

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ГРАВИМЕТРИИП.Н. ВАБИЩЕВИЧ , Д.Х. ИВАНОВ *Посвящается 75-летию Василия Ивановича Васильева*

Abstract: The recovery of coefficients and/or the right-hand side of partial differential equations arises in the mathematical modeling of applied problems across various areas of physics. In geophysics, for instance, the gravitational potential generated by a given mass can be determined by solving a boundary value problem of the Poisson equation. In this article, we consider an inverse gravimetric problem involving the reconstruction of the domain of a homogeneous object with known density. Additional information about anomalous gravity is taken near the Earth's surface. This problem leads to the recovery of a piecewise-constant right-hand side function for the Poisson equation. A Robin type boundary condition is applied within a truncated computational domain to better approximate the far-distant gravitational field. The numerical algorithm employs an auxiliary smooth function to analytically represent the unknown domain's boundary. The smoothness of this function is ensured by solving another boundary value problem for an elliptic equation. We perform an iterative procedure that minimizes the misfit between modeled and observed data using a gradient-based method. The capabilities of the algorithm are

VABISHCHEVICH, P.N., IVANOV, D.K., NUMERICAL SOLUTION OF A GRAVIMETRIC INVERSE PROBLEM.

© 2025 ВАБИЩЕВИЧ П.Н., ИВАНОВ Д.Х.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, соглашение от 11.03.2025 № 075-02-2025-1792 (Раздел 1, 4, 5) и проект FSRG-2023-0025 (Раздел 2, 3).

Поступила 5 февраля 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

demonstrated with numerical results for two- and three-dimensional test problems.

Keywords: inverse problem, gravimetry, gravitational field, elliptic equation, numerical method.

1 Введение

Интерпретация гравитационных аномалий заключается в определении наиболее достоверной геологической структуры верхней части земной коры по наблюдениям элементов гравитационного поля [1, 2]. Наблюдения производятся преимущественно на дневной поверхности Земли или около нее: наземная, морская, воздушная и надземная съемки. Современные гравиметры могут измерять гравитационное поле с точностью порядка 1 мкГал [3] ($1\text{Гал} = 0.0001\text{ м/с}^2$).

Типовым объектом изучения в задачах гравиметрии является локальная геоплотностная неоднородность (рудное тело). Изолированный объект определяется его физическими (масса, плотность) и геометрическими (размеры, форма, местоположение) параметрами.

В прямой задаче гравиметрии требуется определить гравитационный потенциал физической модели в условиях, что параметры, определяющие модель, известны. При интерпретации наблюденных гравитационных полей решение прямой задачи делает возможным предсказать и сопоставить гравитационные аномалии для характерных геологических структур.

Обратная задача гравиметрии заключается в восстановлении физических и геометрических параметров возмущающих масс по информации о гравитационном поле. В общем случае обратная задача гравиметрии является некорректно поставленной задачей [4, 5, 6, 7, 8]. Проблема, в частности, заключается в отсутствии единственности решения как следствие того, что тела различной геометрии и функции распределения плотности создают одинаковые или очень близкие гравитационные поля. Существенная некорректность проявляется в неустойчивости решения к малым возмущениям входных данных.

Корректность обратной задачи гравиметрии по восстановлению формы рудного тела заданной плотности связана с результатами теории потенциала. Достаточные условия единственности решения обратной задачи гравиметрии для однородного рудного тела отражены в работах [9, 10, 11]. Основопологающим является результат по обратной задаче теории потенциала [9], который связан с однозначным определением звездной области однородного рудного тела по внешнему потенциальному полю. В [11] показано существование единственного решения обратной задачи потенциала для однородного тела, заданной в области

выпуклой относительно некоторого направления. Единственность восстановления правой части, представимых в виде суммы функций, независимых от одной пространственной переменной, для эллиптического уравнения показана в работе [12].

Численные методы решения обратной задач гравиметрии часто напрямую зависят от метода решения прямой задачи гравиметрии [5, 13, 14]. Из интегрального представления ньютоновского потенциала и его производных мы можем получить линейное или нелинейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода для определения функции распределения плотности $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Гравитационный потенциал определяется как

$$U(\mathbf{x}) = \gamma \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где Γ — область наблюдения, γ — универсальная гравитационная постоянная, ядро имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sum_{k=1}^3 x_k^2.$$

Гравитационное поле получается дифференцированием потенциала:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \gamma \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}' \in \Gamma,$$

где $\nabla_{\mathbf{x}}$ — оператор набла в переменных \mathbf{x} .

В [15] используется полуаналитический подход для решения прямой задачи гравиметрии. Определение границы раздела двух однородных сред с известными плотностями может быть сформулирована как задача восстановления глубины залегания поверхности, заданной формулой $h = \varphi(x_1, x_2)$, [16, 17, 18, 19]. Определение области залегания однородного рудного тела из интегральных представлений наблюдаемых данных исследовано в работах [20, 21, 22] с применением метода задания уровня (level set method) [23, 24].

В подходе, когда элементы гравитационного поля определяются по решению краевой задачи для уравнения Пуассона, обратная задача сводится к определению правой части уравнения (функции источника). Как известно, гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$-\Delta U = 4\pi\gamma\rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

с дополнительным условием на бесконечно удаленных точках:

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} U(\mathbf{x}) = 0.$$

Исходная прямая задача гравиметрии ставится в неограниченной области, однако при переходе к конечной расчетной области необходимо ставить приближенное граничное условие. Краевую задачу имеет смысл

формулировать непосредственно для гравитационного поля. В этом случае в правой части уравнения Пуассона возникает производная функции распределения плотности. Дополнительная информация задается в некоторой области $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ внутри расчетной области.

Объемный потенциал U в точках, отдаленных от расчетной области Ω ($\Gamma \cap \Omega = \emptyset$), может быть представлен в виде потенциала простого слоя:

$$U(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial u}{\partial n} dx', \quad \mathbf{x} \in \Gamma,$$

где \mathbf{n} есть внешний нормаль к границе $\partial\Omega$. Вспомогательная функция $u(\mathbf{x})$ является решением краевой задачи для исходного уравнения Пуассона с однородным граничным условием первого рода в области Ω . Следовательно, функция $u(\mathbf{x}; \rho)$, зависящая от плотности распределения $\rho(\mathbf{x})$, определяет гравитационный потенциал $U(\mathbf{x})$, при этом требуется знание только значений производной функции u по нормали к границе. Такой способ вычисления гравитационного поля обсуждался в работе [25]. Определение $\partial u / \partial n$ (эквивалентная плотность) по заданным значениям гравитационного потенциала является классическим примером интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром $-\frac{1}{4\pi} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. В случае, когда имеются скважинные наблюдения ($\Gamma \cap \Omega \neq \emptyset$), в правой части вышеупомянутого уравнения добавляется слагаемое от значений вспомогательной функции $u(\mathbf{x})$.

Подход на основе интегрального представления и решения краевой задачи сам по себе является весьма интересным методом решения обратной задачи гравиметрии по определению функции распределения плотности. Определение функции распределения плотности $\rho(\mathbf{x})$ сформулируется как задача восстановления правой части для эллиптического уравнения по заданным граничным наблюдениям о решении:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 4\pi\gamma\rho(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \mu(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где $\mu(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, — решение уравнения Фредгольма. В такой постановке задача относится к обратной задаче теории потенциала по восстановлению функции источника [26, 27, 28, 29, 30, 31].

Основные методы решения обратных задач гравиметрии, которые принадлежат к классу некорректно поставленных задач [32], базируются на применении метода регуляризации Тихонова [6, 33, 34, 35]. Исследования обратной задачи гравиметрии с данным методом отражены в работах [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]. Основное внимание уделяется выбору стабилизирующего функционала в методе регуляризации Тихонова.

В данной работе разрабатывается вычислительный алгоритм для численного решения обратной задачи гравиметрии по восстановлению области залегания однородного рудного тела. Расчет гравитационного поля проводится на основе решения краевой задачи для уравнения Пуассона, поставленной непосредственно для гравитационного поля, в конечной области методом конечных элементов. Для более точного учета асимптотики гравитационного поля на дальних расстояниях используется граничное условие третьего рода на искусственной границе [44]. В такой постановке область наблюдения находится внутри расчетной области. Для определения кусочно-постоянной функции распределения плотности применяется индикаторная функция от вспомогательной достаточно гладкой функции, удовлетворяющая решению краевой задачи для эллиптического уравнения. Решение обратной задачи находится итерационно на основе минимизации функционала невязки для наблюдаемых данных с применением градиентного метода квазиньютоновского типа L-BFGS [45, 46, 47, 48], реализованного в библиотеке SciPy (<https://docs.scipy.org/>). Вычисление градиента функционала невязки по параметрам управления производится с помощью дополнительного пакета dolfín-adjoint [49, <http://www.dolfín-adjoint.org/>]. Данный пакет совместно с библиотекой FEniCS применяется для различных задач оптимизации с ограничениями в виде уравнений в частных производных [50, 51, 52].

2 Постановка задачи

Имеется рудное тело, заключенное в области D , с функцией распределения плотности $\rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Гравитационное поле $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ от заданного тела рассчитывается из решения краевой задачи в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, объемлющей область D . Область Ω выбирается достаточно большого размера и имеет кусочно-гладкую границу $\partial\Omega$.

Для каждой компоненты g_k , $k = 1, 2, 3$, гравитационного поля $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ ставится краевая задача для уравнения Пуассона с однородным граничным условием третьего рода:

$$\begin{aligned} -\Delta g_k &= 4\pi\gamma \frac{\partial}{\partial x_k} \rho(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial n} g_k + \alpha_k(\mathbf{x}) g_k &= 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Параметр $\alpha_k(\mathbf{x})$ выбирается следующим образом [53]:

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha}_k \cdot \mathbf{n},$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}_k(\mathbf{x}) = \left(\frac{3(x_1 - x_1^0)}{r^2} - \frac{\delta_{1k}}{x_1 - x_1^0}, \frac{3(x_2 - x_2^0)}{r^2} - \frac{\delta_{2k}}{x_2 - x_2^0}, \frac{3(x_3 - x_3^0)}{r^2} - \frac{\delta_{3k}}{x_3 - x_3^0} \right),$$

\mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$, δ_{ij} — символ Кронекера, $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — центр области Ω .

