S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, pp. 1552–1565 (2025) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.094 MSC 35A01, 35D40

ВЯЗКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ С МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

Ал. С. Терсенов, Ар. С. Терсенов

Представлено О.С. Розановой

Abstract: In this article, sufficient conditions are given for the existence of a viscosity solution to the first initial boundary value problem for the equation of porous media type with low order terms.

Keywords: porous media equation, viscosity solution.

1 Введение и основные результаты

Рассмотрим уравнение фильтрации с младшими членами

$$u_t = (u^m)_{xx} + F(t, x, u, u_x) \quad \text{в} \quad \Omega_T = (0, T) \times (-l, l), \quad m > 1, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям Дирихле

$$u(t, -l) = u(t, l) = 0,$$

а также начальному условию

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(-l) = u_0(l) = 0,$$

где функция u_0 непрерывна по Гельдеру с показателем $1/m$:

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq C|x - y|^{\frac{1}{m}}. \qquad (2)$$

Tersenov Al. S., Tersenov Ar. S., Viscosity solutions of porous media type equation with low order terms.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Поступила 3 июля 2025 г., опубликована 10 декабря 2025 г.

Сделав в уравнении (1) замену переменных

$$v = \frac{m}{m-1} u^{m-1},$$

мы получаем уравнение фильтрации для давления $v(t,x)$

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 + G(t,x,v,v_x) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{3}$$

которое удовлетворяет граничным условиям

$$v(t,-l) = v(t,l) = 0, \tag{4}$$

а также начальному условию

$$v(0,x) = v_0(x) = \frac{m}{m-1} u_0^{m-1}(x), \quad v_0(-l) = v_0(l) = 0. \tag{5}$$

Заметим, что из (2) вытекает, что $v_0(x)$ удовлетворяет

$$|v_0(x) - v_0(y)| \leq C_0|x-y|^\alpha, \quad \alpha = \frac{m-1}{m}, \tag{6}$$

с некоторой постоянной C_0. Здесь $G(t,x,v,v_x) = F(t,x,u,u_x)$ при указанной замене переменных. В дальнейшем будем рассматривать задачу (3)–(5), для которой и докажем существование вязкого по Лионсу решения.

Уравнению (3) при $G = 0$ посвящено большое количество работ. Не имея возможности привести полный список соответствующей литературы, отметим лишь монографии [1], [13] и ссылки в них. В случае $G = 0$ были получены оптимальные результаты о гладкости решений по пространственной переменной как задачи Дирихле, так и задачи Коши. В первом случае была доказана непрерывность решения по Гельдеру с показателем $\frac{1}{m}$, во втором – непрерывность решения по Гельдеру с показателем $\frac{1}{m-1}$.

Дадим определение вязкого решения задачи (3)–(5) следуя [14] (см. также [5], [10]).

Определение 1. *Будем говорить, что непрерывная, неотрицательная функция $v(t,x)$ является вязким субрешением (суперрешением) задачи (3)–(5), если*

$$v(t,-l) = 0\,(\geq 0), \quad v(t,l) = 0\,(\geq 0),$$
$$v(0,x) \leq v_0(x)\ (\geq v_0(x)), \quad x \in (-l,l),$$

и для любой функции $\phi(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}(\Omega_T)$ и точек (t,x), $(t_0,x_0) \in \Omega_T$, для которых

$$v(t,x) \leq \phi(t,x)\,\big(\geq \phi(t,x)\big), \quad v(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0),$$

выполняется

$$\phi_t - (m-1)\phi\phi_{xx} - \phi_x^2 - G(t,x,\phi,\phi_x)\Big|_{(t_0,x_0)} \leq 0\ (\geq 0).$$

Вязким решением задачи (3)–(5) является непрерывная, неотрицательная функция $v(t,x)$, которая одновременно является суб- и суперрешением.

Основным результатом статьи является теорема существования вязкого решения задачи (3)–(5) (см. теорему 1) в случае, когда правая часть, в частности, может иметь произвольный полиномиальный рост по производной от решения. Кроме того, доказана непрерывность решения по Гельдеру по переменной x с показателем α (см. лемму 2). С.Н. Кружковым [9] был получен результат о характере непрерывности по t решения линейного параболического уравнения, если априори известен модуль непрерывности по пространственным переменным. Было доказано, что непрерывность решения по Гельдеру по переменной x линейного уравнения с показателем $\sigma \in (0,1]$, влечет непрерывность решения по Гельдеру по переменной t с показателем $\frac{\sigma}{2+\sigma}$. Показатель непрерывности по Гельдеру по переменной t был улучшен Б. Гилдингом [6], где было доказано, что он равен $\frac{\sigma}{2}$. В лемме 3 мы обобщили результат Кружкова–Гилдинга на случай, когда в уравнении присутствует правая часть нелинейная по производной от решения. Отметим, что в случае, если есть оценка максимума модуля градиента решения, результат Кружкова-Гилдинга может быть перенесен и на квазилинейные уравнения. Но, как уже было отмечено выше, такой гладкостью решения уравнения вида (3) не обладают.

