S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. 1717–1730 (2025) УДК 519.175
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.104 MSC 05C20

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ОРИЕНТАЦИИ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

С.В. Августинович, И.С. Быков, А.Л. Пережогин, А.С. Кривоногова

Представлено А.В. Пяткиным

Abstract: In this paper, we consider the achievability of the maximum and minimum numbers of occurrences of 3-circuits in Eulerian orientations of complete graphs missing a transitive subset of edges: complete graphs with an even number of vertices and a perfect matching removed, and those with an odd number of vertices and a Hamiltonian cycle removed. For each of these families of digraphs, we obtain upper and lower estimates for the number of 3-circuits and prove their achievability. Previously, orientations that are extreme with respect to the number of 4-circuit occurrences have been investigated in [1].

Keywords: Eulerian orientation of graph, circuit, tournament.

1 Введение

В самом общем виде рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Для произвольного семейства графов (в нашем случае –

Avgustinovich, S.V., Bykov, I.S., Perezhogin, A.L., Krivonogova A.S. Extreme Eulerian orientations of circulant graphs.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0017).

Поступила 25 августа 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

ориентированных эйлеровых) определить, на каких представителях семейства достигает максимума или минимума число вхождений некоторого фиксированного фрагмента (например, 3-контура). Довольно часто удается не только найти значение этого экстремума, но и охарактеризовать те графы, на которых он достигается [1]. Экстремальные графы при этом обычно обладают характерными свойствами совершенных структур [2, 3] и получаются друг из друга свитчингами. Минимальными нетривиальными фрагментами являются трехвершинные. В неориентированном случае они изучались в [4, 5].

Ориентацией графа G назовем орграф, получаемый из G заменой каждого ребра vu на ровно одну из дуг vu или uv. Две ориентации одного графа назовем эквивалентными, если изоморфны соответствующие орграфы. Ориентация полного графа называется турниром. Ориентация графа G называется эйлеровой, если в каждой вершине полустепень исхода равна полустепени захода. Для связного графа G существует эйлерова ориентация тогда и только тогда, когда G является эйлеровым. Через $O(G)$ обозначим множество всех эйлеровых ориентаций графа G. Например, $O(K_{2n+1})$ — это множество эйлеровых турниров на $(2n+1)$-ой вершине.

Любые три вершины произвольного турнира либо образуют ориентированный 3-цикл (контур), либо антиконтур. Хорошо известно, что число 3-контуров в произвольном турнире однозначно определено набором полустепеней исхода и захода вершин этого графа [1]. Это, в частности, означает, что в эйлеровых турнирах число 3-контуров не зависит от выбора турнира. Для произвольной дуги e орграфа H обозначим через $f_a(H, e)$ количество 3-контуров, проходящих через нее. Данный инвариант зачастую позволяет разбить все дуги турнира на орбиты (классы эквивалентности) относительно его группы автоморфизмов. В работе охарактеризованы классы эйлеровых ориентаций некоторых графов, на которых функция $f_a(H, e)$ достигает экстремальных распределений по дугам H.

Ранее исследовались ориентации, экстремальные по числу вхождений 4-контуров [1]. Также представляет интерес экстремальное поведение неориентированных графов с фиксированным числом ребер и максимальным числом вхождений индуцированных $K_{1,2}$ [5].

В работе изучаются минимальные и максимальные распределения 3-контуров, проходящих через различные множества дуг произвольного эйлерова турнира. Доказано, что среди эйлеровых ориентаций полного графа с удаленным гамильтоновым циклом максимальное число 3-контуров достигается с точностью до эквивалентности на циркулянтной ориентации, в которой гамильтонов цикл расположен на периферии графа, а все дуги ориентированы по часовой стрелке. Для полного графа с четным числом вершин и удаленным паросочетанием получен аналогичный результат. Паросочетание в этом случае состоит из ребер, соединяющих диаметрально противоположные вершины, а максимум и минимум числа 3-контуров достигается сразу на целых семействах ориентаций.

2 Ориентации циркулянтов

Согласно [1] через $f_a(H)$ обозначим количество 3-контуров в орграфе H.

Обозначим через $K_{2n} \setminus M$ полный граф с удаленным совершенным паросочетанием, а через $K_{2n+1} \setminus C$ полный граф с удаленным гамильтоновым циклом.