Введем гильбертово пространство $V \subset \mathcal{L}_2(\Omega)$ со стандартными скалярным произведением и нормой:

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad \forall u, v \in V.$$

Также дополнительно вводится обозначение:

$$(u, v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} uv \, ds.$$

Вариационная формулировка краевой задачи (1) заключается в определении функции $g_k(\mathbf{x}) \in V$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $k = 1, 2, 3$, такой что

$$(\nabla g_k, \nabla v) + (\alpha_k g_k, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right), \quad \forall v \in V. \quad (2)$$

В данной работе мы рассматриваем однородное рудное тело и тем самым ограничиваем функцию $\rho(\mathbf{x})$ классом кусочно-постоянных функций:

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho, & \mathbf{x} \in D, \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega/D, \end{cases} \quad (3)$$

где ρ постоянная величина. Такую функцию можно представить с привлечением характеристической функции области D , $\chi_D(\mathbf{x})$:

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho \chi_D(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Вне области D плотность равна нулю.

Пусть имеется область наблюдения Γ ($\Gamma \subset \Omega$), на котором измеряется гравитационное поле:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (5)$$

В гравиразведке входные данные $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ получается после предобработки измеренных гравитационных полей и определяется как гравитационная аномалия в предположении, что она вызвана рудным телом с плотностью (3).

Под *прямой задачей* будем понимать следующее: найти функцию $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, удовлетворяющую решению вариационной задачи (2), по заданной функции $\rho(\mathbf{x})$. В качестве области наблюдения обычно выступает небольшая площадь на дневной поверхности ($x_3 = 0$). При наличии возможности проведения гравиметрического каротажа в буровых скважинах, область Γ может представляться в виде вертикальных отрезков.

Обратная задача заключается в восстановлении пары функций $\{\mathbf{g}(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x})\}$ во всей области Ω из (2) и (3) таких, что функция $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ аппроксимировала заданные наблюдаемые данные $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ на Γ , см. (5). Из представления (4) следует, что задача эквивалента задаче восстановления функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и формы области D .

3 Вычислительный алгоритм и его реализация

Для численного решения вариационной задачи применяется метод конечных элементов [54]. В расчетной области Ω строится сетка в виде триангуляции \mathcal{T}_h , h — характерный шаг сетки. В зависимости от размерности задачи ячейками сетки служат треугольники или тетраэдры. Обозначим через $\mathbf{x}_i \in \mathcal{T}_h$, $i = 1, 2, \dots, N$, узлы сетки.

Введем подпространство $V^h \subset V$ конечных элементов первого порядка. Базисные функции пространства V^h представляют собой кусочно-линейные функции $\varphi_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, N$, определенные на элементах сетки. Для них справедливо

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Аппроксимация функции $u(\mathbf{x})$ в пространстве V^h имеет вид

$$u(\mathbf{x}) \approx u_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(\mathbf{x}), \quad u_i = u(\mathbf{x}_i).$$

Для аналитического представления области D характеристическая функция $\chi_D(\mathbf{x})$ приближается с привлечением функции Хевисайда

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

от некоторой вспомогательной достаточно гладкой функции $c(\mathbf{x})$:

$$\chi_D(\mathbf{x}) \longrightarrow H(c(\mathbf{x})).$$

Тогда с учетом (4) функция распределения плотности $\rho(\mathbf{x})$ аппроксимируется следующим образом:

$$\rho(\mathbf{x}) \approx \rho H(c(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6)$$

Отметим, что изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $c(\mathbf{x})$ определяет границу ∂D , а положительные значения отображают внутренность области D .

Для численного приближения функции Хевисайда применяется следующая функция:

$$H(c) \approx H_\eta(c) = \begin{cases} 1, & t > \eta, \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{2\eta} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(\pi \frac{t}{\eta}\right), & |t| \leq \eta, \\ 0, & t < -\eta, \end{cases} \quad (7)$$

где η — малый параметр.

Определим эллиптический оператор \mathcal{A} для функций, заданных в некоторой области Ω' ($\Omega' \subset \Omega$) следующим образом

$$\mathcal{A}c = \{-\Delta c; \quad c(\mathbf{x}) = -1, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega'\}.$$

Краевое значение в определении оператора \mathcal{A} необходимо для управления поведением приближенной области D вблизи границы $\partial\Omega'$. В нашем случае условие с отрицательным значением соответствует, область D не пересекает границу.

Вспомогательная функция $c(\mathbf{x})$ находится из решения задачи

$$\|c(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\|^2 + \gamma\|c(\mathbf{x})\|_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \min,$$

где $f(\mathbf{x})$ заданная функция в Ω' , параметр $\gamma = \text{const} > 0$. Тем самым, функция $c(\mathbf{x})$ удовлетворяет решению краевой задачи для эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} -\gamma\Delta c + c &= f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega', \\ c &= -1, & \mathbf{x} \in \partial\Omega'. \end{aligned} \quad (8)$$

Член $-\gamma\Delta c$ в левой части уравнения (8) контролирует гладкость решения, при этом γ играет роль параметра регуляризации. Функция $c(\mathbf{x})$ сглаживает управляющую функцию $f(\mathbf{x})$.

Вариационная формулировка краевой задачи (8): найти $c \in V_1^h$

$$\gamma(\nabla c, \nabla v) + (c, v) = (f, v) \quad \forall v \in V_0^h, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} V_0^h &= \{v \in V^h(\Omega) : v(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega'\}, \\ V_1^h &= \{v \in V^h(\Omega) : v(\mathbf{x}) = -1, \mathbf{x} \in \partial\Omega'\}. \end{aligned}$$

Вариационные постановки задач (2) для вычисления компонент гравитационного поля \mathbf{g} формулируются аналогично: найти $g_k(\mathbf{x}) \in V^h$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $k = 1, 2, 3$, таких что

$$(\nabla g_k, \nabla v) + (\alpha_k g_k, v)_{\partial\Omega} = -4\pi\gamma \left(\rho, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right), \quad \forall v \in V^h. \quad (10)$$

Решение прямых задач (2) неявно зависит от функции управления $f(\mathbf{x})$ из (9) и (6). Длина вектора параметров управления равна количеству степеней свободы конечно-элементного метода. Функционал невязки при условии переопределения (5) равен

$$J(f) = \int_{\Gamma} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}; f) - \mathbf{d}(\mathbf{x})\|^2 dx. \quad (11)$$

Квазирешение обратной задачи находится из решения задачи оптимального управления:

$$\min_{f \in L_2(\Omega)} J(f). \quad (12)$$

Для входных параметров моделирования ($\mathbf{d}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, γ и η) алгоритм минимизации функции $J(f)$ выглядит так:

- (1) инициализировать начальное управление $f(\mathbf{x})$;
- (2) найти решение $c(\mathbf{x})$ вспомогательной вариационной задачи (9);
- (3) вычислить правую часть $\rho(\mathbf{x})$, используя (6);
- (4) найти решение $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ прямой вариационной задачи (10);
- (5) вычислить функционал невязки J (11);

- (6) посчитать градиент функционала $\partial J/\partial f$;
- (7) проверить условие сходимости по f . Если условие не выполняется, обновить состояние f с учетом градиентного спуска и перейти к шагу 2.

При успешной сходимости итерации предложенного алгоритма найденная функция $\tilde{f}(\mathbf{x})$ используется для определения квазирешения обратной задачи $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \rho H(\tilde{c}(\mathbf{x}; \tilde{f}))$. Изоповерхность нулевого уровня функции $\tilde{c}(\mathbf{x})$ приближает границу искомого рудного тела:

$$\partial D \approx \{\mathbf{x} \in \Omega : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Численная реализация поставленных вариационных задач базируется на применении вычислительной платформы FENiCS, общедоступная библиотека для решения научных и инженерных задач методом конечных элементов. Градиент функционала по функции управления находится автоматически с помощью пакета `dolfin-adjoint` на основе решения сопряженных задач.

4 Численные эксперименты

Рассматриваются модельные задачи с однородными рудными телами простых геометрий. Наблюденные данные $\mathbf{d}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$ вычисляются аналитически. Для задания погрешности во входных данных добавляется искусственный шум.

В качестве начального значения управляющей функции f выбирается ограниченная непрерывная функция:

$$f^0(\mathbf{x}) = 2^{1-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2/R_0^2} - 1, \quad (13)$$

где R_0 и \mathbf{x}_0 заданы.

При малых значениях параметра γ изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $c(\mathbf{x})$ будет близка к кругу с центром в точке \mathbf{x}_0 . Параметр $\gamma = 0.02$, а η равен размеру шага расчетной сетки. Мы накладываем дополнительные ограничения на функцию управления: $-1 \leq f_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$.

4.1. Двухмерный случай. Расчетная область Ω , см. рисунок 1, представляет собой квадратную область $[-L, L] \times [1 - L, 1 + L]$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и ось x_2 направлена вниз. Для дискретизации области Ω строится регулярная сетка треугольными ячейками с шагом $h = 1/24$. Выделена часть расчетной области Ω' , в которой расчеты могут быть выполнены на более подробной сетке, см. рисунок 1.