Доказательство теоремы существования вязкого решения задачи (3)–(5) проведем методом регуляризации исходной краевой задачи. В связи с этим, отметим работы [2], [11], в которых было доказано существование вязкого решения в случае $G = G(u)$ также с помощью регуляризации.

Предположим, что в (3) функция G удовлетворяет

$$G(t,y,z_1,q) - G(t,x,z_2,q) \geq 0, \tag{7}$$

$$G(t,x,z_1,-q) - G(t,y,z_2,-q) \geq 0 \tag{8}$$

при $t \in [0,T]$, $-l \leq y < x \leq l$, $z_1 < z_2$, $q \geq 0$, а также условиям

$$G(t,x,z,q) \leq 0, \quad z \geq 0,\ q \in \mathbb{R}; \qquad G(t,x,z,0) = 0, \tag{9}$$

при $x \in [-l,l]$, $t \in [0,T]$. Приведем простой пример функции G, удовлетворяющей (7)—(9):

$$G(t,x,z,q) = f(t,z)g(t,q),$$

где $g(t,q) \geq 0$ для любого q, $g(t,0) = 0$, а $f(t,z)$ – невозрастающая по z функция и такая, что $f(t,z) \geq 0$ при $z \leq 0$.

Для того, чтобы доказать существование вязкого решения задачи (3)–(5) с помощью предельного перехода, необходимо получить равномерные относительно параметра регуляризации оценки Гельдера решений регуляризованной задачи. Получение оценки Гельдера по времени базируется на упомянутом выше обобщении результата Кружкова-Гилдинга. В связи с этим будем предполагать, что G удовлетворяет следующему неравенству по переменной q

$$\max_{(t,x)\in\Omega_T, |z|\leq M} |G(t,x,z,q)| \leq \kappa_0(1 + |q|^p), \tag{10}$$

с некоторой постоянной κ_0 и каким-либо фиксированным $p \geq 0$. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Предположим, что функция* $G(t,x,z,q) \in \mathbb{C}^{\frac{\beta}{2},\beta,\beta,\beta}_{t,x,z,q}((0,T)\times(-l,l)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *с некоторым показателем* $\beta \in (0,1)$ *и выполнены условия* (7)–(9), (10). *Тогда существует вязкое решение* $v(t,x)$ *задачи* (3)–(5) *такое, что*

$$|v(t,x)-v(t,y)| \leq C_0|x-y|^\alpha, \quad \alpha = \frac{m-1}{m}, \quad x,y \in [-l,l],\ t \in [0,T],$$

$$|v(t_1,x)-v(t_2,x)| \leq C_1|t_1-t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}, \quad x \in (-l,l),\ t_1,t_2 \in (0,T),$$

где постоянная C_0 *из* (6), *постоянная* C_1 *зависит лишь от* $C_0, \kappa_0, l, \alpha, p$ *и* $d(x) = \min\{|x-l|, |x+l|\}$.

Статья структурирована следующим образом. Второй параграф посвящен получению априорных оценок решения регуляризованной задачи, не зависящих от параметра регуляризации. В третьем параграфе приводится доказательство теоремы 1.

2 Априорные оценки решения регуляризованной задачи

Для доказательства теоремы 1 мы строим последовательность классических решений v_μ следующей регуляризованной задачи, где уравнение (3) остается неизменным

$$v_{\mu t} = (m-1)v_\mu v_{\mu xx} + v_{\mu x}^2 + G(t,x,v_\mu,v_{\mu x}) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{11}$$

краевые условия (4) заменяются условиями

$$v_\mu(t,-l) = v_\mu(t,l) = \mu > 0, \tag{12}$$

а начальное условие (5) принимает вид

$$v_\mu(0,x) = v_{0\mu}(x) \geq \mu, \quad v_{0\mu}(\pm l) = \mu, \tag{13}$$

где функция $v_{0\mu}(x)$ – гладкая функция удовлетворяющая соотношениям

$$|v_{0\mu}(x) - v_{0\mu}(y)| \leq C_0|x-y|^\alpha,$$

$$||v_{0\mu}(x) - v_0(x)||_{\mathbb{C}^\alpha([-l,l])} \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to 0. \tag{14}$$

Дадим для удобства читателя определение классического решения задачи (11)–(13).

Определение 2. *Функцию* $v_\mu(t,x) \in \mathbb{C}^{1,2}_{t,x}(\Omega_T) \cap \mathbb{C}^0(\overline{\Omega}_T)$, *удовлетворяющую уравнению* (11) *в каждой точке области, а также начально краевым условиям* (12), (13), *понимаемым поточечно, будем называть классическим решением задачи* (11)–(13).

В этом параграфе мы получим равномерную по μ оценку максимума модуля решений задачи (11)–(13). Также получим равномерную по μ оценку Гельдера этих же решений.