Выходящей окрестностью $N^+(v)$ вершины v в ориентации H графа G будем называть множество вершин, в которые ведут дуги, начинающиеся в v. Аналогично определяется входящая окрестность $N^-(v)$. Для любой дуги $e = uv$ орграфа H имеем

$$f_a(H, e) = |N^+(v) \cap N^-(u)|. \tag{1}$$

Предложение 1. *Для любой дуги e эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ верны неравенства*

$$1 \leq f_a(T, e) \leq n. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $e = uv$. Верхняя оценка следует из равенства

$$|N^+(v)| = |N^-(u)| = n.$$

Для доказательства нижней оценки остается заметить, что

$$|N^+(v) \cup N^-(u)| \leq |V(T) \setminus \{v, u\}| = 2n - 1. \tag{3}$$

□

Предложение 2. *Если для дуги $e = uv$ эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ имеем $f_a(T, e) = 1$, то справедливы равенства*

$$|N^+(v) \cap N^+(u)| = |N^-(v) \cap N^-(u)| = n - 1.$$

Доказательство. Поскольку $|N^+(v) \cap N^-(u)| = 1$, то $|N^+(v) \cup N^-(u)| = 2n - 1$. □

Согласно [1] количество 3-контуров в произвольной эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ равно

$$f_a(T) = \frac{2n+1}{3}\binom{n+1}{2}. \tag{4}$$

Из (4) непосредственно следует следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любой эйлеровой ориентации $T \in O(K_{2n+1})$ верно*

$$\sum_{e \in T} f_a(T, e) = (2n+1)\binom{n+1}{2}. \tag{5}$$

Через $C_N(d_1, \dots, d_p)$, $0 < d_1 < \dots < d_p < N/2$, обозначим неориентированный циркулянтный граф на N вершинах $\{0, \dots, N-1\}$, в котором две вершины i и j соединены ребром тогда и только тогда, когда

$$\min(|i-j|, N-|i-j|) \in \{d_1, \dots, d_p\}.$$

Иными словами, если вершины расположить по циклу, то ребром соединяем вершины, между которыми расстояние по циклу (расстояние) равно d_k для некоторого k.

Через $C_N(d_1, \dots, d_p; t_1, \dots, t_p)$, $t_i \in \{-1, +1\}$, обозначим эйлерову ориентацию графа $C_N(d_1, \dots, d_p)$, в которой дуга между вершинами на расстоянии d_k ориентирована по часовой стрелке, если $t_k = +1$, и против часовой стрелки, если $t_k = -1$. Заметим, что

$$C_{2n+1}(1, \dots, n; t_1, \dots, t_n) \in O(K_{2n+1}),$$

$$C_{2n}(1, \dots, n-1; t_1, \dots, t_{n-1}) \in O(K_{2n} \setminus M).$$

Предложение 4. *Для $T = C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$ значения $f_a(T, e)$ на каждой дуге e, соединяющей вершины на расстоянии p, принимает значение p.*

Это легко следует из простого факта, что число целочисленных решений уравнения $x+y+z = 2n+1$ при фиксированных x и n с ограничением $0 < y, z \leq n$ равно x.

3 Турниры с выделенным гамильтоновым циклом

В данном разделе дается характеризация турниров, у которых ребрам некоторого гамильтонова контура соответствует экстремальное значение параметра $f_a(T, e)$.

Теорема 1. *Пусть в турнире $T \in O(K_{2n+1})$ для каждой дуги e некоторого гамильтонова контура значение $f_a(T, e)$ равно 1. Тогда выполняется $T \simeq C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$.*

Доказательство. Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ такой, что

$$f_a(T, v_i v_{i+1}) = 1, \quad 0 \leq i \leq 2n.$$

Здесь и далее индексы берутся по модулю $2n+1$. Покажем, что такой гамильтонов контур задает нумерацию вершин, при которой $T = C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$. В силу транзитивности C достаточно доказать

$$\begin{aligned} N^+(v_0) &= \{v_j \mid 1 \leq j \leq n\} \\ N^-(v_0) &= \{v_j \mid n+1 \leq j \leq 2n\}. \end{aligned} \tag{6}$$