Наблюдение ведется на дневной поверхности с добавлением искусственного шума:

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}_e(\mathbf{x}) + \delta \max_{\mathbf{x} \in \Gamma} |\mathbf{g}_e(\mathbf{x})| \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}),$$

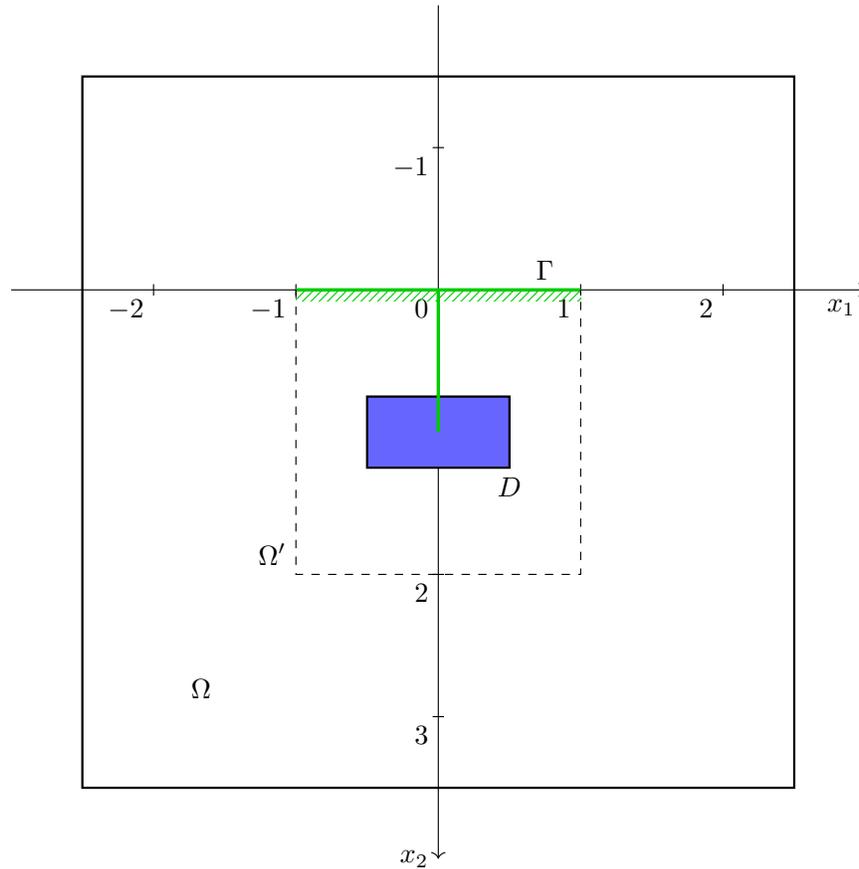


Рис. 1. Расчетная область Ω и ее часть Ω' , рудное тело D и область наблюдения Γ .

где $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$ — точное гравитационное поле для искомого рудного тела, δ — относительный уровень шума, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\sigma_1(\mathbf{x}), \sigma_2(\mathbf{x}))$, $\sigma_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, — случайные величины из равномерного распределения на отрезке $[-1, 1]$.

Проведем серию численных экспериментов с источниками простых геометрий с глубиной залегания H (x_2 -координата центра). Данные наблюдения, $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$, получаются из аналитических формул.

Восстанавливается прямоугольное рудное тело размера 1×0.5 и плотностью $\rho = 2000$. Магнитуда гравитационного поля $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, точные и зашумленные с $\delta = 0.01, 0.05$ и 0.1 , на отрезке наблюдений $\Gamma = [-1, 1] \times [0]$ представлены на рисунке 2 для глубины залегания $H = 0.5$. На рисунке 3 изображены восстановленные характеристические функции неизвестной области, контур точной области отображен красной линией.

Аналогичные результаты представлены на рисунках 4, 5 для глубины залегания $H = 1.0$ и на рисунках 6, 7 для глубины залегания $H = 1.5$.

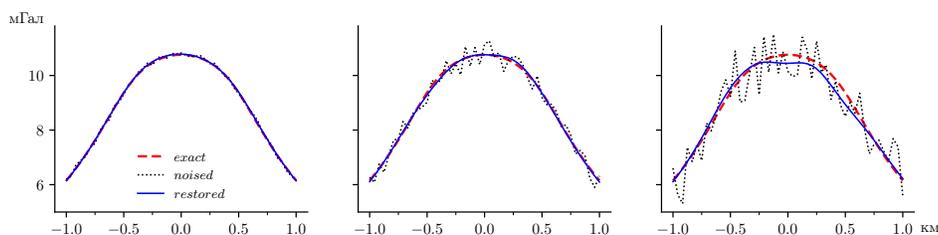


Рис. 2. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для прямоугольного тела, $H = 0.5$.

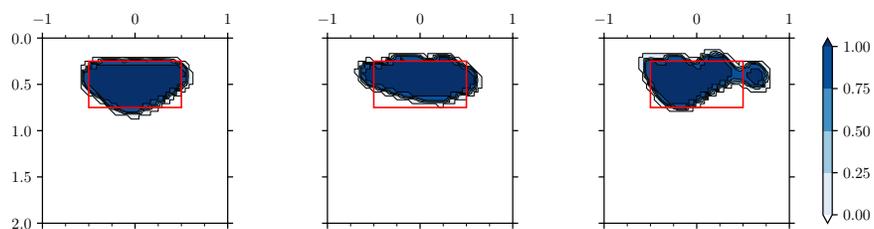


Рис. 3. Восстановление прямоугольного тела, $H = 0.5$.

График изменения функционала невязки нарисован на рисунке 8, восстановленные данные наблюдения представлены на рисунках 2, 4 и 6, соответственно глубине залегания тела.

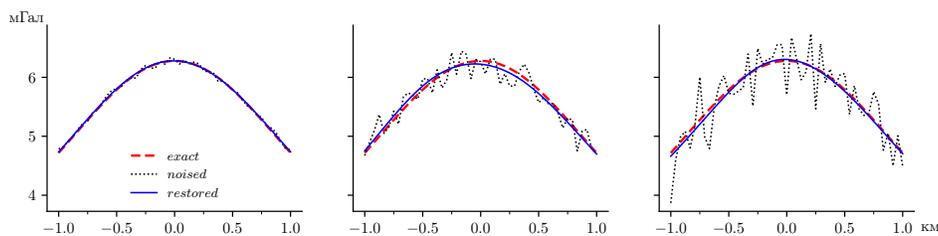


Рис. 4. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для прямоугольного тела, $H = 1$.

Примеры восстановления области залегания прямоугольного рудного тела ($H = 1$) с использованием области наблюдения меньшего размера $\Gamma = [-0.5, 0.5] \times [0]$ приведены на рисунках 9, 10 и 11. Как видно, в этом случае при малых уровнях шума имеем достаточно хороший результат.

Рассмотрим случай, когда неизвестная область является составной. Напомним, что мы начинаем восстановление от односвязной области круглой формы. Возьмем два квадратных тела размера 0.25×0.25 : глубину залегания одной части ($H_1 = 0.5, 1.0, 1.5$) будем менять относительно второй $H_2 = 1$.

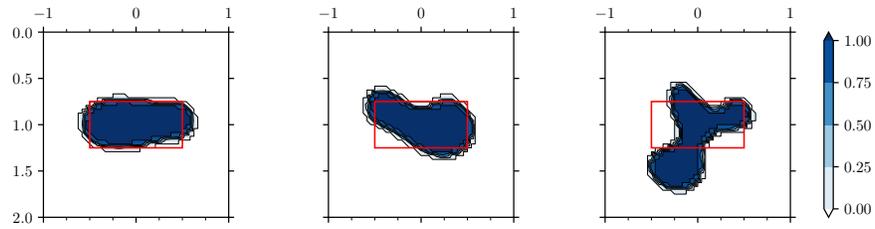


Рис. 5. Восстановление прямоугольного тела, $H = 1$.

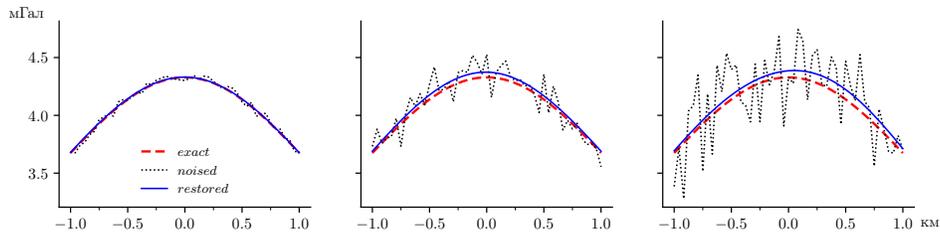


Рис. 6. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для прямоугольного тела, $H = 1.5$.

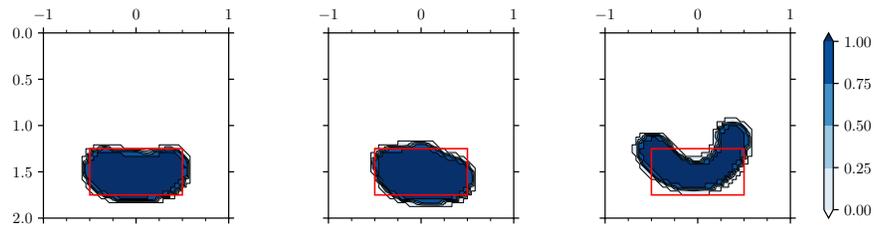


Рис. 7. Восстановление прямоугольного тела, $H = 1.5$.

Гравитационное поле на области наблюдения $\Gamma = [-1, 1] \times [0]$ в случае $H_1 = 0.5$ представлено на рисунке 12, восстановленные области приведены на рисунке 13. Аналогичные результаты представлены на рисунках 14, 15 и 16, 17 для глубины залегания первого тела $H_1 = 1.0$ и 1.5 , соответственно. Графики изменения функционала невязки отображены на рисунке 18. Как видно из результатов для небольших уровней шума ($\leq 10\%$) алгоритм достаточно хорошо локализует обе части рудного тела.

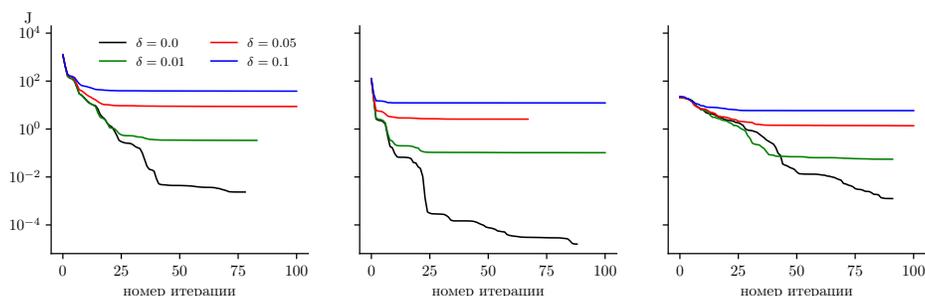


Рис. 8. График изменения функционала невязки J для прямоугольных тел: $H = 0.5, 1.0, 1.5$.

