со многими математическими структурами; это конечные простые группы [2; 6], тройные графы [2, с.125], геометрии пространств Фишера, геометрии ортогональных, симплектических, унитарных и др. пространств [3;5;7;8], алгебры Ли [9; 10], алгебры вершинных операторов и др. (см., например, [11; 12]).

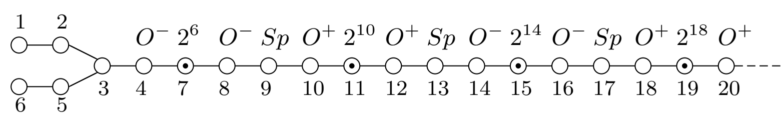
В [4, 5, 6] установлена простая связь групп $Sp_{2l}(2) \times Z_2$ и $O^{\pm}_{2l}(2)$ с некоторыми группами Кокстера [1, с. 286-293], [3, гл. 9]. В настоящей работе найдены генетические коды групп $Sp_{2l}(2)$ и $\Omega^{\pm}_{2l}(2)$ определяемые графами Γ_n ($2l = n-1$ для $Sp_{2l}(2)$ и $2l = n$ для $\Omega^{\pm}_{2l}(2)$).

Используемые в работе серии графов Γ_n описаны в [4]; там же графы были снабжены разметкой, указывающей, каким группам $W_n = \langle w_1, ..., w_n \rangle$ из $SL_n(2)$ соответствует рассматриваемый граф Γ_n. Приведем три серии графов Γ_n из [4] с разметкой:

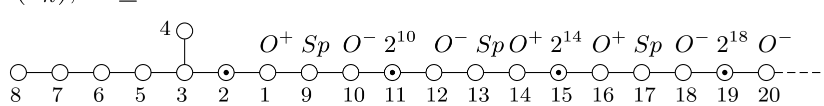
$W_n = W(E_n),\ n \geq 9:$



$W_n = W(I_n),\ n \geq 7:$



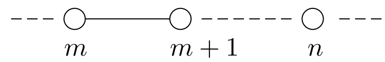
$W_n = W(J_n),\ n \geq 9:$



Согласно [4, предложение 1] если метка вершины n равна $O^{\pm}$, то $W_n \simeq O^{\pm}_n(2)$ и n — четное число; если над вершиной n стоит метка Sp, то $W_n \simeq Sp_{n-1}(2) \times Z_2$ и n — нечетное число; если метка вершины n равна 2^{n-1}, то n — нечетное число и группа W_n обладает нормальной элементарной абелевой 2-подгруппой порядка 2^{n-1}.

В общем случае *E-серией* называется множество $\{\Gamma_n\}$ $(n \geq m)$ вложенных друг в друга графов, если они являются деревьями, содержат подграф E_6 и их подграфы с вершинами $m, m+1, ..., n$ являются цепями вида

$$\Gamma_m \subset \Gamma_{m+1} \subset ... \subset \Gamma_n \subset ..., \tag{1}$$



и удовлетворяют специальному условию: для некоторого n в ассоциированном с Γ_n векторном пространстве V_n нет ненулевых W_n-инвариантных векторов [4]. Начальным графом серий $\{E_n\}$ и $\{J_n\}$ являются графы E_9 и J_9 $(m = 9)$, а серии $\{I_n\}$ — граф I_7 $(m = 7)$.

Каждому графу Γ_n соответствует группа Кокстера $G_n = G(\Gamma_n)$ [1]:

$$G_n = \langle s_1, \dots, s_n \mid s_i^2 = (s_k s_j)^2 = (s_i s_j)^3 = 1,\ 1 \leq i, j, k \leq n,\ (k, j) \notin \Gamma_n,\ (i, j) \in \Gamma_n \rangle, \tag{2}$$

или коротко $G_n = \langle S_n \mid R_n \rangle$, где $S_n = \{s_1, ..., s_n\}$, R_n — соотношения группы G_n из (2).

В группах W_n при отображении $s_i \to w_i$ $(i = 1, ..., n)$ выполняются все соотношения R_n группы G_n. Есть гипотеза, что группа $W_n \in \{Sp_{2l}(2) \times Z_2,\ O^{\pm}_{2l}(2)\}$ — это единственная конечная фактор-группа группы G_n с простым неабелевым коммутантом. Для $n \leq 20$ с помощью системы *GAP* доказано [4, теорема 1], что либо $W_n \simeq O^{\pm}(2)$, либо $W_n \simeq Sp_{n-1}(2) \times Z_2$, либо $O_2(W_n)$ является элементарной абелевой 2-подгруппой порядка 2^{n-1}. Во всех случаях W_n изоморфна фактор-группе G_n/N_w, где N_w — нормальное замыкание в G_n элемента w^2. В случаях $\Gamma_n = E_n$ и $\Gamma_n = J_n$ элемент $w = ss_9$ есть произведение инволюции s_9 на корневую симметрию $s = w_r$ группы Вейля $W(E_8)$, где $r = 2p_1 + 4p_2 + 6p_3 + 3p_4 + 5p_5 + 4p_6 + 3p_7 + 2p_8$ — максимальный положительный корень, $\{p_1, ..., p_8\}$ — фундаментальная система корней $\{p_1, ..., p_8\}$ типа E_8. В случае $\Gamma_n = I_n$ элемент $w = ss_7$, где $s = w_r$ — корневая симметрия, $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$ — максимальный положительный корень системы корней типа E_6. И группа W_n имеет следующее копредставление