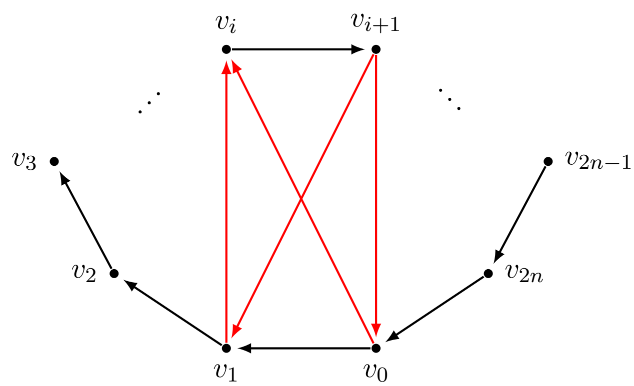

Рис. 1. Если $i \in S_+$ и $(i+1) \in S_-$, то $f_a(T, v_i v_{i+1}) > 1$.

Для дуги $v_0 v_1$ множество индексов $\{2, \ldots, 2n\}$ разобьем на множества

$$\begin{aligned} S_1 &= \{j \mid v_j \in N^+(v_0) \cap N^-(v_1)\}, \\ S_0 &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_+ &= \{j \mid v_j \in N^+(v_0) \cap N^+(v_1)\}, \\ S_- &= \{j \mid v_j \in N^-(v_0) \cap N^-(v_1)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $f_a(T, v_i v_{i+1}) = 1$, то из Предложения 2 имеем

$$|S_1| = 0, \ |S_0| = 1, \ |S_+| = |S_-| = n - 1. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\text{если } i \in S_+, \text{ то } (i+1) \notin S_-. \tag{8}$$

Иначе $f_a(T, v_i v_{i+1}) > 1$ (Рис. 1).

Поскольку $v_2 \in N^+(v_1)$, то $2 \in S_0 \cup S_+$. Если $2 \in S_0$, то дуга $v_1 v_2$ принадлежит 3-контуру v_0, v_1, v_2. Следовательно, $v_3 \in N^+(v_1)$ и $3 \in S_+$, что противоречит (7) и (8). Таким образом, $2 \in S_+$. Из (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned} S_0 &= \{n+1\}, \\ S_+ &= \{2,\, 3,\, \ldots,\, n\}, \\ S_- &= \{n+2,\, n+3,\, \ldots,\, 2n\}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует (6). □

Теорема 2. *Пусть в турнире $T \in O(K_{2n+1})$ для каждой дуги e некоторого гамильтонова контура значение $f_a(T, e)$ равно n. Тогда выполняется $T \simeq C_{2n+1}(1, \ldots, n; +1, \ldots, +1)$.*

Доказательство. Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$ такой, что

$$f_a(T, v_i v_{i+1}) = n, \quad 0 \le i \le 2n.$$

Из (1)

$$|N^-(v_i) \cap N^+(v_{i+1})| = n.$$

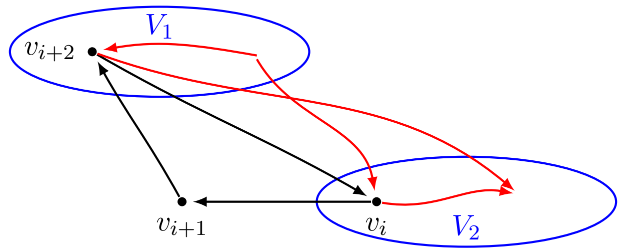

Рис. 2. Через дугу $v_{i+2}v_i$ проходит ровно один контур.

Тогда множество $N^-(v_i)$ равно множеству $N^+(v_{i+1})$. Обозначим его через V_1. Очевидно, что $v_{i+2} \in V_1$. Аналогично, поскольку $|N^-(v_{i+1}) \cap N^+(v_{i+2})| = n$, то $N^-(v_{i+1}) = N^+(v_{i+2}) = V_2$, и $v_i \in V_2$. Получили разбиение $V(T) = V_1 \cup V_2 \cup \{v_{i+1}\}$ (Рис. 2).