Далее рассматривается процесс восстановления несвязных рудных тел. Неизвестная область представляет собой два круга разного размера: радиус первого равен 0.175 км, а второго — 0.5 км. Будем варьировать глубину залегания (центр круга) меньшего круга $H_1 = 0.5, 1.5$, который расположен на -0.6 по горизонтали, при фиксированном положении большего круга в точке $(0.25, 1)$. При $H_1 = 0.5$, малый круг находится ближе к области наблюдения, входные данные представлены на рисунке 19. Восстановленные области при различных уровнях шума $\delta = 0.01, 0.05, 0.1$

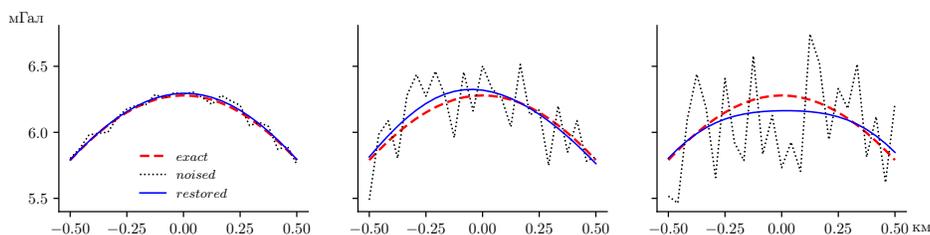


Рис. 9. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения на части $\Gamma = [-0.5, 0.5] \times [0]$ для прямоугольного тела, $H = 1$.

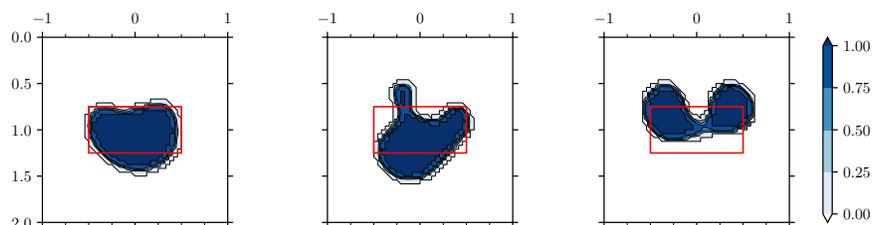


Рис. 10. Восстановление прямоугольного тела, $H = 1$, при $\Gamma = [-0.5, 0.5] \times [0]$.

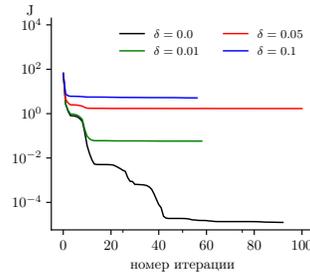


Рис. 11. График изменения функционала невязки J для прямоугольного тела, $H = 1$, при $\Gamma = [-0.5, 0.5] \times [0]$.

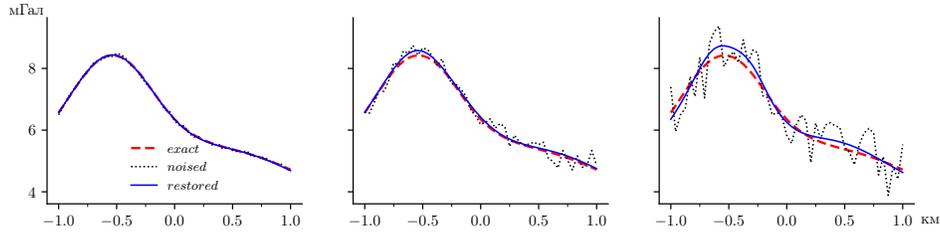


Рис. 12. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для квадратных тел, $H_1 = 0.5$.

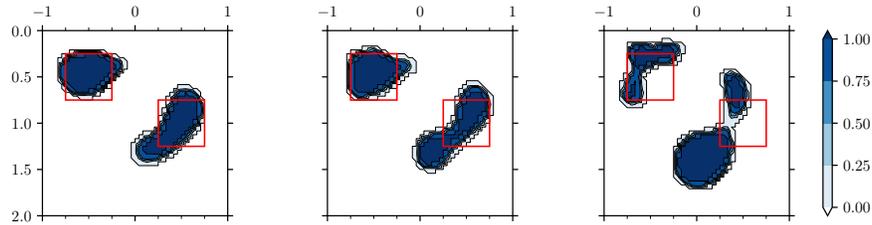


Рис. 13. Восстановление квадратных тел, $H_1 = 0.5$.

показаны на рисунке 20. В случае, когда малый круг находится снизу ($H_1 = 1.5$), рисунки 21, 22 показывают входные данные и восстановленные области, соответственно. Изменения функционала невязки показаны на рисунке 23. Видно, что меньший круг, лежащий далеко от области наблюдения, экранируется сильнее кругом большего размера.

Добавление скважинных наблюдений в алгоритм реализуется простым способом, так как при решении краевой задачи для гравитационного поля мы получаем решение во всей расчетной области Ω . Дополним область наблюдения на дневной поверхности вертикальным отрезком, получим $\Gamma = [-1, 1] \times [0] \cup [0] \times [0, 1]$. Это дает нам возможность восстановления более сложных конфигураций.

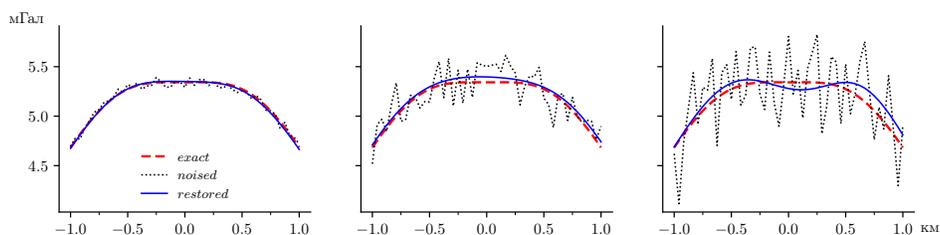


Рис. 14. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для квадратных тел, $H_1 = 1$.

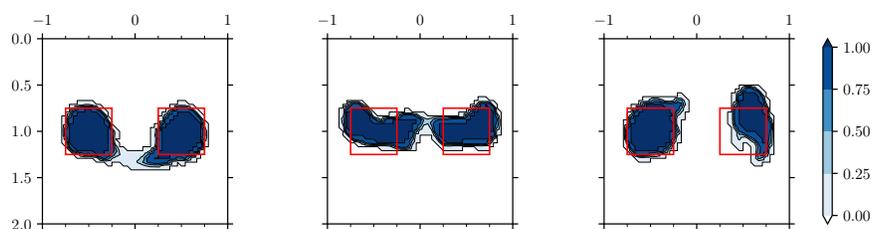


Рис. 15. Восстановление квадратных тел, $H_1 = 1$.

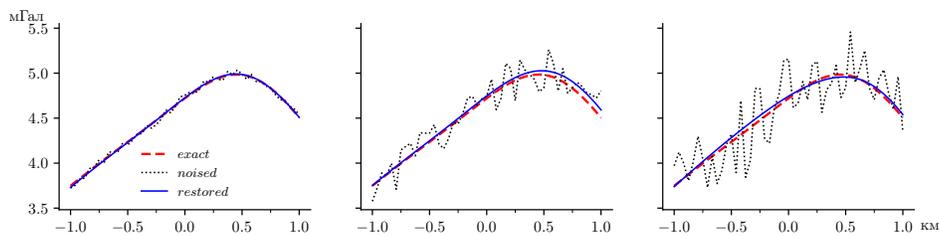


Рис. 16. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для квадратных тел, $H_1 = 1.5$.

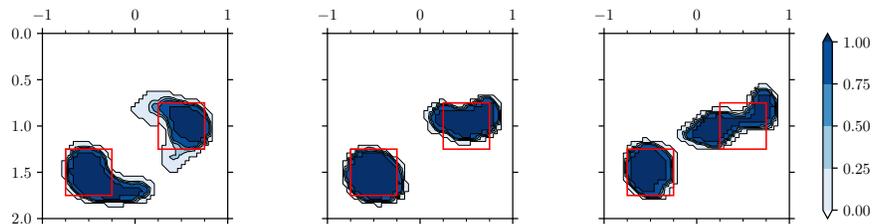


Рис. 17. Восстановление квадратных тел, $H_1 = 1.5$.

Рассмотрим восстановление шести кругов разного размера, расположенных на два ряда, второй ряд находится ниже скважины. Наблюдения

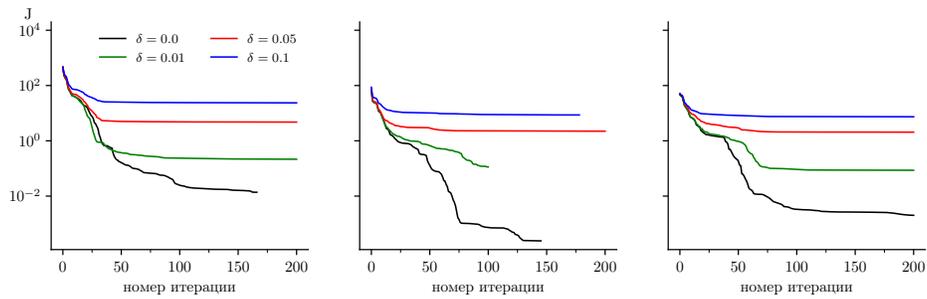


Рис. 18. График изменения функционала невязки J для квадратных тел: $H_1 = 0.5, 1.0, 1.5$.

