S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. 1741–1749 (2025) УДК 519.6
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.106 MSC 65M32

УРАВНЕНИЕ М. Г. КРЕЙНА В ОДНОМЕРНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ АКУСТИКИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ

Н.С. Новиков

Представлено С.И. Кабанихиным

Abstract: The article considers the 1D coefficient inverse problem for the acoustic equation. New version of the I.M. Gelfand - B.M. Levitan - M.G. Krein approach, applicable for the general time form of the sounding wave, is proposed. The new set of linear integral equations, equivalent to the inverse problem, is obtained.

Keywords: coefficient inverse problems, ill-posed problems, direct methods, integral equations.

1 Введение

Данная работа посвящена решению коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений. Такие задачи, как правило, связаны с

Novikov, N.S., New analogue of M.G. Krein equation for 1D acoustic inverse problem with the arbitrary source function.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2024-0002 "Обратные некорректные задачи и машинное обучение в биологических, социально-экономических и экологических процессах".

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

определением параметров различных сред по данным, полученным в результате распространения в среде волнового (акустического, сейсмического или электродинамического) процесса и имеют большое практическое значение. Поэтому разработка новых методов решения таких задач представляет большой интерес.

Метод И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М. Г. Крейна, основанный на сведении коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения к семейству линейных интегральных уравнений, является одним из перспективных подходов. Его сильные стороны хорошо известны — это прямой метод определения параметров исследуемой среды без многократного решения прямой задачи и использования априорной информации о строении среды. Прямым методом решения коэффициентных обратных задач также является метод граничного управления.

Первой работой, посвящённой применению метода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна для решения задачи о струне, является работа М.Г. Крейна [1]. В работе А.С. Благовещенского [2] впервые был предложен динамический вариант метода Крейна и доказана эквивалентность полученного семейства интегральных уравнений и обратной задачи. Помимо использования предлагаемого подхода во временной области, существует также множество работ, посвящённых спектральному варианту метода, из которых наиболее близкой к исследуемой задаче является работа А.С. Алексеева и В.С. Белоносова [3]. В ней авторы рассмотрели несколько вариантов постановок обратных задач в частотной области и показали их эквивалентность.

Метод граничного управления был применён для решения задач акустики в работах [4, 5]. В работе [6] показано, что для одномерной обратной задачи акустики уравнения, полученные в методе граничного управления, после дискретизации совпадают с дискретным аналогом уравнения М.Г. Крейна. В работе [7] метод граничного управления применен для решения двумерной обратной задачи акустики. Многомерные алгоритмы решения обратных задач для гиперболических уравнений рассматривались также в работах [8, 9, 10], а в работах [11, 12, 13] были предложены численные алгоритмы решения многомерных аналогов уравнений И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна.

Целью данной работы является обобщение метода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана—М.Г. Крейна для постановок задач, более приближенных к приложениям. В частности, интерес представляет возможность применения подхода в случае источника произвольного вида. В данный момент наиболее хорошо изученной является постановка с источником типа дельта-функции. С одной стороны, это приводит к специальной структуре данных обратной задачи и позволяет свести обратную задачу к семейству интегральных уравнений второго рода. С другой стороны, на практике такой подход подразумевает получение импульсной характеристики среды, что приводит к необходимости решать задачу деконволюции. Отметим, что источник произвольной формы по времени был рассмотрен в работе [14], но на основе подхода И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана.

2 Основные результаты

В качестве модели волнового процесса в данной работе будет рассмотрена одномерная коэффициентная обратная задача для уравнения акустики:

$$u_{tt}(x,t) = L_\sigma u, \qquad x>0, \quad t>0; \tag{1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad x>0; \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = g(t), \quad t>0; \tag{3}$$

$$u|_{x=0} = f(t), \quad t>0, \tag{4}$$

где оператор L_σ имеет вид

$$L_\sigma u \equiv \sigma(x)\left(\frac{1}{\sigma(x)}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Здесь $u(x,t)$ описывает колебание точек среды, $\sigma(x)$ — акустическая жёсткость среды. Мы предполагаем, что среда находилась в состоянии покоя до момента $t=0$, в который на среду действует расположенный на дневной поверхности $x=0$ источник акустических волн, форма которого задаётся функцией $g(t)$. Этот источник приводит к распространению акустических волн в среде, которые отражаются от неоднородностей и возвращаются на дневную поверхность, где колебание точек среды $f(t)$ регистрируется приёмниками. Таким образом, обратная задача заключается в определении неизвестной функции $\sigma(x)$ по заданным $f(t)$, $g(t)$.