В силу эйлеровости турнира

$$N^-(v_{i+2}) = V(T) \setminus (V_2 \cup \{v_{i+2}\}) = (V_1 \cup \{v_{i+1}\}) \setminus \{v_{i+2}\}.$$

Аналогично

$$N^+(v_i) = V(T) \setminus (V_1 \cup \{v_i\}) = (V_2 \cup \{v_{i+1}\}) \setminus \{v_i\}.$$

Следовательно, через дугу $v_{i+2}v_i$ проходит ровно один контур (Рис. 2).

Таким образом, для каждой дуги e гамильтонова контура

$$v_0, v_{-2}, v_{-4}, \ldots, v_2$$

значение $f_a(T, e)$ равно 1. По Теореме 1 выполняется

$$T \simeq G_{2n+1}(1, \ldots, n; +1, \ldots, +1).$$

□

4 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным гамильтоновым циклом

Рассмотрим гамильтонов контур $C = v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$ в эйлеровом турнире $T \in O(K_{2n+1})$. Для каждой вершины v_i рассмотрим систему треугольников $U_i = (q_1^i, \ldots, q_{2n-1}^i)$, где $q_s^i = v_i, v_{i+s}, v_{i+s+1}$. Таким образом, множестве $U_0 \cup \cdots \cup U_{2n+1}$ является множеством всех треугольников в T, имеющих общее с C ребро.

По построению справедливы следующие два предложения (Рис. 3).

Предложение 5.

$$U_i \cap U_j = \begin{cases} \varnothing, & \textit{если } \min(|i-j|, 2n+1-|i-j|) \neq 2; \\ v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, & \textit{если } j = i+2. \end{cases}$$

Предложение 6. *Если в U_i треугольник q_s^i является контуром, $s \leq 2n-2$, то q_{s+1}^i не является контуром.*

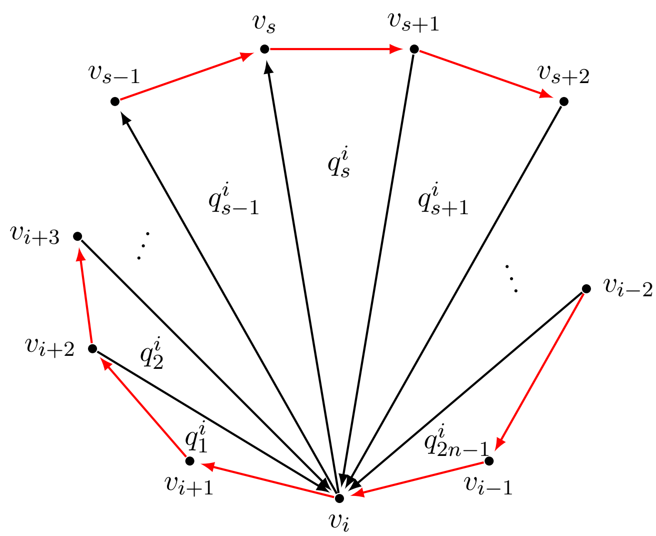

Рис. 3. Система треугольников U_i. Треугольники q_1^i и q_s^i являются контурами

Обозначим через $f_a(T,C)$ количество 3-контуров в множестве $U_0 \cup \dots \cup U_{2n+1}$. Таким образом, это количество 3-контуров в турнире T, имеющих хотя бы одну общую дугу с гамильтоновым контуром C.

Предложение 7.

$$2n+1 \leq f_a(T,C) \leq (n-1)(2n+1).$$

Доказательство. Заметим, что треугольник q_s^i является контуром тогда и только тогда, когда $v_{i+s} \in N^+(v_i)$ и $v_{i+s+1} \in N^-(v_i)$. Поскольку $v_{i+1} \in N^+(v_i)$ и $v_{i-1} \in N^-(v_i)$, то по крайней мере один контур в U_i есть (Рис. 3). Причем если q_1^i — контур, то будет по крайней мере еще один переход от исходящей из v_i дуги к входящей, а, следовательно, еще один контур. Аналогично, если q_{2n-1}^i является контуром, то контуров не менее двух. Следовательно, по Предложению 5 имеем $f_a(T,C) \geq 2n+1$.