Рассмотрим задачу (11)–(13) и, для простоты, в дальнейших выкладках опустим μ у функции v_μ, положив $v(t,x) = v_\mu(t,x)$, $v_0(x) = v_{0\mu}(x)$. В новых обозначениях задача (11)–(13) принимает вид

$$v_t = (m-1)vv_{xx} + v_x^2 + G(t,x,v,v_x) \quad \text{в} \quad \Omega_T, \tag{15}$$

$$v(t,-l) = v(t,l) = \mu > 0, \tag{16}$$

$$v(0,x) = v_0(x) \geq \mu, \quad v_0(\pm l) = \mu, \tag{17}$$

где $v_0(x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая соотношению

$$|v_0(x) - v_0(y)| \leq C_0|x-y|^\alpha, \tag{18}$$

где постоянная C_0 из (6). Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для любого классического решения задачи* (15)–(17) *в* $\overline{\Omega}_T$ *верны оценки*

$$\mu \leq v(t,x) \leq C_0(l-x)^\alpha + \mu, \tag{19}$$

$$\mu \leq v(t,x) \leq C_0(l+x)^\alpha + \mu. \tag{20}$$

Доказательство. Заметим, что доказательство левого неравенства в (19), (20) вытекает из принципа максимума, примененного к задаче (15)–(17).

Рассмотрим функцию $h = C_0(l+x)^\alpha$, $|x| < l$. Напомним, что $\alpha = \frac{m-1}{m} > 0$. Легко видеть, что $h' > 0$, $h'' < 0$. Функция h удовлетворяет уравнению

$$(m-1)hh_{xx} - h_t = -h_x^2, \tag{21}$$

В то же время из (15) следует

$$(m-1)vv_{xx} - v_t = -v_x^2 - G(t,x,v,v_x), \tag{22}$$

откуда, вычитая (21) из (22), для функции

$$w(t,x) = v(t,x) - h(l+x) - \mu,$$

получаем

$$Lw \equiv (m-1)vw_{xx} - w_t + (m-1)h_{xx}w =$$
$$h_x^2 - v_x^2 - \mu(m-1)h_{xx} - G(t,x,v,v_x) \geq h_x^2 - v_x^2 - G(t,x,v,v_x). \tag{23}$$

Предположим, что функция w достигает положительного максимума в некоторой точке $(t_0,x_0) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$, где Γ_T – параболическая граница области Ω_T. В точке (t_0,x_0) выполнены соотношения

$$w > 0, \quad w_{xx} \leq 0, \quad w_t \geq 0, \quad v > 0, \quad h_{xx} < 0,$$

что влечет за собой неравенство $Lw\Big|_{(t_0,x_0)} < 0$. В то же время, в точке (t_0,x_0) имеем $w_x = 0$. Откуда, используя (9), вытекает, что в точке (t_0,x_0)

$$v > h, \quad v_x = h_x, \quad v_x^2 = h_x^2, \quad G \leq 0.$$

Таким образом, из (23) получаем

$$Lw\Big|_{(t_0,x_0)} \equiv (m-1)vw_{xx} + (m-1)h_{xx}w - w_t\Big|_{(t_0,x_0)} \geq 0.$$

Это противоречит тому, что функция w достигает положительного максимума в $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$.

Рассмотрим w на Γ_T. Заметим, что из согласованности граничных и начальных условий рассматриваемой задачи, вытекает $v(0,-l) = v_0(-l) = \mu$, откуда при $t = 0$ имеем

$$w(0,x) = v_0(x) - (l+x)^\alpha - \mu = v_0(x) - v_0(-l) - (l+x)^\alpha \leq 0,$$

в силу (18). При $x = \pm l$ получаем

$$w(t,-l) = 0, \quad w(t,l) = -h(2l) < 0.$$

Следовательно,

$$v(t,x) \leq h(l+x) + \mu = (l+x)^\alpha + \mu.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\tilde{w}(t,x) = v(t,x) - h(l-x) - \mu.$$

Применяя к функции $\tilde{w}$ дословно все рассуждения, которые были проведены выше для функции w, легко показать, что она не может достигать положительного максимума внутри $\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$. Очевидно

$$\tilde{w}(0,x) = v_0(x) - (l-x)^\alpha - \mu = v_0(x) - v_0(l) - (l-x)^\alpha \leq 0.$$

При $x = \pm l$ получаем $\tilde{w}(t,-l) = -h(2l) < 0, \quad \tilde{w}(t,l) = 0$, следовательно,

$$v(t,x) \leq h(l-x) + \mu = (l-x)^\alpha + \mu.$$

□

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (7)–(9)*. Тогда для любого классического решения задачи* (15)–(17) *верна оценка*

$$|v(t,x) - v(t,y) \leq C_0|x-y|^\alpha \quad \text{для всех } x,y \in [-l,l]. \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (15) в точках (t,x) и (t,y)

$$v_t(t,x) = (m-1)v(t,x)v_{xx}(t,x) + v_x^2(t,x) + G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)), \tag{25}$$

$$v_t(t,y) = (m-1)v(t,y)v_{yy}(t,y) + v_y^2(t,y) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)). \tag{26}$$