Замечание. В качестве основного уравнения задачи (1)—(4) можно рассматривать уравнение

$$\frac{1}{c^2(z)}u_{tt}(z,t) = \rho(z)\left(\frac{u_z}{\rho(z)}\right)_z,$$

где $c(z)$ — скорость распространения волн в среде, $\rho(z)$ — плотность среды. Это уравнение можно свести к (1) с помощью замены

$$x = \int\limits_0^z \frac{d\xi}{c(\xi)}, \quad \sigma(x) = c(x)\rho(x).$$

Тем самым можно рассматривать задачу восстановления $c(x)$ (в случае, если ρ - известна), задачу восстановления $\rho(x)$ (если известна $c(x)$), или же задачу восстановления акустической жёсткости $\sigma(x)$ (если ни одна из функций $c(x)$, $\rho(x)$ неизвестны).
Отметим, что в данной работе мы считаем, что функции $f(t)$, $g(t)$ являются гладкими , и можно считать, что $f(+0) = g(+0) = 0$. Кроме того, нетрудно показать, что функция $u(x,t)$ обладает свойством $u(x,t) = 0$

при $t < x$. Учитывая это, мы продолжим все рассматриваемые функции нечётным образом для значений $t < 0$:

$$u(x,t) = -u(x,-t), \qquad t \leq 0.$$
$$f(-t) = -f(t), \quad g(-t) = -g(t), \qquad t \leq 0.$$

Тогда задача (1)-(4) приобретает следующий вид:

$$u_{tt} = L_\sigma u, \qquad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$
$$u|_{x=0} = f(t), \qquad u_x|_{x=0} = g(t). \tag{6}$$

При этом в силу нечётного продолжения

$$u(x,t) = 0, |t| < x. \tag{7}$$

Далее, введём дополнительные функции $W_1(x,t)$, $W_2(x,t)$, являющиеся решениями задач

$$W_{1_{tt}} = L_\sigma W_1, \qquad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$
$$W_1\big|_{x=0} = \delta(t), \qquad W_{1_x}\big|_{x=0} = 0; \tag{9}$$

$$W_{2_{tt}} = L_\sigma W_2, \qquad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10}$$
$$W_2\big|_{x=0} = 0, \qquad W_{2_x}\big|_{x=0} = \delta(t). \tag{11}$$

соответственно. Тогда функции $u(x,t), W_1(x,t), W_2(x,t)$ связаны следующим соотношением:

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s) W_1(x,s) ds + \int\limits_{\mathbb{R}} g(t-s) W_2(x,s) ds. \tag{12}$$

Замечание 2. Если функция $g(t)$ задаёт источник типа дельта-функции (как, например, в [2]), то в условиях (6) функция $f(t)$ имеет скачок при $t = 0$, а второе условие становится однородным. В результате в правой части равенства (12) остаётся только один интеграл, а скачок в данных позволяет получить известное уравнение М.Г. Крейна второго рода (24). Далее, соотношение (12) и условие (7) может быть использовано для получения уравнения типа И.М. Гельфанда - Б.М. Левитана, как это было проделано, например, в [14]. В данной работе мы, адаптируя подход А.С. Благовещенского [2] , применим к (12) дополнительное преобразование. Введём функции

$$V_j(x,t) = \int_0^x \frac{W_j(\xi,t)}{\sigma(\xi)} d\xi, j = 1,2.$$

Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^x \frac{1}{\sigma(\xi)}(\cdot)d\xi$ к обеим частям равенства (12), получим:

$$H(x,t) \equiv \int_0^x \frac{u_t(\xi,t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{\partial}{\partial t}\int V_1(x,s) f(t-s) ds + \frac{\partial}{\partial t}\int V_2(x,s) g(t-s) ds \tag{13}$$

Теперь рассмотрим функцию $H(x,t)$ в области $x > |t|$. В силу условия (7)

$$H_x(x,t) = \frac{u_t(x,t)}{\sigma(x)} = 0, x > |t|.$$

Таким образом, в указанной области функция H зависит лишь от переменной t. Далее,

$$H_t(x,t) = \int_0^x \frac{u_{tt}(\xi,t)}{\sigma(\xi)} d\xi = \frac{u_x(x,t)}{\sigma(x)} - \frac{u_x(0,t)}{\sigma(0)} = -\frac{g(t)}{\sigma(0)}.$$