По Предложению 6 если в U_i больше $(n-1)$ контуров, то их n штук, и среди них есть q_1^i и q_{2n-1}^i, которые по Предложению 5 также входят в U_{i+2} и U_{i-2} соответственно. Следовательно, $f_a(T,C) \leq (n-1)(2n+1)$. $\square$

Теорема 3. *Для любой ориентации $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ число 3-контуров в ней удовлетворяет неравенствам*

$$(2n+1)\left(\frac{(n+1)n}{6} - (n-1)\right) \leq f_a(D) \leq (2n+1)\left(\frac{(n+1)n}{6} - 1\right).$$

Доказательство. Любая ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ получается из некоторого эйлерова турнира $T \in O(K_{2n+1})$ удалением гамильтонова контура $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$. В силу (4) имеем

$$f_a(D) = f_a(T) - f_a(T, C) = \frac{2n+1}{3}\binom{n+1}{2} - f_a(T, C). \tag{9}$$

Следовательно, искомые неравенства следуют из Предложения 7. □

Теорема 4. *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$, для которой справедливо равенство*

$$f_a(D) = (2n+1)\left(\frac{(n+1)n}{6} - (n-1)\right). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть для $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ верно (10). Тогда его можно дополнить гамильтоновым контуром $C = v_0, v_1, \dots, v_{2n}$ до турнира T. По Предложению 7 для C верно

$$f_a(T, C) = (n-1)(2n+1). \tag{11}$$

Как было показано в доказательстве Предложения 7, каждая система треугольников U_i в сумму (11) числа всех 3-контуров, имеющих общую дугу с C, вносит вклад не больше $(n-1)$. А следовательно, для достижения равенства должна вносить ровно $(n-1)$. Это возможно в двух случаях: когда в U_i контурами являются n треугольников q_1^i, q_3^i, $q_5^i, \dots,$ q_{2n-1}^i, либо когда в U_i контурами являются $(n-1)$ треугольник q_2^i, q_4^i, $q_6^i, \dots,$ q_{2n}^i.

Из Предложения 5 следует, что если для некоторой вершины v_i система треугольников U_i содержит n контуров, то и система U_{i+2} тоже содержит n контуров. Поскольку вершин в графе нечетное число, то тогда для любой вершины v_i система треугольников U_i содержит n контуров. Таким образом, для нумерации вершин, заданной гамильтоновым контуром C, имеем

$$D = C_{2n+1}(2, \dots, n; -1, +1, -1, +1, \dots). \tag{12}$$

Причем по Предложению 4 и Теореме 2 эта ориентация эквивалентна ориентации $C_{2n+1}(1, \dots, n-1; +1, \dots, +1)$, которая получается из турнира $C_{2n+1}(1, \dots, n; +1, \dots, +1)$ удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии n.

Остается случай, когда для любой вершины v_i система U_i содержит $(n-1)$ контур. Это полностью определяет ориентацию D, которая равна $C_{2n+1}(2, \dots, n; +1, -1, +1, -1, \dots)$ и получается из (12) разворотом всех дуг. □

Теорема 5. *Существует и единственная с точностью до разворота всех дуг ориентация $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$, что*

$$f_a(D) = (2n+1)\left(\frac{(n+1)n}{6} - 1\right). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть для $D \in O(K_{2n+1} \setminus C)$ верно (13). Тогда D можно дополнить гамильтоновым контуром $C = v_0, v_1, \ldots, v_{2n}$ до турнира T. По Предложению 7 для C верно

$$f_a(T, C) = (2n + 1).$$

Из Предложений 6 и 5 для любой вершины v_i система треугольников U_i содержит один или два контура, причем, если один, то это q_n^i, а если два, то q_1^i и q_{2n-1}^i. Следовательно, если для всех i система U_i содержит один контур, то любая дуга e гамильтонова контура C удовлетворяет равенству $f_a(T, e) = 1$, и по Теореме 1 и Предложению 4

$$D = C_{2n+1}(2, \ldots, n; +1, \ldots, +1). \tag{14}$$

и получается из турнира $C_{2n+1}(1, \ldots, n; +1, \ldots, +1)$ удалением дуг, соединяющих вершины на расстоянии 1.