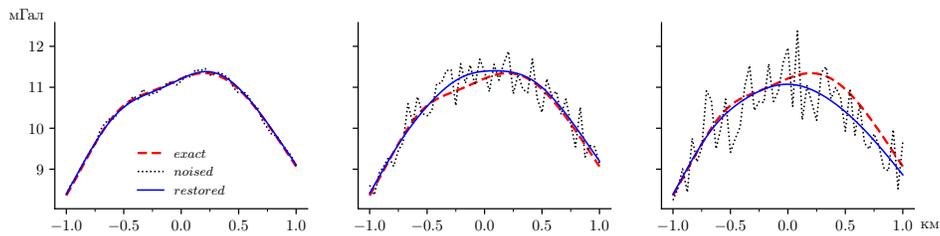


Рис. 19. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для округлых тел, $H_1 = 0.5$.

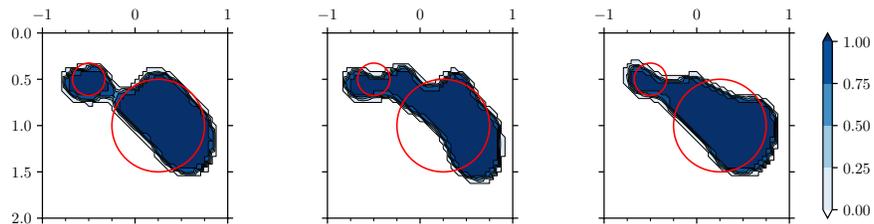


Рис. 20. Восстановление округлых тел, $H_1 = 0.5$.

на дневной поверхности представлены на рисунке 24, а на скважине — на рисунке 25. Восстановление показано на рисунке 26, график изменения функционала невязки приводится на рисунке 27. Видно, что верхний ряд, который ближе к дневной поверхности, восстанавливается намного лучше, сохраняя разделение подобластей. Второй ряд ввиду слабого эффекта на дневной поверхности и скважине восстановился приблизительно. Однако, надо заметить, что глубина погружения второго ряда достаточно точно находится при разных уровнях шума.

4.2. Трехмерный случай. Расчетная область $\Omega = [-L, L] \times [-L, L] \times [1 - L, 1 + L]$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и ось x_3 направлена вниз. Вычислительную

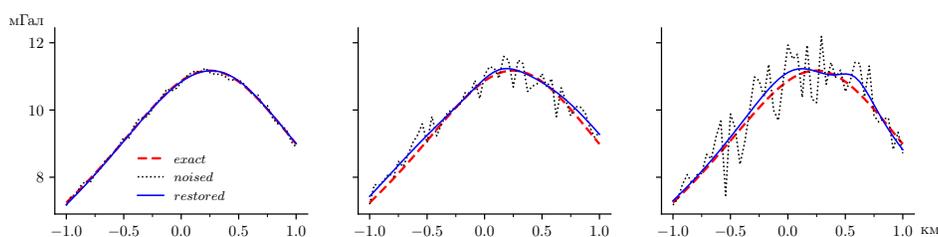


Рис. 21. Точные, зашумленные и восстановленные данные наблюдения для округлых тел, $H_1 = 1.5$.

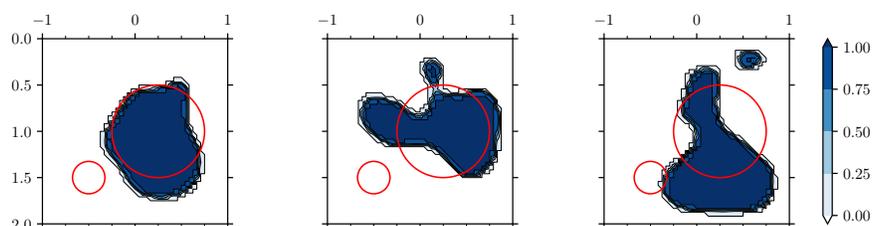


Рис. 22. Восстановление округлых тел, $H_1 = 1.5$.

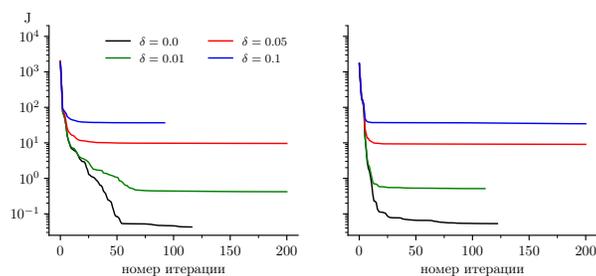


Рис. 23. График изменения функционала невязки J для округлых тел: $H_1 = 0.5, 1.5$.

сетку строим так, что для области исследования Ω' строится равномерная сетка с шагом $h = 1/12$ км, а по бокам шаг сетки увеличивается в геометрической прогрессии. Одна из граней сетки представлена на рисунке 28.

Рассматривается рудное тело с плотностью 2000 кг/м^3 в форме прямоугольной призмы размера 1, 1 и 0.5 км, которая погружена на глубину 1 км. Область наблюдения берется на дневной поверхности $\Gamma = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Входные данные представлены на рисунке 29, точные данные ($\delta = 0$) вычисляются аналитически.

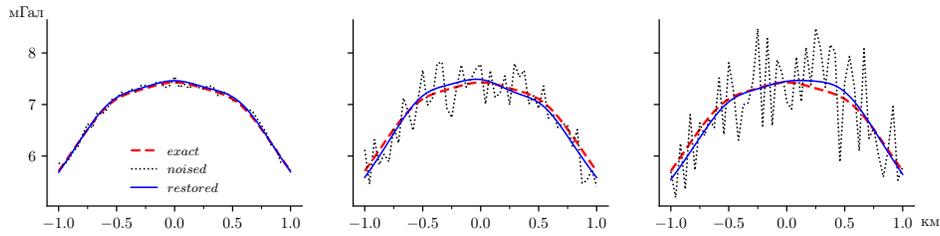


Рис. 24. Наблюдение на дневной поверхности для нескольких округлых тел.

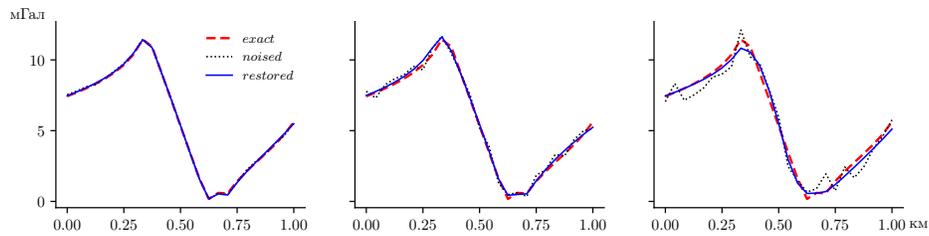


Рис. 25. Наблюдение на вертикальной скважине для нескольких округлых тел.

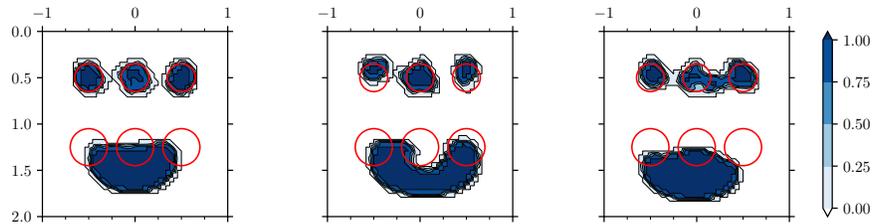


Рис. 26. Восстановление нескольких округлых тел.

Восстановление формы по входным данным без шума и с шумом $\delta = 0.05$ представлены на рисунках 30 и 31. На рисунке отображены начальное приближение, а также решения на итерациях $k = 50, 100, 200$ и 400. Как можно заметить, как и в двумерном случае мы получаем гладкие решения, повторяющие форму исходного тела.

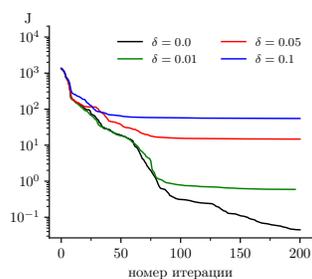


Рис. 27. График изменения функционала невязки J для нескольких округлых тел.

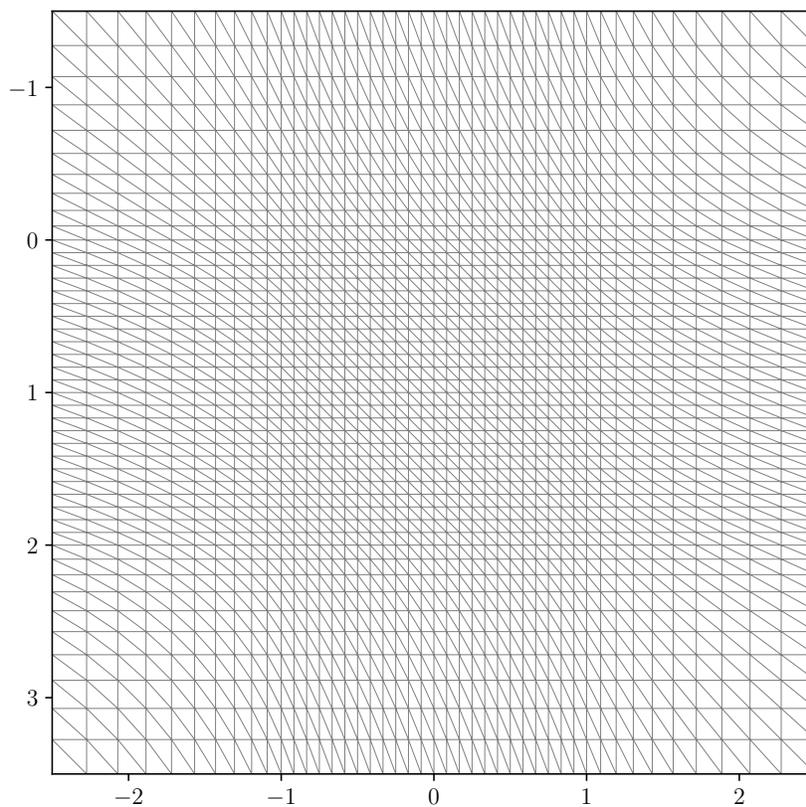


Рис. 28. Расчетная сетка для трехмерной задачи.