Отсюда можно заключить, что в области $|t| < x$

$$H(x,t) \equiv -\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sigma(0)} d\tau. \tag{14}$$

Таким образом, равенство (13) приобретает следующий вид:

$$-\int_0^t \frac{g(\tau)}{\sigma(0)} d\tau = \int_{-x}^x V_1(x,s) f'(t-s) ds + \int_{-x}^x V_2(x,s) g'(t-s) ds, t \in (-x,x) \tag{15}$$

Равенство (15) отличается от классического уравнения М.Г. Крейна в том числе и тем, что содержит две неизвестные функции. При этом нетрудно показать, что функции $V_1(x,t), V_2(x,t)$ являются решениями задач

$$V_{1_{tt}} = \hat{L}_\sigma V_1, \qquad x > 0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{16}$$

$$V_1|_{x=0} = 0, \quad V_{1_x}|_{x=0} = \frac{\delta(t)}{\sigma(0)}; \tag{17}$$

$$V_{2_{tt}} = \hat{L}_\sigma V_2 - \frac{\delta(t)}{\sigma(0)}, \quad x > 0, t \in \mathbb{R} \tag{18}$$

$$V_2|_{x=0} = 0, V_{2_x}|_{x=0} = 0. \tag{19}$$

соответственно. Здесь

$$\hat{L}_\sigma V \equiv \frac{1}{\sigma(x)} \left(\sigma V_x\right)_x.$$

Получим соотношения, связывающие функции V_1, V_2. Пусть $\Phi(x,t)$ является решением задачи

$$\Phi_{tt} = \hat{L}_\sigma \Phi, \quad x > 0, t \in \mathbb{R},$$
$$\Phi|_{x=0} = \theta(t), \Phi_x|_{x=0} = -\delta(t);$$

Тогда можно показать, что имеют место следующие представления функций V_1, V_2:

$$V_1(x,t) = \frac{1}{2\sigma(0)} \left(1 - \Phi(x,-t) - \Phi(x,t)\right); \tag{20}$$

$$V_2(x,t) = \frac{1}{2\sigma(0)} \int_0^t \left(1 + \Phi(x,\tau) - \Phi(x,-\tau)\right) d\tau - \frac{\theta_1(t)}{\sigma(0)}. \tag{21}$$

Здесь

$$\theta_1(t) = \begin{cases} t, t > 0; \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

Теперь перепишем первое слагаемое в правой части (15), используя (20):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-x}^{x} V_1(x,s)f(t-s)ds = \\ = \frac{1}{2\sigma(0)}\left[\int_{-x}^{x} f'(t-s)ds - \int_{-x}^{x}\big(f'(t+s)+f'(t-s)\big)\,\Phi(x,s)ds\right].$$

Аналогичным образом можно воспользоваться (21), чтобы переписать второе слагаемое в правой части (15):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int V_2(x,s)g(t-s)ds = \\ = \frac{1}{2\sigma(0)}\left[-2\int g(t-s)\theta(s)ds + \int_{-x}^{x} g(t-s)ds + \right. \\ \left. + \int_{-x}^{x}\left(g(t-s)-g(t+s)\right)\Phi(x,s)ds\right].$$

Подставляя полученные выражения в (15), получим:

$$-2\int_0^t g(\tau)d\tau - \int_{-x}^{x}\left[g+f'\right](t-s)ds = \\ = \int_{-x}^{x}\Big(\left[g-f'\right](t-s) - \left[g+f'\right](t+s)\Big)\Phi(x,s)ds, \quad t\in(-x,x). \tag{22}$$

Уравнение (22) является семейством линейных интегральных уравнений первого рода относительно неизвестной функции $\Phi(x,s)$ с параметром $x > 0$ и является обобщением уравнения М.Г. Крейна. Решив (22), можно определить акустическую жёсткость $\sigma(x)$, используя структуру функции Φ. Так, нетрудно показать, что

$$\Phi(x, x-0) = 1 - \frac{\sigma(0)}{\sigma(x)}.$$

Следовательно,

$$\sigma(x) = \frac{\sigma(0)}{\left(1-\Phi(x,x-0)\right)^2}. \tag{23}$$

Замечание 3. Функции $f(t), g(t)$, определяющие уравнение (22), связаны соотношением:

$$f(t) = \int_0^t g(t-\tau)R(\tau)d\tau.$$

Здесь $R(\tau)$ - импульсная характеристика среды. Её связь с решением обратной задачи акустики была впервые изучена М.Г. Крейном в работе