Если же найдется такое i, что система U_i содержит два контура, то U_{i+2} тоже содержит два контура, а следовательно, в силу нечетности числа вершин, все U_j содержат два контура. Это полностью определяет ориентацию D, которая равна $C_{2n+1}(2, \ldots, n; -1, \ldots, -1)$ и получается из (14) разворотом всех дуг. □

5 Эйлеровы ориентации полного графа с удаленным паросочетанием

Вершину v в $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ назовём противоположной для u, если v и u не смежны в H. Таким образом все вершины в H разбиваются на пары противоположных вершин. Будем считать, что все вершины пронумерованы от 0 до $2n - 1$, v_i и v_{i+n} — противоположные вершины для всех $i \in \{0, \ldots, n - 1\}$.

Теорема 6. *Для ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ следующие оценки справедливы и достижимы:*

$$2\binom{n}{3} \le f_a(H) \le 2\binom{n+1}{3}, \text{ если } n \text{ — нечетно;}$$
$$2\binom{n}{3} \le f_a(H) \le \frac{(n-2)n(n+2)}{3}, \text{ если } n \text{ — четно.}$$

Для доказательства Теоремы 6 потребуется ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через r_i количество дуг, ведущих из $N^+(v_i)$ в $N^-(v_i)$. Тогда очевидно, что

$$f_a(H) = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{2n-1} r_i. \tag{15}$$

Количество дуг внутри множества $N^+(v_i)$ обозначим через s_i, а количество дуг из $N^+(v_i)$ в v_{i+n} — через w_i. Нетрудно видеть, что

$$r_i + s_i + w_i = (n - 1)^2. \tag{16}$$

Лемма 1. *Для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ выполнено*
$$f_a(H) \geq 2\binom{n}{3}.$$

Доказательство. Заметим, что $s_i \leq \binom{n-1}{2}$ и $w_i \leq n-1$. Тогда из (16) следует
$$r_i \geq (n-1)^2 - (n-1) - \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$
Отсюда, используя (15) получаем
$$f_a(H) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i \geq \frac{1}{3}\cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 2\binom{n}{3}.$$
□

Лемма 2. *Для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ выполнено*
$$f_a(H) \leq 2\binom{n+1}{3}.$$

Доказательство. Заметим, что $s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}$ и $w_i \geq 0$. Тогда из (16) следует
$$r_i \leq (n-1)^2 - \left(\binom{n-1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{(n-1)(n+1)}{2}.$$
Отсюда, используя (15) получаем
$$f_a(H) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i \geq \frac{1}{3}\cdot 2n \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{2} = 2\binom{n+1}{3}.$$
□

Заметим, что при четном n каждое из множеств $N^+(v_i)$ и $N^-(v_i)$ содержит нечетное число вершин. Отсюда следует

Предложение 8. *Для любого чётного n для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ для фиксированного i существует хотя бы одна пара противоположных вершин v_j и v_{j+n} таких, что одна из них принадлежит $N^+(v_i)$, а вторая $N^-(v_i)$.*

Лемма 3. *Для любого чётного n для любой ориентации $H \in O(K_{2n} \setminus M)$ выполнено*
$$f_a(H) \leq \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

Доказательство. Поскольку при четном n число $\frac{n-1}{2}$ не целое, то нижнюю оценку для s_i из доказательства Леммы 2 можно усилить следующим образом:
$$s_i \geq \binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2}.$$

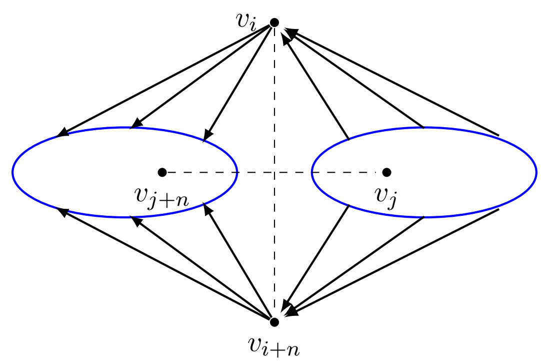

Рис. 4. $w_i = 0$, $\varphi(i) = j$

Таким образом, используя (16), получаем верхнюю оценку:

$$\begin{aligned} f_a(H) &\le \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1} r_i = \frac{1}{3}\left((n-1)^2 - s_i - w_i\right) \le \\ &\le \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2n-1}\left((n-1)^2 - \left(\binom{n-1}{2} - \frac{n-2}{2}\right) - w_i\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2n\cdot\frac{n^2-2}{2} - \sum_{i=0}^{2n-1} w_i\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Докажем, что $\sum\limits_{i=0}^{2n-1} w_i \ge 2n$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} n-1 = |N^+(v_i)| &= |(N^+(v_i)\cap N^+(v_{i+n}))| + w_i = \\ = |N^+(v_{i+n})| &= |(N^+(v_i)\cap N^+(v_{i+n}))| + w_{i+n}. \end{aligned}$$