Вычитая (26) из (25), получим, что функция

$$V(t,x,y) = v(t,x) - v(t,y)$$

удовлетворяет следующему соотношению

$$L_1V \equiv (m-1)v(t,x)V_{xx} + (m-1)v(t,y)V_{yy} - V_t =$$

$$v_y^2(t,y) - v_x^2(t,x) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)) - G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)).$$

Предположим, что $x > y$ и рассмотрим функцию $h(x-y) = C_0(x-y)^\alpha$. Заметим, что

$$h_{xx} = h'', \quad h_{yy} = h'', \quad h_x = h', \quad h_y = -h'.$$

Откуда вытекает, что

$$L_1 h(x-y) = (m-1)v(t,x)h_{xx} + (m-1)v(t,y)h_{yy} - h_t =$$
$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2 v(t,x) + \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2 v(t,y) = \frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2(v(t,x)+v(t,y)).$$

Для разности $W = V - h$ будем иметь

$$L_1 W \equiv (m-1)v(t,x)W_{xx} + (m-1)v(t,y)W_{yy} - W_t =$$
$$v_y^2(t,y) - v_x^2(t,x) + G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)) - G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)) -$$
$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2(v(t,x)+v(t,y)). \tag{27}$$

Рассмотрим функцию W в области

$$P = \{(t,x,y) : 0 < t < T, y < x, |x| < l, |y| < l\}.$$

Предположим, что W достигает своего положительного максимума в некоторой точке $(t_0,x_0,y_0) \in \overline{P} \setminus \Gamma$, где Γ – параболическая граница P. Тогда в этой точке $W_x(t_0,x_0,y_0) = W_y(t_0,x_0,y_0) = 0$. Как следствие, получаем $v_x(t_0,x_0) = v_y(t_0,y_0)$. Отметим также, что $W(t_0,x_0,y_0) > 0$, что влечет за собой $v(t_0,x_0) > v(t_0,y_0) > 0$. Учитывая вышеизложенное, а также (7), получаем из (27)

$$L_1 W\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} = v_y^2(t_0,y_0) - v_x^2(t_0,x_0) +$$
$$G(t_0,y_0,v(t_0,y_0),h'(x_0-y_0)) - G(t_0,x_0,v(t_0,x_0),h'(x_0-y_0)) -$$
$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h(x_0-y_0)}h'^2(x_0-y_0)(v(t_0,x_0)+v(t_0,y_0)) > 0 \tag{28}$$

поскольку $1 - 1/\alpha < 0$. С другой стороны в точке положительного максимума

$$L_1 W\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} \equiv (m-1)v(t,x)W_{xx} + (m-1)v(t,y)W_{yy} - W_t\Big|_{(t_0,x_0,y_0)} \le 0,$$

что противоречит (28). Таким образом, функция W не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим теперь W на Γ. При $t = 0$

$$W(0,x,y) = v_0(x) - v_0(y) - h(x-y) \le 0,$$

в силу (18). Из леммы 2 вытекают следующие два неравенства

$$W(t,l,y) = \mu - v(t,y) - h(l-y) \le 0, \quad t \in (0,T), \quad y \in [-l,l],$$
$$W(t,x,-l) = v(t,x) - \mu - h(x+l) \le 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in [-l,l].$$

Из трех последних неравенств получаем, что

$$W\Big|_{\overline{P}} \le 0$$

и, как следствие,

$$v(x) - v(y) \le h(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}. \tag{29}$$

Аналогично, вычитая (25) из (26), для $\widehat{W} = v(t,y) - v(t,x) - h(x-y)$ будем иметь

$$L_1\widehat{W} \equiv (m-1)v(t,x)\widehat{W}_{xx} + (m-1)v(t,y)\widehat{W}_{yy} - \widehat{W}_t =$$
$$v_x^2(t,x) - v_y^2(t,y) + G(t,x,v(t,x),v_x(t,x)) - G(t,y,v(t,y),v_y(t,y)) -$$
$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h}h'^2(v(t,x)+v(t,y)) \quad \text{в} \quad P. \tag{30}$$

Предположим, что $\widehat{W}$ достигает своего положительного максимума в некоторой точке $(t_1,x_1,y_1) \in \overline{P}\backslash\Gamma$. Тогда $v_x(t_1,x_1) = v_y(t_1,y_1) = -h'(x_1 - y_1) < 0$. Отметим также, что $\widehat{W}(t_0,x_0,y_0) > 0$, что влечет за собой $0 < v(t_0,x_0) < v(t_0,y_0)$. Учитывая вышеизложенное, а также (8), получаем из (30)

$$L_1\widehat{W}\Big|_{(t_1,x_1,y_1)} = v_x^2(t_1,x_1) - v_y^2(t_1,y_1) +$$
$$G(t_1,x_1,v(t_1,x_1),-h'(x_1-y_1)) - G(t_1,y_1,v(t_1,y_1),-h'(x_1-y_1)) -$$
$$\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{h(x_1-y_1)}h'^2(x_1-y_1)\,(v(t_1,x_1)+v(t_1,y_1)) > 0. \tag{31}$$