$$\langle s_1, ..., s_n \mid s_i^2 = (s_k s_j)^2 = (s_i s_j)^3 = w^2 = 1,\ 1 \leq i, j, k \leq n,\ (k, j) \notin \Gamma_n,\ (i, j) \in \Gamma_n \rangle, \tag{3}$$

или $W_n = \langle S_n \mid R_n, Q_n \rangle$, где $S_n = \{s_1, ..., s_n\}$, R_n — соотношения группы G_n из (2) и множество дополнительных соотношений $Q_n = \{x(s_1, ..., s_m) = 1 \mid x \in W_m\}$ (в копредставлении (3) группы W_n множество Q_n состоит из одного соотношения $(ss_m)^2 = (w_r s_m)^2 = 1$).

Теорема о копредставление коммутанта группы W_n

Теорема 1. *Если $W_n = \langle S_n \mid R_n, Q_n \rangle$ — копредставление группы $W_n \in \{Sp_{2l}(2) \times Z_2,\ O^{\pm}_{2l}(2)\}$, то копредставление ее коммутанта $Y_n = \langle q_1, \dots, g_{n-1} \rangle$*

задано соотношениями (4)-(5):

$$g_i^2 = 1,\ (g_i g_j)^2 = 1,\ (g_k g_j)^3 = 1,\ \textit{где}\ (i,j) \notin \Gamma_{n-2},\ (k,j) \in \Gamma_{n-2}; \tag{4}$$

$$g_{n-1}^3 = 1,\ (g_{n-2} g_{n-1})^3 = 1,\ (g_i g_{n-1})^2 = 1,\ 1 \le i \le n-3, \\ x(g_1, ..., g_m) = 1, \textit{где}\ x \in Q_n. \tag{5}$$

Доказательство. Коммутант H_n группы Кокстера G_n состоит из элементов четной длины [3]. По [4, лемма 1] коммутант Y_n группы W_n порожден элементами $w_i w_j$, где $(i,j) \in \Gamma_n$, состоит из всех элементов группы W_n четной длины, $[W_n : Y_n] = 2$, $W_n = Y_n \leftthreetimes \langle w_n \rangle$, и ограничение гомоморфизма $G_n \to W_n$ на H_n есть сюрьективный гомоморфизм $H_n \to Y_n$ (см. также теорема 3.42 [2]).

Для определения генетических кодов групп $Y_n \in \{Sp_{2l}(2), \Omega_{2l}^{\pm}(2)\}$, где $n \ge m+2$, используем копредставление (3) группы W_n и ниже определенные порождающие $g_1, ..., g_{n-1}$ группы Y_n (см. также [1, упражнение 9, стр. 46]). Итак, пусть $n \ge m+2$, обозначим $g_k = s_k s_n$, где $k = 1, ..., n-2$, и $g_{n-1} = s_n s_{n-1}$. Тогда в G_n элементы $g_1, ..., g_{n-2}$ являются инволюциями, а элемент g_{n-1} имеет порядок 3. Слово $x = x(s_1, ..., s_m)$ из копредставления (3) в G_n имеет четную длину, и как элемент группы G_n, совпадает со значением слова $x(g_1, ..., g_m)$ из подгруппы $\langle g_1, ..., g_m \rangle$ (поскольку s_n перестановочна с инволюциями $s_1, ..., s_m$).

Таким образом, соотношения, выполняющиеся для порождающих $g_1, ..., g_{n-2}, g_{n-1}$ группы $Y_n \le X_n$, разбиваются на три части. Это соотношения (4), не содержащие g_{n-1}, и соотношения (5), содержащие g_{n-1}, а также соотношения из Q_n.

Ввиду соотношения $(g_{n-2} g_{n-1})^3 = (s_{n-2} s_n \cdot s_n s_{n-1})^3 = (s_{n-2} s_{n-1})^3 = 1$ группа

$$U = \langle g_{n-2}, g_{n-1} \mid g_{n-2}^2 = 1,\ g_{n-1}^3 = 1,\ (g_{n-2} g_{n-1})^3 = 1 \rangle \tag{6}$$

изоморфна знакопеременной группе A_4 [3, таблица 5, стр. 201] и очевидно, что

$$U = \langle g_{n-2}, g_{n-1}^{-1} \mid g_{n-2}^2 = 1,\ (g_{n-1}^{-1})^3 = 1,\ (g_{n-2} g_{n-1}^{-1})^3 = 1 \rangle. \tag{7}$$

также генетический код группы U.