[1]. В частности, решив задачу деконволюции и использовав импульсную характеристику среды, можно свести обратную задачу акустики к семейству уравнений второго рода:

$$-2R(+0)V(x,t) + \int_{-x}^{x} R'(t-s)V(x,s)ds = 1, \quad x > 0, t \in (-x,x). \quad (24)$$

Замечание 4. Численное решение уравнения (22) целесообразно производить на основе дискретизации и последующем решении системы линейных алгебраических уравнений. При этом отметим, что матрица системы будет плохо обусловленной. Также матрица системы в силу структуры нового аналога уравнения М.Г. Крейна будет представляться в виде суммы тёплицевой и ганкелевой матриц. Это позволит привлекать специальные методы для решения этой системы (как, например, в [11]).
Замечание 5. Предложенный подход может быть адаптирован для решения многомерных задач, с использованием техники, предложенной в работах [7, 8, 9].
Замечание 6. Предложенный подход может быть использован для решения задачи определения коэффициента $q(x)$ уравнения $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$, которое возникает при решении спектральных обратных задач. В этом случае аналог уравнения И.М. Гельфанда—Б.М. Левитана принимает следующий вид:

$$\int_{-x}^{x} g(t-s)ds = \int_{-x}^{x} \left(\left[g - f'\right](t-s) + \left[g + f'\right](t+s) \right) \Phi(x,s)ds, t \in (-x,x)$$

3 Заключение

В работе была рассмотрена одномерная коэффициентная обратная задача и предложен алгоритм её сведения к семейству интегральных уравнений. В дальнейшем планируется разработка и анализ численных методов на основе предложенного подхода, и сравнение с последовательным решением задачи деконволюции и определения акустической жёсткости по импульсной характеристике среды.

References

[1] M.G. Krein, *On a method of effective solution of an inverse boundary problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **94** (1954), 987–990 (in Russian). Zbl 0058.39903

[2] A.S. Blagoveshchenskii, *The local method of solution of the nonstationary inverse problem for an inhomogeneous string*, Trudy Mat. Inst. Steklov., **115** (1971), 28—38. Zbl 0231.35044

[3] A.S. Alekseev, V.S. Belonosov, *The scattering of plane waves in inhomogeneous half-space*, Appl. Math.Lett., **8**:2 (1995), 13–19. Zbl 0830.35146

[4] M.I. Belishev, T.L. Sheronova, *The methods of the boundary control theory in inverse problem for unhomogeneous string*, Part 20, Zap. Nauchn. Semin. Leningr. Otd. Mat. Inst. Steklova, **186** (1990), 37–49. Zbl 0737.73062

[5] M.I. Belishev, A.S. Blagoveshchensky, N.A. Karazeeva, *Simplest test for three-dimensional dynamical inverse problem (the BC-method)*, Part 49, Zap. Nauchn. Sem. POMI, **483** (2019), 19–40.

[6] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Comparative analysis of boundary control and Gel'fand-Levitan methods of solving inverse acoustic problem*, Inverse Problems in Engineering Mechanics IV, Elsevier (2003), 503–512.

[7] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Boundary control and Gel'fand-Levitan-Krein methods in inverse acoustic problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **12**:2 (2004), 125–144. Zbl 1051.35107

[8] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**:9 (2011), 979–995.

[9] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, *Two-dimensional analogs of the equations of Gelfand, Levitan, Krein, and Marchenko*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **3**:2 (2015), 70–99.

[10] A.V. Baev, *Solution of an inverse scattering problem for the acoustic wave equation in three-dimensional media*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **56**:12 (2016), 2073–2085.

[11] S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, I.V. Oseledets, M.A. Shishlenin, *Fast Toeplitz linear system inversion for solving two-dimensional acoustic inverse problem*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **23**:6 (2015), 687–700. Zbl 1327.65184

[12] S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, *Numerical solution of an inverse problem of coefficient recovering for a wave equation by a stochastic projection methods*, Monte Carlo Methods Appl., **21**:3 (2015), 189–203. Zbl 1323.65103

[13] S.I. Kabanikhin, K.K. Sabelfeld, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, *Numerical solution of the multidimensional Gelfand-Levitan equation*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **23**:5 (2015), 439–450. Zbl 1326.65124

[14] D.V. Anikiev, B.M. Kashtan, A.S. Blagoveshchenskij, V.A. Mulder, *Tochniy dinamicheskiy metod resheniya obratnoy zadachi seismiki na osnove integralnih uravneniy Gelfanda-Levitana*, Uchenye zapiski SPBGU, voprosy geofiziki, **444** (2011), 49–81 (in Russian).