С другой стороны, в точке положительного максимума

$$L_1\widehat{W}\Big|_{(t_1,x_1,y_1)} = (m-1)v(t,x)\widehat{W}_{xx} + (m-1)v(t,y)\widehat{W}_{yy} - \widehat{W}_t\Big|_{(t_1,x_1,y_1)} \le 0,$$

что противоречит (31). Таким образом, функция $\widehat{W}$ не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим теперь $\widehat{W}$ на Γ. При $t = 0$

$$\widehat{W}(0,x,y) = v_0(y) - v_0(x) - h(x-y) \le 0,$$

в силу (18). Из Леммы 2 вытекают следующие два неравенства

$$\widehat{W}(t,l,y) = v(t,y) - \mu - h(l-y) \le 0, \quad t \in (0,T), \quad y \in [-l,l],$$
$$\widehat{W}(t,x,-l) = \mu - v(t,x) - h(x+l) \le 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in [-l,l].$$

Из трех последних неравенств вытекает

$$\widehat{W}\Big|_{\overline{P}} \le 0$$

и, как следствие,

$$v(y) - v(x) \le h(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}. \tag{32}$$

Из (29), (32) вытекает

$$|v(x) - v(y)| \le h(x-y) \quad \text{в} \quad \overline{P}.$$

В силу симметрии переменных x и y, случай $x < y$ исследуется аналогично. В результате мы получаем

$$|v(x) - v(y)| \le h(|x-y|) = C_0|x-y|^{\alpha}$$

при $t \in [0,T]$, $|x| \le l$, $|y| \le l$. Оценка (24) доказана. □

Перейдем теперь к доказательству леммы, которая является обобщением результата Кружкова–Гилдинга, упомянутого во введении.

Лемма 3. *Для любого классического решения v задачи (15)–(17), удовлетворяющего (10), (24), имеет место оценка*

$$|v(t_1,x) - v(t_2,x)| \le C_1 |t_1 - t_2|^{\gamma}, \ \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}, \tag{33}$$

$x \in (-l,l)$, $t_1,t_2 \in (0,T)$, где C_1 зависит от $C_0, \kappa_0, l, \alpha, p$ и $d(x) = \min\{|x-l|, |x+l|\}$.

Доказательство. Фиксируем некоторую точку (t_0,x_0), где $t_0 \in [0, T-\tau]$, с некоторым $0 < \tau < T$ и $x_0 \in (-l,l)$. Рассмотрим параллелепипед

$$\Pi = \{(t,x) : t \in (t_0, t_0+\tau), \ x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)\},$$

где $0 < \rho \le d(x_0) = d$. Обозначим через

$$s = \max_{t \in [t_0, t_0+\tau]} |v(t,x_0) - v(t_0,x_0)|.$$

Заметим, что лемма 1 (при достаточно малых μ) дает оценку

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v \le C_0 l^{\alpha} + 1 = M,$$

Далее для определенности считаем $p > 2$.

Положим

$$\lambda(\rho,s) = K\frac{2s}{\rho^p} + \kappa_0,$$

где p, κ_0 – постоянные из (10), а постоянная K удовлетворяет

$$K > (m+3)Ml^{p-2} + \kappa_0(4M)^{p-1} > 0. \tag{34}$$

Введем функции

$$\theta_1(t,x) = v(t_0,x_0) + \left[C_0\rho^{\alpha} + (t-t_0)\lambda(\rho,s) + \frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2\right],$$

$$\theta_2(t,x) = v(t_0,x_0) - \left[C_0\rho^{\alpha} + (t-t_0)\lambda(\rho,s) + \frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2\right].$$

Из леммы 2 вытекает

$$|v(t_0,x_0) - v(t_0,x)| \le C_0\rho^{\alpha}.$$

Откуда

$$\theta_1(t_0,x) = v(t_0,x_0) + C_0\rho^{\alpha} + \frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2 \ge v(t_0,x_0) + C_0\rho^{\alpha} =$$

$$v(t_0,x_0) - v(t_0,x) + C_0\rho^{\alpha} + v(t_0,x) \ge v(t_0,x).$$

Далее при $|x-x_0| = \rho$ имеем

$$\theta_1(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho} = v(t_0,x_0) + C_0\rho^{\alpha} + (t-t_0)\lambda(\rho,s) + s \ge$$

$$v(t_0,x_0)+C_0\rho^\alpha+s=v(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho}+(v(t_0,x_0)-v(t,x_0)+s)+$$
$$(v(t,x_0)-v(t,x))\Big|_{|x-x_0|=\rho}+C_0\rho^\alpha\geq v(t,x)\Big|_{|x-x_0|=\rho}.$$