Рассматривается рудное тело в виде двух сфер радиуса 0.3 км, которые расположены в точках $(-0.4, -0.4, 0.5)$ и $(0.4, 0.4, 1.5)$. Входные данные представлены на рисунке 32.

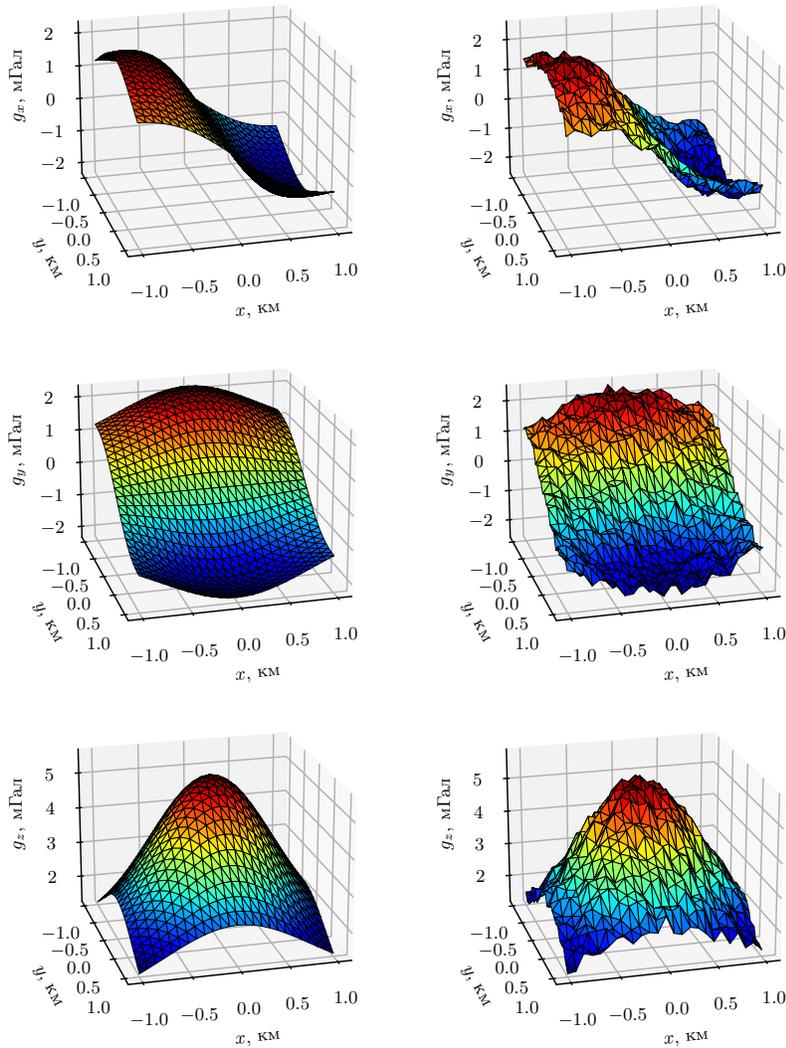


Рис. 29. Данные наблюдения для призмы: слева — точные, справа — зашумленные $\delta = 0.05$.

Восстановление формы по входным данным без шума на некоторых промежуточных итерациях: $k = 50, 100, 200, 400$, включая начальное приближение, представлены на рисунке 33. Видно, что хотя мы начинаем приближать с односвязной области, на сотой итерации произошло разделение на подобласти, которые постепенно сошлись к местоположениям точных сферических тел.

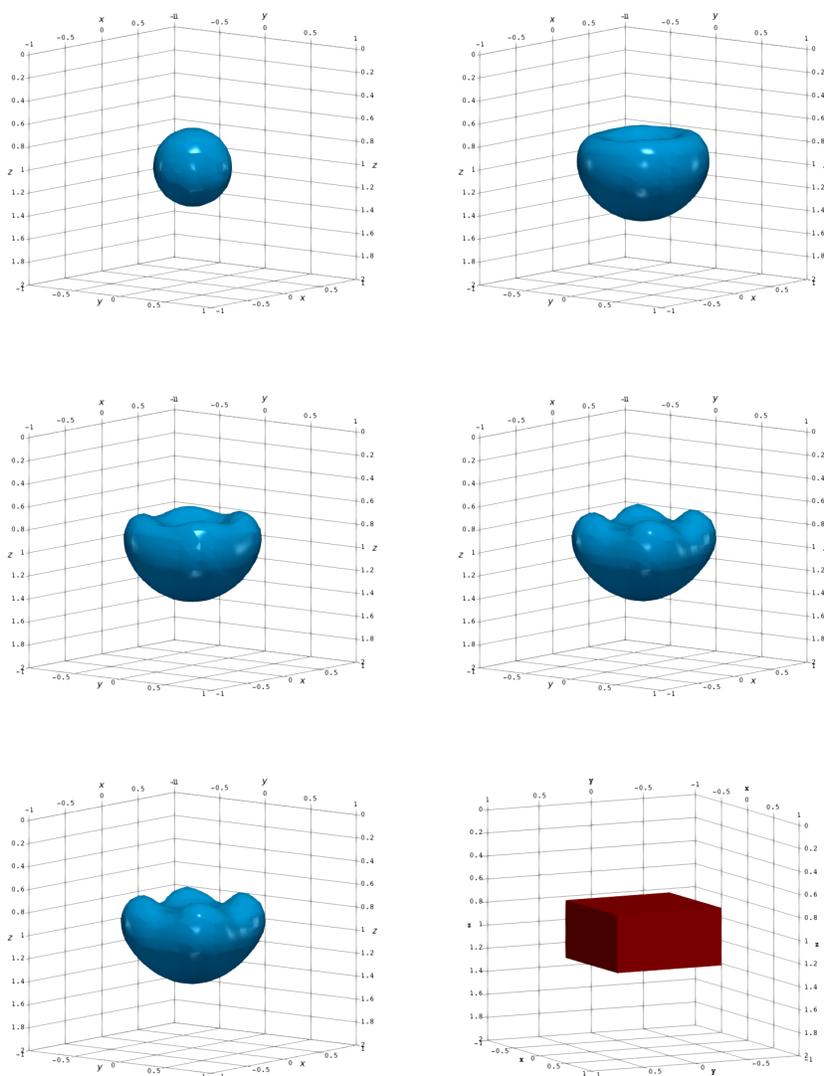


Рис. 30. Восстановление прямоугольной области, изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $c(\mathbf{x})$ на промежуточных итерациях, данные без шума.

На рисунке 34 представлены результаты восстановления, когда входные данные заданы с шумом $\delta = 0.05$. В этом случае мы так же получаем достаточно хорошее приближение исходных объектов.

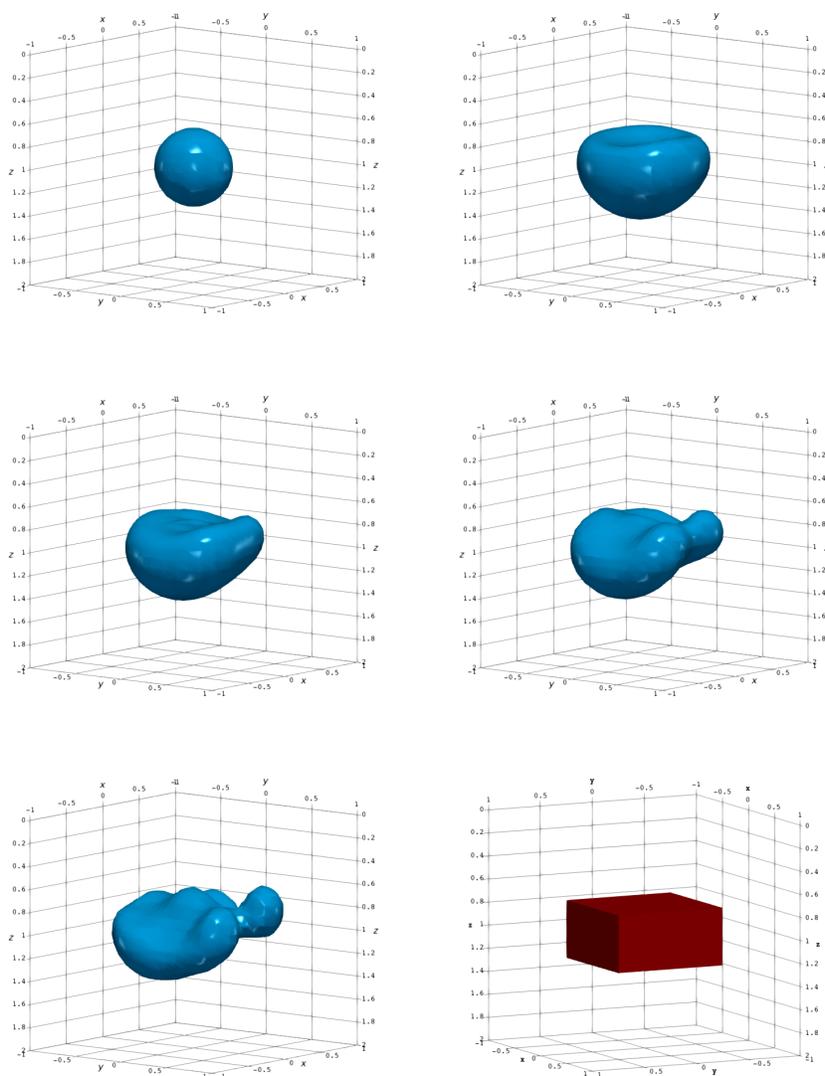


Рис. 31. Восстановление прямоугольной области, изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $s(\mathbf{x})$ на промежуточных итерациях, данные с шумом $\delta = 0.05$