[15] A.S. Alekseev, V.I. Dobrinskiy, *Some questions regarding practical usage of inverse dynamic seismic problems*, Mat. Probl. Geofiz., **6**:2 (1975), 7–53. Zbl 0356.35074

[16] M.I. Belishev, *An approach to multidimensional inverse problems for the wave equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **297**:3 (1987), 524–527.

[17] M.I. Belishev, A.S. Blagoveshchensky, *Multidimensional analogs of the Gelfand–Levitan–Krein-type equations in an inverse problem for the wave equation*, conditionally well-posed problems of mathematical physics and analysis. Novosibirsk: Institut Matematiki SO RAN (1992), 50–63. Zbl 0928.35193

[18] M.I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method*, Inverse Probl., **23**:5 (2007), R1–R67. Zbl 1126.35089

[19] B. Gopinath, M.M. Sondhi, *Determination of the shape of the human vocal tract from acoustical measurements*, Bell System Tech. J., **49**:6 (1970), 1195–1214.

[20] S.I. Kabanikhin, *On linear regularization of multidimensional inverse problems for hyperbolic equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **309**:4 (1989), 791–795. Zbl 0728.35142

[21] S.I. Kabanikhin, G.B. Bakanov, *A discrete analogue of the Gel'fand-Levitan method*, Dokl. Math., **56**:2 (1997), 670–673. Zbl 0973.35198

[22] S.I. Kabanikhin, G.B. Bakanov, *A discrete analog of the Gelfand-Levitan method in a two-dimensional inverse problem for a hyperbolic equation*, Sib. Math. J., **40**:2 (1999), 262–280. Zbl 0938.35192

[23] S.I. Kabanikhin, N.S. Novikov, M.A. Shishlenin, *Gelfand-Levitan-Krein method in one-dimensional elasticity inverse problem*, Journal of Physics: Conference Series, 2092:1 (2021) Paper no. 012022.

[24] F. Natterer, *A discrete Gelfand-Levitan theory*, Technical report, Institut fuer Numerische und instrumentelle Mathematik, Universitaet Muenster Germany, 1994.

[25] V.G. Romanov, *On justification of the Gelfand-Levitan-Krein method for a two-dimensional inverse problem*, Sib. Math. J., **62**:5 (2021), 908–924. Zbl 1501.65056

[26] M.A. Shishlenin, M. Izzatulah, N.S. Novikov, *Comparative Study of Acoustic Parameter Reconstruction by using Optimal Control Method and Inverse Scattering Approach*, Journal of Physics: Conference Series, 2092:1 (2021), Paper no. 012004.

[27] W.W. Symes, *Inverse boundary value problems and a theorem ofGel'fand and Levitan*, J. Math. Anal. Appl., **71**:2 (1979), 379–402. Zbl 0425.35092

[28] S. Kabanikhin, M. Shishlenin, N. Novikov, N. Prokhoshin, *Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand–Levitan–Marchenko–Krein Equations* , Mathematics, **11**:21 (2023), Paper No. 4458.

[29] N. Novikov, M. Shishlenin, Direct Method for Identification of Two Coefficients of Acoustic Equation, Mathematics, **11**:13 (2023)., Paper No. 3029.

[30] M.I. Belishev, N.A. Karazeeva, *Toeplitz matrices in the BC-method for the plane domains*, J. Math. Sci.,(N.Y.), **283**:4 (2024), 505–515. Zbl 1546.35256

[31] A. Mikhaylov, V. Mikhaylov, *Discrete dynamical systems: Inverse problems and related topics*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **33**:2 (2025), 217–252. Zbl 1565.39001

[32] V.V. Voevodin, E.E.Tyrtyshnikov, *Vychislitel'nye protessy s teplitsevymi matritsami*, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). Zbl 0636.65018

[33] E.E.Tyrtyshnikov, *Teplitsevy matritsy, nekotorye ikh analogi i prilozheniya* Moskva: Otdel Vychislitel'noj Matematiki AN SSSR, 1989 (in Russian). Zbl 0744.65028

Nikita Sergeyevich Novikov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: novikov-1989@yandex.ru