Таким образом,

$$\theta_1(t,x)\geq v(t,x)\ \text{ на параболической границе области }\ \Pi. \tag{35}$$

Рассмотрим линейный оператор

$$\mathcal{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}-(m-1)v\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Очевидно, $\mathcal{L}(\theta_1)=\lambda(\rho,s)-(m-1)v\frac{2s}{\rho^2}$. Для $\tilde\theta=\theta_1-v$, получаем

$$\mathcal{L}(\tilde\theta)\equiv\tilde\theta_t-(m-1)v\tilde\theta_{xx}=\lambda(\rho,s)-(m-1)v\frac{2s}{\rho^2}-v_x^2-G(t,x,v,v_x). \tag{36}$$

Предположим, что в некоторой точке $(\tilde t_0,\tilde x_0)\in\Pi$ функция $\tilde\theta$ достигает отрицательного минимума. Тогда в этой точке мы имеем

$$\tilde\theta_x\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\theta_{1x}-v_x\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)-v_x(\tilde t_0,\tilde x_0)=0,$$
$$\tilde\theta_{xx}(\tilde t_0,\tilde x_0)\geq 0,\quad \tilde\theta_t(\tilde t_0,\tilde x_0)\leq 0,$$

и, как следствие равенства (36), получаем, что

$$\tilde\theta_t-(m-1)v\tilde\theta_{xx}\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}=\lambda(\rho,s)-(m-1)v(\tilde t_0,\tilde x_0)\frac{2s}{\rho^2}-$$
$$\left(\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)^2-G\left(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)\geq$$
$$K\frac{2s}{\rho^p}+\kappa_0-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right)^2-$$
$$G\left(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0)\right). \tag{37}$$

Здесь мы использовали то, что $v\leq M$ и $\lambda(\rho,s)=K\frac{2s}{\rho^p}+\kappa_0$. Из (10) следует что

$$\left|G(\tilde t_0,\tilde x_0,v(\tilde t_0,\tilde x_0),\frac{2s}{\rho^2}(\tilde x_0-x_0))\right|\leq\kappa_0\left(1+\left(\frac{2s}{\rho^2}|\tilde x_0-x_0|\right)^p\right). \tag{38}$$

Из (37), (38), учитывая, что $|\tilde x_0-x_0|\leq\rho<l$, $s\leq 2M$, получаем

$$\mathcal{L}(\tilde\theta)\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}\geq K\frac{2s}{\rho^p}-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho}\right)^2-\kappa_0\left(\frac{2s}{\rho}\right)^p=$$
$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m-1)M\rho^{p-2}-2s\rho^{p-2}-\kappa_0(2s)^{p-1}\right)\geq$$
$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m-1)Ml^{p-2}-4Ml^{p-2}-\kappa_0(4M)^{p-1}\right)=$$

$$\frac{2s}{\rho^p}\left(K-(m+3)Ml^{p-2}-\kappa_0(4M)^{p-1}\right)>0, \tag{39}$$

в силу (34). Что невозможно в точке отрицательного минимума.

В случае, когда $p\in[0,2]$ надо положить

$$\lambda(\rho,s)=K\frac{2s}{\rho^2}+\kappa_0, \tag{40}$$

где постоянная K выбрана так, что

$$K>(m+3)M+\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}. \tag{41}$$

Тогда неравенство, аналогичное (39), будет иметь вид

$$\mathcal{L}(\tilde\theta)\Big|_{(\tilde t_0,\tilde x_0)}\geq K\frac{2s}{\rho^2}-(m-1)M\frac{2s}{\rho^2}-\left(\frac{2s}{\rho}\right)^2-\kappa_0\left(\frac{2s}{\rho}\right)^p=$$
$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m-1)M-2s-\kappa_0(2s)^{p-1}\rho^{2-p}\right)\geq$$
$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m-1)M-4M-\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}\right)=$$
$$\frac{2s}{\rho^2}\left(K-(m+3)M-\kappa_0(4M)^{p-1}l^{2-p}\right)>0,$$

в силу (41). Таким образом, функция $\tilde\theta$ не может достигать отрицательного минимума в точке $(\tilde t_0,\tilde x_0)$. Принимая во внимание (35), мы заключаем, что

$$\theta_1(t,x)\geq v(t,x)\ \text{ в }\ \Pi.$$

Аналогично получаем неравенство

$$\theta_2(t,x)\leq v(t,x)\ \text{ в }\ \Pi.$$

Откуда уже сразу вытекает, что

$$|v(t,x)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+(t-t_0)\lambda(\rho,s)+\frac{s}{\rho^2}(x-x_0)^2,$$

и

$$|v(t,x_0)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+\tau\lambda(\rho,s),\quad \tau=t-t_0.$$

Следовательно,

$$s=\max_{t\in[t_0,t_0+\tau]}|v(t,x_0)-v(t_0,x_0)|\leq C_0\rho^\alpha+\tau\lambda(\rho,s)$$