Докажем, что группа $K = \langle g_1, ..., g_{n-1} \rangle$, заданная соотношениями (4) и (5), изоморфна группе Y_n. Воспользуемся рекомендацией для решения упражнения 9 [1, стр. 46]. Поскольку для $1 \le i \le n-3$ соотношения $(g_i g_{n-1})^2 = 1$ из (5) равносильны соотношениям $(g_i g_{n-1}^{-1})^2 = 1$, то отображение

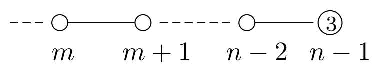
$$t:\ g_i \to g_i^{-1}\ (i = 1, ..., n-1) \tag{8}$$

продолжается до инволютивного автоморфизма $t:\ g \to g^t$ группы K_n. Рассмотрим в группе $K_n \leftthreetimes \langle t \rangle$ систему порождающих $s_1' = y_1 t, ..., s_{n-2}' =$

$y_{n-2}t, s'_{n-1} = y_{n-1}t, s'_n = t$. Согласно [1, упражнению 9, стр. 46] отображение $s'_i \to s_i$ продолжается до изоморфизма групп G_n и $\langle s'_1, ..., s'_n\rangle$, и мы можем эти группы отождествить. Как ранее было указано, при этом отождествлении элементы соотношений из Q_n, как слова от $s_1, ..., s_m$ и от $s'_1, ..., s'_m$ остаются на месте. Следовательно нормальное замыкание N в G_n множества этих слов из Q_n определено однозначно. В силу сюрьективного гомоморфизма $H_n \to Y_n$ заключаем, что $K_n = Y_n$, что и доказывает теорему. □

Заключение

Доказано, что если группа W_n задана соотношениями (3), то (4)-(5) — генетический код ее коммутанта. Для $n = 2l \leq 20$ с помощью компьютерных вычислений в системе GAP установлено, что соотношения (3) являются генетическим кодом групп $W_n \in \{O^{\pm}_{2l}(2), Sp_{2l}(2) \times Z_2\}$. Остается доказать, что группа W_n задана соотношениями (3) и для $n > 20$. Заметим также, что как и в случаях групп Кокстера, соотношения (4)-(5) легко восстанавить по графу Γ_{n-1}:



Вершинам $1, ..., n-2$ графа Γ_{n-1} соответствуют инволюции $g_1, ..., g_{n-2}$, а вершине $n-1$ — элемент g_{n-1} порядка 3. Если $(i, j) \notin \Gamma_{n-1}$, то в группе выполняется соотношение $(g_i g_j)^2 = 1$, а если $(i, j) \in \Gamma_{n-1}$, то соотношение $(g_i g_j)^3 = 1$.

References

[1] N. Bourbaki, *Elements of mathematics. Vol. XXXIV. Lie groups and algebras. Coxeter groups and Tits systems. Groups generated by reflections. Root systems. Transl. from French*, Mir, Moscow, 1972 (in Russian). Zbl 0249.22001

[2] D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification. Transl. from the English*, Mir, Moscow, 1985 (in Russian). Zbl 0672.20010

[3] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser, *Generators and relations for discrete groups. Transl. from the third English edition*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian). Zbl 0487.20023

[4] A.I. Sozutov, V.M. Sinitsin, *On Coxeter graphs of groups with symplectic 3-transpositions*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **22**:3 (2016), 251–258

[5] V.M. Sinitsin, *On genetic codes of certain groups with 3-transpositions*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**:4 (2019), 184–188.

[6] V.M. Sinitsin, A.I. Sozutov, *On the connection of some groups generated by 3-transpositions with Coxeter groups* Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**:4 (2020), 234–243.

[7] A.I. Sozutov, *On groups of type Σ_4, generated by 3-transpositions*, Sib. Math. J., **33**:1 (1992), 117–124. Zbl 0788.20020

[8] B. Fischer, *Finite groups generated by* 3-*transpositions*, University of Warwick (Preprint), 1969. Zbl 0232.20040

[9] J.I. Hall, *Graphs, geometry, 3-transposition, and symplectic F_2-transvection groups*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser., **58**:1 (1989), 89–111. Zbl 0673.20015

[10] J. McLaughlin, *Some subgroups of $SL_n(F_2)$*, Ill. J. Math., **13**:1 (1969), 108-–115. Zbl 0179.04901

Anatoly Iliych Sozutov,
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
Krasnoyarsk, 660041 Russia
Email address: sozutov_ai@mail.ru

Vladimir Mihailovich Sinitsin,
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
Krasnoyarsk, 660041 Russia
Email address: sinkoro@yandex.ru