5 Заключение

Рассмотрена обратная задача гравиметрии по восстановлению рудного тела заданной плотности по измерениям аномального гравитационного поля. Гравитационное поле описывается решением краевой задачи для уравнения Пуассона. Особенности прямой задачи связаны, во первых, с производной функции распределения плотности (правая часть

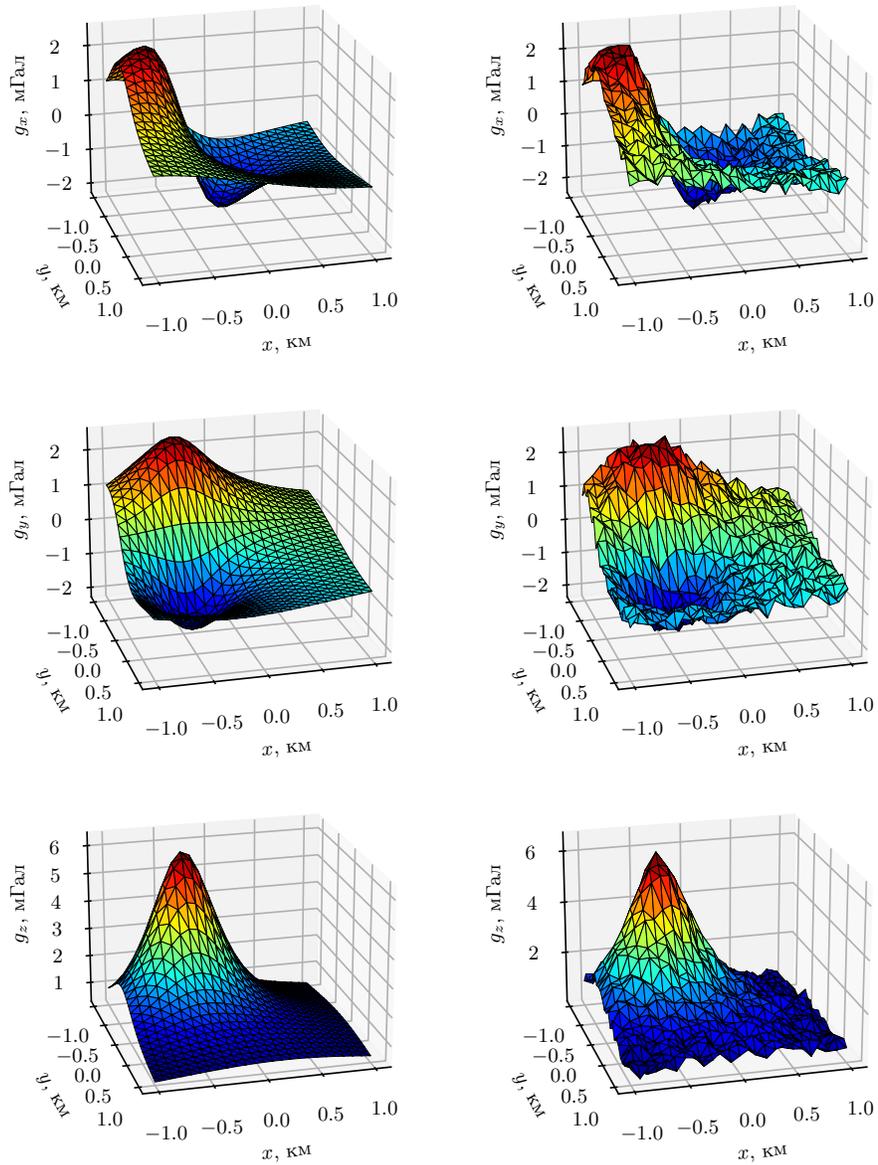


Рис. 32. Данные наблюдения для сферических тел: слева — точные, справа — зашумленные $\delta = 0.05$.

уравнения), во вторых, с формулированием приближенных граничных условий на границе расчетной области. Используется вариационная формулировка задачи, что позволяет рассматривать задачи для аномалий с

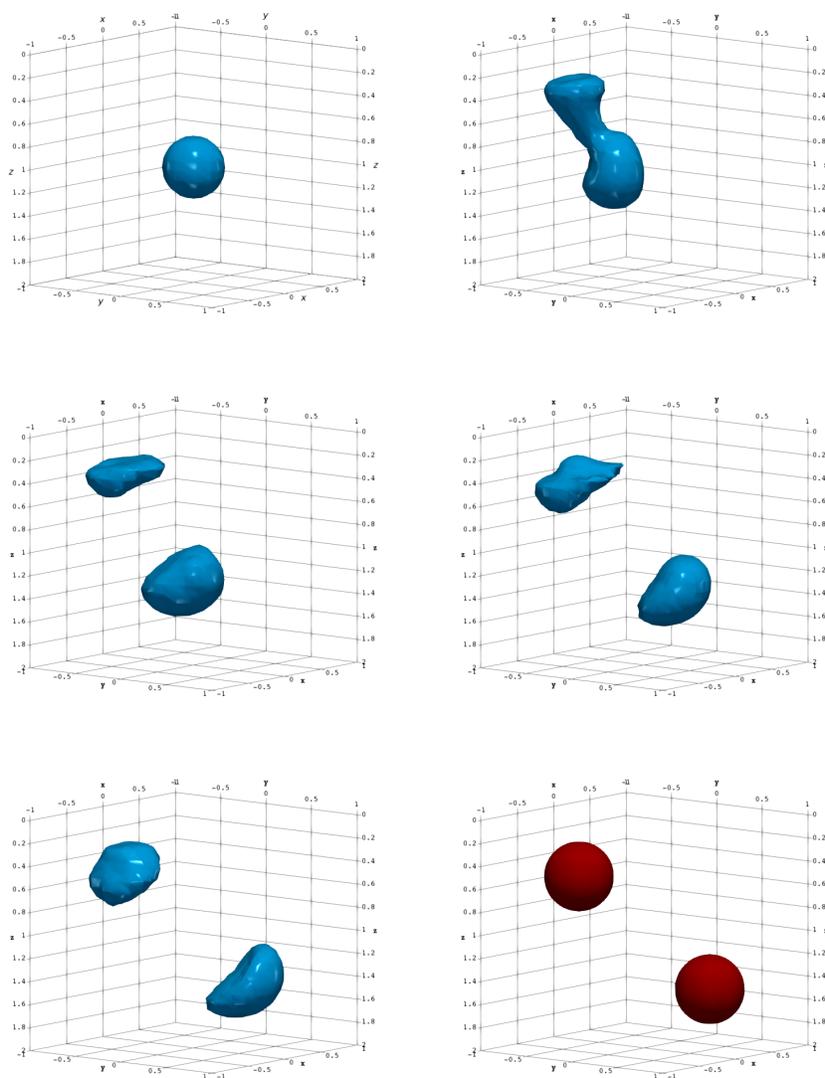


Рис. 33. Восстановление двух сфер, изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $s(\mathbf{x})$ на промежуточных итерациях, данные без шума.

кусочно-постоянными плотностями. Для более точного описания гравитационного поля на искусственной границе используется приближенное граничное условие третьего рода.

Разработан вычислительный алгоритм численного восстановления области залегания однородного рудного тела на основе минимизации функционала невязки градиентным методом и определения границ аномалий

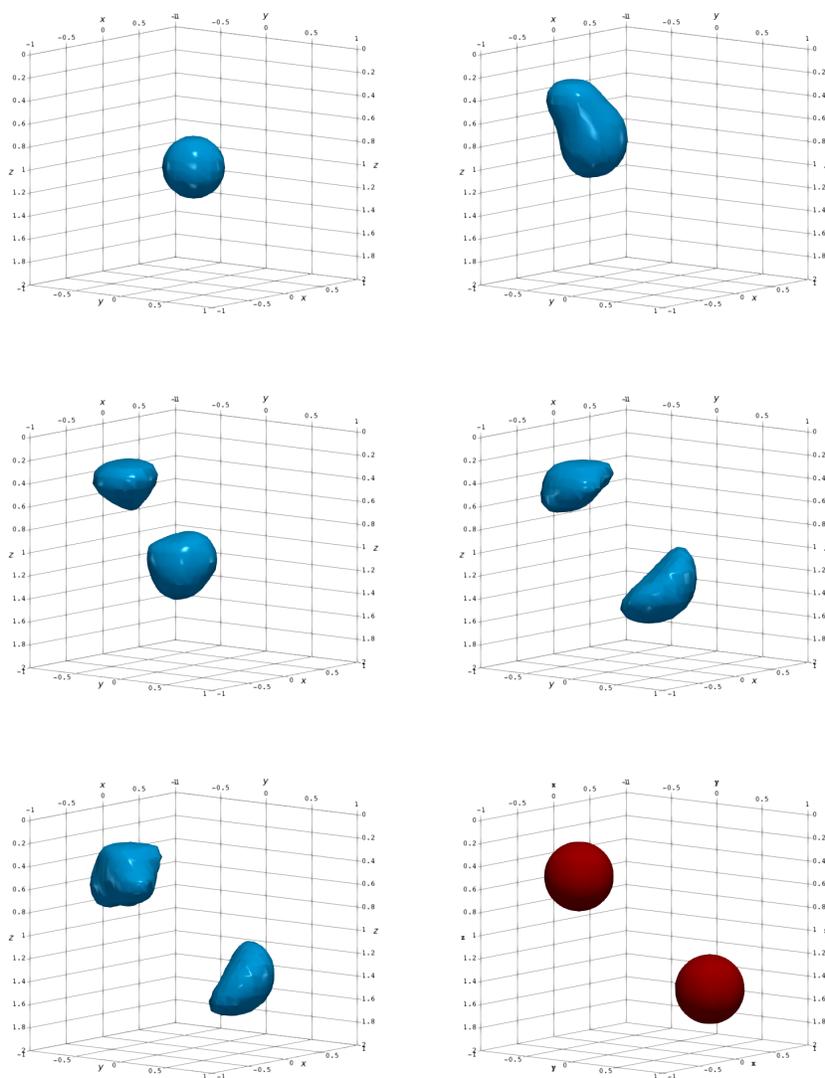


Рис. 34. Восстановление двух сфер, изоповерхность нулевого уровня вспомогательной функции $s(\mathbf{x})$ на промежуточных итерациях, данные с шумом $\delta = 0.05$.