и эта оценка имеет место для любого $\rho\in(0,d]$. При $p>2$ имеем

$$C_0\rho^\alpha+\tau\lambda(\rho,s)=C_0\rho^\alpha+\tau\left(2Ks\rho^{-p}+\kappa_0\right)\leq\widetilde K\left[\rho^\alpha+\tau\left(1+s\rho^{-p}\right)\right],$$

где $\widetilde K=max\{C_0,M,2K\}$. Таким образом, мы получаем следующее неравенство

$$s\leq\widetilde K\left[\rho^\alpha+\tau\left(1+s\rho^{-p}\right)\right]. \tag{42}$$

Пусть $\tau\leq d^{\alpha+p}\,(2M)^{-1}$. Очевидно,

$$(\tau s)^{\frac{1}{\alpha+p}}\leq(\tau 2M)^{\frac{1}{\alpha+p}}\leq d$$

(напомним, что $s \leq 2M$). Следовательно, из (42), для $\rho_* = (\tau s)^{\frac{1}{\alpha+p}}$ получаем

$$s \leq \widetilde{K}\left[\rho_*^\alpha + \tau + \tau s \rho_*^{-p}\right] = \widetilde{K}\left[(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} + \tau + \tau s (\tau s)^{\frac{-p}{\alpha+p}}\right] =$$

$$\widetilde{K}\left[\tau + 2(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}\right]. \tag{43}$$

Рассмотрим два случая: $\tau \leq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$ и $\tau \geq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$. В первом случае из (43) мы получаем

$$s \leq 3\widetilde{K}(\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}},$$

откуда

$$s \leq \left(3\widetilde{K}\right)^{\frac{\alpha+p}{p}} \tau^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Во втором случае из $\tau \geq (\tau s)^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}$ следует, что

$$s \leq \tau^{\frac{p}{\alpha}} \leq \tau^{\frac{\alpha}{p}}$$

при $0 < \tau < 1$, так как $\frac{p}{\alpha} > \frac{\alpha}{p}$.

Предположим теперь, что $\tau \geq d^{\alpha+p}\,(2M)^{-1}$. Тогда

$$|v(t_0+\tau, x_0) - v(t_0, x_0)| \leq 2M = \frac{2M}{\tau^{\frac{\alpha}{p}}}\tau^{\frac{\alpha}{p}} \leq (2M)^{\frac{\alpha+p}{p}} d^{-\frac{\alpha+p}{p}\alpha}\tau^{\frac{\alpha}{p}}.$$

Легко видеть, что в случае $p \in [0,2]$ и выборе функции $\lambda(\rho, s)$ из (40), показатель Гельдера по переменной t будет равен $\frac{\alpha}{2}$.

Таким образом, мы доказали, что имеет место оценка (33) с постоянной C_1

$$C_1 = \max\left\{1, (2M)^{\frac{\alpha+p}{p}} d^{-\alpha\frac{\alpha+p}{p}}, \left(3\tilde{K}^{\frac{\alpha+p}{p}}\right)\right\}.$$

□

3 Доказательство теоремы 1.

Возвращаясь к прежним обозначениям $v = v_\mu$, рассмотрим задачу (11)–(13). Заметим, что при выполнении условия $G(t, x, v_\mu, 0) = 0$, для любого классического решения задачи (11)–(13) имеет место оценка $v_\mu \geq \mu$, что позволяет применить результаты, полученные в [12], о существовании классического решения указанной задачи при выполнении условий (7)–(9) в предположении, что функция $G(t, x, v, q) \in \mathbb{C}^{\frac{\nu}{2};\nu}_{t;x,v,q}((0,T) \times (-l,l) \times \mathbb{R}^2)$ с некоторым показателем $\nu \in (0,1)$ (см. теорему 1 в [12]).

Как известно [5], гладкая функция является вязким решением уравнения тогда и только тогда, когда она удовлетворяет ему в классическом смысле. Таким образом, классическое решение v_μ задачи (11)–(13) является также и вязким решением той же самой задачи. Сформулируем следующую лемму об аппроксимации [5], [8], имеющую место в теории вязких решений, применительно к нашему случаю.