Поэтому для пары противоположных вершин v_i и v_{i+n} справедливо

$$w_i = w_{i+n} \tag{18}$$

Пусть $\mathcal{I}_0 = \{i \in \{0,\dots,n-1\} \mid w_i = 0\}$, а $\mathcal{I}_0' = \{i+n \mid i \in \mathcal{I}_0\}$. Таким образом, для любого $j \notin \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_0'$ имеем

$$w_j \ge 1. \tag{19}$$

По Предложению 8 для каждого $i \in \mathcal{I}_0$ будет существовать j такое, что

$$v_j \in N^+(v_i)\cap N^+(v_{i+n}), \quad v_{j+n} \in N^-(v_i)\cap N^-(v_{i+n}). \tag{20}$$

Рассмотрим отображение φ, которое любому $i \in \mathcal{I}_0$ ставит в соответствие некоторое j, удовлетворяющее (20) (Рис. 4). Обозначим $\mathcal{M} =$

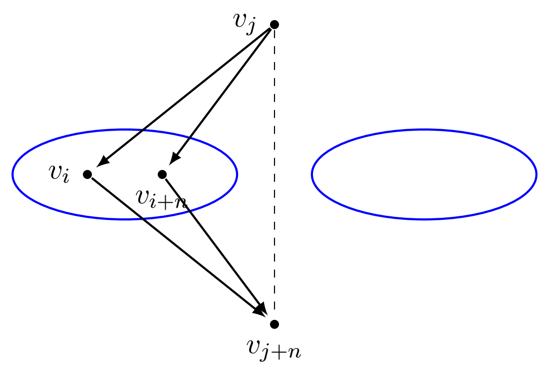

Рис. 5. $i \in \varphi^{-1}(j)$

$\varphi(\mathcal{I}_0)$, а $\mathcal{M}' = \{i+n \mid i \in \mathcal{M}\}$. Нетрудно видеть, что

$$|\mathcal{M}| = |\mathcal{M}'| \le |\mathcal{I}_0|. \tag{21}$$

Пусть теперь $\mathcal{R} = \{0, \ldots, 2n-1\} \setminus (\mathcal{M} \cup \mathcal{M}' \cup \mathcal{I}_0 \cup \mathcal{I}_0')$. Из (19) получаем неравенство

$$\sum_{i \in \mathcal{R}} w_i \ge |\mathcal{R}|. \tag{22}$$

Имеем разбиение $\{0, \ldots, 2n-1\} = \mathcal{I}_0 \sqcup \mathcal{I}_0' \sqcup \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}' \sqcup \mathcal{R}$. Из (21) получаем, что

$$|\mathcal{R}| \ge 2n - 4|\mathcal{I}_0|. \tag{23}$$

Пусть $j \in \mathcal{M}$. Тогда для любого $i \in \varphi^{-1}(j)$ получаем $v_i, v_{i+n} \in N^-(v_j) \cap N^+(v_{j+n})$ (Рис. 5). Следовательно $w_j \ge 2|\varphi^{-1}(j)|$. Значит,

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} w_j \ge 2|\mathcal{I}_0|. \tag{24}$$

В результате, в силу (18), (22), (23), (24), имеем:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} w_i = \sum_{i \in \mathcal{M}} w_i + \sum_{i \in \mathcal{M}'} w_i + \sum_{i \in \mathcal{R}} w_i = 2\sum_{i \in \mathcal{M}} w_i + \sum_{i \in \mathcal{R}} w_i \ge 4|\mathcal{I}_0| + |\mathcal{R}| \ge 2n.$$

Подставляя полученную оценку в (17), получаем

$$f_a(H) \le \frac{1}{3}\left(2n \cdot \frac{n^2-2}{2} - \sum_{i=0}^{2n-1} w_i\right) \le \frac{(n-2)n(n+2)}{3}.$$

□

Для эйлеровых ориентаций вида $C_{2n}(d_1, \ldots, d_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})$ введём обозначение

$$\Delta(C_{2n}(d_1, \ldots, d_{n-1}; t_1, \ldots, t_{n-1})) = \left|\{(i,j) \mid i < j,\ d_i + d_j = n,\ t_i \ne t_j\}\right|.$$

Предложение 9.

$$0 \leq \Delta(C_{2n}(1,\ldots,n-1;t_1,\ldots,t_{n-1})) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

и существуют наборы $t_1,\ldots,t_{n-1}$, на которых достигаются нижняя и верхняя оценки.