с помощью вспомогательной функции. Выполненные численные расчеты для двумерных и трехмерных модельных задач показали возможность восстановления контура рудного тела по наблюдениям гравитационного поля в конечном числе точек наблюдения на дневной поверхности не только для односвязного тела, но и в случае, когда рудное тело состоит из нескольких частей.

References

- [1] E.A. Mudrecova, K.E. Veselova, *Gravity exploration. Geophysicist's Handbook*, Nedra Publishers, 1990.
- [2] H. Gupta, *Encyclopedia of solid Earth geophysics*, Springer, Dordrecht, 2011.
- [3] J. Fang, W. Wang, Y. Zhou, J. Li, D. Zhang, B. Tang, J. Zhong, J. Hu, F. Zhou, X. Chen, J. Wang, *Classical and Atomic Gravimetry*, Remote Sensing, **16**:14 (2024), 2634.
- [4] V.K. Ivanov, *On ill-posed problems*, Mat. Sb. (N.S.), **61**:2 (1963), 211–223.
- [5] I.V. Boykov, A.I. Boikova. *Approximate methods for solving direct and inverse problems of gravity exploration*, Publishing House of the Penza State University: Penza, Russia, 2012.
- [6] M.S. Zhdanov, *Theory of inverse problems and regularization in geophysics*, Scientific World Publishing House, Moscow, 2007.
- [7] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Sibirskoe Nauchnoe Izd., Novosibirsk, 2008; De Gruyter, Berlin, 2012.
- [8] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Nauka Publishers, Moscow, 1984.
- [9] P.S. Novikov, *On the uniqueness of the inverse potential problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **18**:3 (1938), 165–168.
- [10] M.A. Brodskii, V.N. Strakhov, *In the class of homogeneous polyhedra homeomorphic to a ball, the solution of the inverse Newtonian potential problem is unique*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **292**:6 (1987), 1337–1340.
- [11] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer, 3rd edition, 2017.
- [12] P.N. Vabishchevich, *Uniqueness of the solution of an inverse problem for determining the right-hand side of an elliptic equation*, Differ. Uravn., **18**:8 (1982), 1450–1453.
- [13] S.G. Bychkov. *Methods of processing and interpretation of gravimetric observations in solving problems of oil and gas geology*, UrO RAN, 2010.
- [14] A.G. Yagola, V.N. Titarenko, Y. Wang, I.E. Stepanova, *Inverse problems and methods of their solution. Applications to geophysics*, BKL Publishers, Moscow, 2021.
- [15] P.S. Martyshko, I.V. Ladovskii, D.D. Byzov, *Solution of the gravimetric inverse problem using multidimensional grids*, Doklady Earth Sciences, **450**:2 (2013), 666–671.
- [16] V.N. Strakhov, *Inverse problem of the logarithmic potential for a contact surface*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **200**:4 (1971), 817–820.
- [17] I.V. Boykov, N.V. Moiko, *On an iterative method for solving the inverse problem of gravimetry for a contact surface*, Izvestiya. Physics of the Solid Earth, **35**:2 (1999), 133–137.
- [18] V. Vasin, G. Skorik, *Iterative processes of gradient type with applications to gravimetry and magnetometry inverse problems*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **18**:8 (2011):855–876.
- [19] P.S. Martyshko, V.E. Misilov, E.N. Akimova, *Solving the structural inverse gravity problem by the modified gradient methods*, Izvestiya, Physics of the Solid Earth, **52**:5 (2016), 704–708.
- [20] V Isakov, S Leung, and J Qian. *A fast local level set method for inverse gravimetry*, Communications in Computational Physics, **10**:4 (2011), 1044–1070.
- [21] V. Isakov, S. Leung, J. Qian, *A three-dimensional inverse gravimetry problem for ice with snow caps*, Inverse Problems & Imaging, **7**:2 (2013), 523–544.
- [22] W. Lu, J. Qian, *A local level-set method for 3d inversion of gravity-gradient data*, Geophysics, **80**:1 (2015), G35–G51.
- [23] M. Burger, *A level set method for inverse problems*, Inverse Problems, **17**:5 (2001), 1327–1355.

- [24] M. Burger, S.J. Osher, *A survey on level set methods for inverse problems and optimal design*, European journal of applied mathematics, **16**:2 (2005), 263–301.
- [25] P.A. Pulatov, *Numerical solution of gravity and magnetic exploration problems*, PhD thesis, Moscow State University, 1984.
- [26] V. Isakov, *Inverse source problems*, American Mathematical Soc., 1990.
- [27] F. Hettlich, W. Rundell, *Iterative methods for the reconstruction of an inverse potential problem*, Inverse Problems, **12**:3 (1996), 251–266.
- [28] F. Hettlich, W. Rundell, *Recovery of the support of a source term in an elliptic differential equation*, Inverse Problems, **13**:4 (1997), 959.
- [29] K. Ito, K. Kunisch, Z. Li *Level-set function approach to an inverse interface problem*, Inverse problems, **17**:5 (2001), 1225.
- [30] K. Ito, J.-C. Liu, *Recovery of inclusions in 2d and 3d domains for poisson's equation*, Inverse Problems, **29**:7 (2013), 075005.
- [31] A. Canelas, A. Laurain, A.A. Novotny, *A new reconstruction method for the inverse potential problem*, Journal of Computational Physics, **268** (2014), 417–431.
- [32] V.N. Strakhov, *On the equivalence in the inverse problem of gravimetry at variable mass density*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **236**:2 (1977), 329–331.
- [33] A.A. Samarsky, P.N. Vabishchevich, *Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics*, LKI Publisher, Moscow, 2009.
- [34] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Methods of solving ill-posed problems*, Nauka Publishers, Moscow, 1979.
- [35] F.P. Vasil'ev, *Numerical methods for solving extremal problems*, Nauka Publishers, Moscow, 1988.
- [36] Y. Li, D.W. Oldenburg, *3-d inversion of gravity data*, Geophysics, **63**:1 (1998), 109–119.
- [37] O. Boulanger, M. Chouteau, *Constraints in 3d gravity inversion*, Geophysical prospecting, **49** (2001), 265–280.
- [38] H. Bertete-Aguirre, E. Cherkaev, M. Oristaglio, *Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional*, Geophysical Journal International, **149**:2 (2002), 499–507.
- [39] V.N. Strakhov, *How to solve systems of linear algebraic equations with symmetrical positive semidefinite matrices in the problems of gravimetry and magnetometry*, Izvestiya, Physics of the Solid Earth, **10**:9–10, (2012), 680–683.
- [40] P. Qin, D. Huang, Y. Yuan, M. Geng, J. Liu, *Integrated gravity and gravity gradient 3d inversion using the non-linear conjugate gradient*, Journal of Applied Geophysics, **126** (2016), 52–73.
- [41] M. Rezaie. *3d non-smooth inversion of gravity data by zero order minimum entropy stabilizing functional*, Physics of the Earth and Planetary Interiors, **294** (2019), 106275.
- [42] M. Rezaie, A. Moradzadeh, A.N. Kalate, H. Aghajani, *Fast 3d focusing inversion of gravity data using reweighted regularized lanczos bidiagonalization method*, Pure and Applied Geophysics, **174**:1 (2017), 359–374.
- [43] S. Vatankhah, R.A. Renaut, V.E. Ardestani, *Total variation regularization of the 3-d gravity inverse problem using a randomized generalized singular value decomposition*, Geophysical Journal International, **213**:1 (2018), 695–705.
- [44] Y. Cai, C.-Y. Wang, *Fast finite-element calculation of gravity anomaly in complex geological regions*, Geophysical Journal International, **162**:3 (2005), 696–708.
- [45] J. Nocedal, S. Wright, *Numerical optimization*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [46] R.H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, C. Zhu, *A limited memory algorithm for bound constrained optimization*, SIAM Journal on scientific computing, **16**:5 (1995), 1190–1208.

- [47] C. Zhu, R.H. Byrd, P. Lu, J. Nocedal, *Algorithm 778 : L-bfgs-b : Fortran subroutines for large-scale bound-constrained optimization*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), **23**:4 (1997), 550–560.
- [48] S.G. Nash, *Newton-type minimization via the lanczos method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **21**:4 (1984), 770–788.
- [49] P.E. Farrell, D.A. Ham, S.W. Funke, M.E. Rognes, *Automated derivation of the adjoint of high-level transient finite element programs*, SIAM Journal on Scientific Computing, **35**:4 (2013), C369–C393.
- [50] S.W. Funke, P.E. Farrell. *A framework for automated pde-constrained optimisation*, arXiv preprint arXiv:1302.3894, (2013).
- [51] S.W. Funke, P.E. Farrell, M.D. Piggott, *Tidal turbine array optimisation using the adjoint approach*, Renewable Energy, **63** (2014), 658–673.
- [52] J.S. Dokken, S.K. Mitusch, S.W. Funke, *Automatic shape derivatives for transient PDEs in FEniCS and Firedrake*, arXiv preprint arXiv:2001.10058, (2020).
- [53] D.K. Ivanov, P.N. Vabishchevich, *Numerical solution of a boundary value problem with effective boundary conditions for calculation of gravity*, Mathematical notes of NEFU, **28**:1 (2021), 93–113.
- [54] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*, Elsevier, 2005.

PETR NIKOLAEVICH VABISHCHEVICH
 LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
 STR. KOLMOGOROVA, 1,
 119991, MOSCOW, RUSSIA
 Email address: vab@cs.msu.ru

DULUS KHARLAMPIEVICH IVANOV
 AMMOSOV NORTH-EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
 STR. BELINSKOGO, 58,
 677027, YAKUTSK, RUSSIA
 Email address: ivanov.gx@s-vfu.ru