Лемма 4. *Рассмотрим задачу (3)–(5). Предположим, что существует семейство вязких равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных, на любом компактном подмножестве области Ω_T, решений v_μ задачи (11)–(13), причем выполнено условие (14). Тогда существует непрерывное в Ω_T вязкое решение v задачи (3)–(5) такое, что*

$$v = \lim_{\mu \to 0} v_\mu.$$

Для того, чтобы применить лемму об аппроксимации, достаточно получить равномерные по μ оценки Гельдера. Из лемм 1,2 мы получаем равномерную по μ оценку Гельдера по переменной x:

$$|v_\mu(t,x) - v_\mu(t,y)| \leq C_0|x-y|^\alpha \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \quad x,y \in [-l,l]. \tag{44}$$

Из леммы 3 следует равномерная по μ оценка Гельдера по переменной t

$$|v_\mu(t_1,x) - v_\mu(t_2,x)| \leq C_1|t_1-t_2|^\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\max\{2,p\}}, \tag{45}$$

$x \in (-l,l)$, $t_1, t_2 \in (0,T)$. Таким образом, последовательность v_μ классических решений задачи (11)–(13) принадлежит пространству $\mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}(\Omega_T)$, причем постоянные Гельдера как по времени так и по пространственной переменной не зависят от μ. Из (44), (45), переходя к подпоследовательности (оставляя те же обозначения), уже легко вытекает равномерная сходимость $v_\mu \rightrightarrows v \in \mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}$ при $\mu \to 0$ на любом компактном множестве области Ω_T. Заметим, что из представления краевых и начальных условий в (12), (13) легко следует их равномерная сходимость при $\mu \to 0$ к начально краевым условиям (4), (5). Теперь уже, используя лемму об аппроксимации, получаем, что $v = \lim_{\mu\to 0} v_\mu$ есть вязкое решение задачи (3)–(5). Из полученных выше оценок вытекает, что $v \in \mathbb{C}^{\gamma,\alpha}_{t,x}(\Omega_T)$.

Замечание 1. *Что касается вопросов единственности, отметим работы [3], [4] в случае $G = 0$, в которых было дано новое определение вязкого решения, позволившего преодолеть проблему отсутствия монотонности дифференциального уравнения (3) по переменной v. Как известно, в теории вязких решений монотонность дифференциального уравнения по решению является ключевым условием, позволяющим доказать теорему существования и единственности методом Ишии–Перрона [7].*

References

[1] S.N. Antontsev, J.I. Díaz, S.I. Shmarev, *Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **48**, Birkhäuser, Basel, 2002. Zbl 0988.35002

[2] Ph. Bénilan, M. Maliki, *Approximation de la solution de viscositè d'un problemè d'Hamilton-Jacobi [Approximation of the viscosity solution of a Hamilton-Jacobi problem]*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **9**:2, (1996), 369–383. Zbl 0873.35042

[3] C. Brändle, J.L. Vázquez, *Viscosity solutions for quasilinear degenerate parabolic equations of porous medium type*, Indiana Univ. Math. J., **54**:3 (2005), 817–860. Zbl 1084.35033

[4] L. Caffarelli, J.L. Vazquez, *Viscosity solutions for the porous medium equation*, in Giaquinta, M. (ed.) et al., *Differential equations: La Pietra 1996. Conference on differential equations marking the 70th birthdays of Peter Lax and Louis Nirenberg*, Am. Math. Soc., Proc. Sympos. Pure Math., **65**, AMS, Providence, 1999, 13–26. Zbl 0929.35072

[5] M.G. Crandall, H. Ishii, P.L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser., **27**:1 (1992), 1–67. Zbl 0755.35015

[6] B.H. Gilding, *Hölder continuity of solutions of parabolic equations*, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., **13**:1, (1976), 103–106. Zbl 0319.35045

[7] H. Ishii, P.L. Lions, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Differ. Equ., **83**:1 (1990), 26–78. Zbl 0708.35031

[8] N. Katzourakis, *An introduction to viscosity solutions for fully nonlinear PDE with applications to calculus of variations in L^∞*, Springer briefs in mathematics, Springer, Cham, 2015. Zbl 1326.35006

[9] S.N. Kruzhkov, *Quasilinear parabolic equations and systems with two independent variables*, Topics in modern mathematics, Petrovskii Semin., **5**, Consultant Bureau, New York, 1985, 275–342. Zbl 0669.35054

[10] P. Juutinen, *On the definition of viscosity solutions for parabolic equations*, Proc. Am. Math. Soc., **129**:10, (2001), 2907–2911. Zbl 0979.35071

[11] M. Maliki, *Viscosity solution for a degenerate parabolic problem*, in Benkirane, Abdelmoujib (ed.) et al., *Partial differential equations*, Lect. Notes Pure Appl. Math., **229**, Marcel Dekker, New York, 2002, 249–258. Zbl 0999.35038

[12] Al.S. Tersenov, Ar.S. Tersenov, *On the Bernstein-Nagumo's condition in the theory of nonlinear parabolic equations*, J. Reine Angew. Math., **572**, (2004), 197–217. Zbl 1053.35061

[13] J.L. Vázquez, *The porous medium equation. Mathematical theory*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2007. Zbl 1107.35003

[14] L. Wang, *On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I*, Comm. Pure. Appl. Math., **45**:1 (1992), 27–76. Zbl 0832.35025

Alkis Savvich Tersenov
Department of Mathematics and Applied Mathematics, University of Crete,
Vasilika Voutes,
70013, Heraklion, Greece
Email address: tersenov@uoc.gr

Aris Savvich Tersenov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: aterseno@math.nsc.ru