Нетрудно видеть, что нижняя оценка достигается на любом наборе, в котором все t_i принимают одно и то же значение. Верхняя оценка достигается на любом антисимметричном наборе $t_1,\ldots,t_{n-1}$. Например,

$$t_1,\ldots,t_{n-1} = \underbrace{-1,\ldots,-1}_{\frac{n-1}{2}},\underbrace{+1,\ldots,+1}_{\frac{n-1}{2}}$$

для нечётного n, и

$$t_1,\ldots,t_{n-1} = \underbrace{-1,\ldots,-1}_{\frac{n-2}{2}},-1,\underbrace{+1,\ldots,+1}_{\frac{n-2}{2}}$$

для чётного.

Лемма 4. *Пусть $T = C_{2n}(1,\ldots,n-1;t_1,\ldots,t_{n-1})$. Тогда*

$$f_a(T) = \begin{cases} 2\binom{n+1}{3} - 2n(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)), & n \text{ — нечетно;} \\ 2\binom{n+1}{3} - (2n(\frac{n-2}{2} - \Delta(T)) + n), & n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Для каждого $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ добавим в ориентацию T дугу из v_i в v_{i+n}. Получим турнир T', для которого

$$\deg_+ v_i = \begin{cases} n, i \in \{0,\ldots,n-1\}; \\ n-1, i \in \{n,\ldots,2n-1\}. \end{cases}$$

По [1] имеем:

$$f_a(T') = \binom{2n}{3} - \sum_{i=0}^{2n-1} \binom{\deg_+ v_i}{2} = \binom{2n}{3} - n\binom{n}{3} - n\binom{n-1}{3} = 2\binom{n+1}{3}.$$

Каждая добавленная дуга может образовать в T' 3-контур только с парой дуг, соединияющих вершины на расстояниях равных j и $n-j$ для некоторого $j \in \{1,\ldots,n-1\}$. Если $t_j \neq t_{n-j}$, то добавленная дуга (v_i, v_{i+n}) не образует 3-контур с дугами длин j и $n-j$. Иначе, добавленная дуга образует ровно 2 3-контура с дугами этих длин (кроме случая когда для четного n и $j = n/2$ будет получаться один 3-контур).

Таким образом, для нечетного n каждая добавленная дуга образует $2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T))$ 3-контуров. Для четного n — образует $(1+2(\frac{n-1}{2} - \Delta(T)))$ 3-контуров. □

Из Лемм 1, 2, 3, 4 и Предложения 9 напрямую следует доказательство теоремы 6.

References

[1] A. L. Perezhogin, I. S. Bykov, S. V. Avgustinovich, *Small length circuits in Eulerian orientations of graphs*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **21**:1 (2024), 370–382. Zbl 1551.05154

[2] T. E. Kireeva, *Perfect orientation colorings of cubic graphs*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **15** (2018) , 1353–1360. Zbl 1411.05103

[3] Taranenko A. A., *Algebraic properties of perfect structures*, Linear Algebra Appl., **607** (2020), 286–306. Zbl 1458.05157

[4] A. V. Pyatkin, O. I. Chernykh, *On the maximum number of open triangles in graphs with the same number of vertices and edges*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **29**:1 (2022), 46–55.

[5] A. V. Pyatkin , *On the maximum number of open triangles in graphs with few edges*, J. Appl. Industr. Math., **18**:3 (2024), 516–520.

Sergei Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: avgust@math.nsc.ru

Igor Sergeevich Bykov
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: igor.s.bykov@yandex.ru

Aleksei L'vovich Perezhogin
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: pereal@math.nsc.ru

Alena Sergeevna Krivonogova
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: k.alena.s.610@gmail.com