

**ОПТИМАЛЬНЫЕ ЦИРКУЛЯНТНЫЕ ГРАФЫ С
ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КОНТУРОМ УКЛАДКИ НА
ПЛОСКОСТИ****Э.А. МОНАХОВА** *Представлено А.В. Пяткиным*

Abstract: In the literature, five families of optimal circulant graphs of degree four with a rectangular L-shape of tessellation of graphs on the plane Z^2 are known. The rectangular (mesh-connected) pattern of tessellation of the graph of intermodular connections allows an efficient arrangement of chips in networks on a chip – with a minimum number of intersections of connections and their minimum length, independent of the number of nodes, and also an optimal algorithm for finding the shortest paths in terms of the number of operations. In this paper, a new method for obtaining families of circulants with given scalability and optimality properties is found. Six series of new infinite families of optimal circulant graphs of degree four with a rectangular L -shape of laying graphs on the plane and a minimum diameter are obtained. The domains of existence of such series are considered. Analytical formulas for specifying the parameters of laying families of graphs on the plane are found, which can be used in organizing routing algorithms in networks-on-chip.

Keywords: optimal circulant graphs, diameter, rectangular L -shape of tessellation of circulants, networks-on-chip.

MONAKHOVA, E. A., DEGREE FOUR OPTIMAL CIRCULANT GRAPHS WITH RECTANGULAR L-SHAPES.

© 2025 МОНАХОВА Э.А.

Работа поддержана Российским научным фондом (грант 25-11-00248, <https://rscf.ru/en/project/25-11-00248/>).

Поступила 3 июня 2025 г., опубликована 10 декабря 2025 г.

1 Введение

С развитием технологической базы наряду с применением циркулянтных графов в различных областях информатики [1, 2, 3, 4, 5] и теоретических исследованиях [6, 7, 8] актуальным становится их использование в качестве топологии сетей на кристалле (networks-on-chip) [9, 10, 11]. Эта тенденция обусловлена их лучшими структурными показателями при большом количестве узлов, такими, как диаметр, среднее расстояние и высокая масштабируемость, по сравнению со стандартными топологиями сетей на кристалле (решётками, двумерными торами, гиперкубами). Дадим определение циркулянтного графа степени четыре. Пусть $N, 1 < s_1 < s_2 < N/2$ – целые числа. Неориентированный граф $C(N; s_1, s_2)$ с множеством вершин $V = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и множеством рёбер $E = \{(i, j) : i - j \equiv \pm s_m \pmod{N}, m = 1, 2\}$ называется циркулянтным графом (циркулянтной сетью) размерности два, множество $\{s_1, s_2\}$ – образующими графа, N – порядком. Циркулянт связан, если $(N, s_1, s_2) = 1$. На рис. 1 изображён циркулянтный граф $C(10; 1, 4)$. Диа-

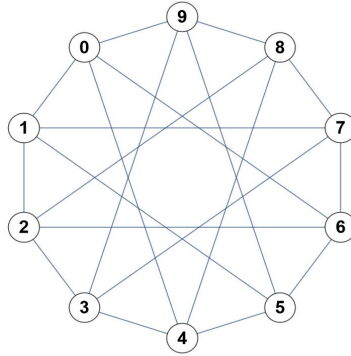


Рис. 1. Циркулянтный граф $C(10; 1, 4)$

метр графа $d(N; s_1, s_2) = \max_{i, j \in V} d(i, j)$, где $d(i, j)$ – длина кратчайшего пути между вершинами i и j . Известна точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов любого порядка $N > 4$ [1, 2, 12]:

$$D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil. \quad (1)$$

Среднее расстояние графа $D_{av}(N; s_1, s_2) = (1/(N(N-1))) \sum_{i, j} d(i, j)$. При равном количестве узлов и линий связи в сетях наилучшими по различным критериям функционирования являются *оптимальные* топологии с минимумом диаметра (и/или среднего расстояния) и, соответственно, с минимумом максимальной (и/или средней) структурной задержки в сети и максимальной связностью [3].

Объектом исследования в настоящей работе являются семейства оптимальных по диаметру циркулянтных графов степени четыре, которые

могут быть представимы в виде решётчатых структур – прямоугольных L -контуров [13, 14] плотной укладки графов на плоскости Z^2 . Построение таких структур в классе циркулянтов и их применение в качестве сетей связи исследовались в работах [5, 15, 16, 17, 18, 19]. Такие структуры подходят для практической реализации в качестве топологий сетей на кристалле, благодаря возможности оптимального размещения компонентов в кристалле и эффективной организации маршрутизации. В настоящей работе в разделе 2 вводятся основные определения и даётся обзор известных работ по построению семейств таких структур. В разделах 3 и 4 приводятся результаты поиска новых аналитически задаваемых семейств оптимальных циркулянтов степени четыре с прямоугольным контуром, объединённых в шесть различных серий, и доказывается их корректность. В разделе 5 исследуется свойство масштабируемости по диаметру найденных семейств оптимальных графов с прямоугольным контуром.

2 Теоретические основы исследования

В [4, 12, 15] получено аналитическое описание семейства двумерных циркулянтов, оптимальных по диаметру и среднему расстоянию для любого числа вершин. Ниже даётся их описание, представленное в [15]:

Теорема 1. *Для любого целого $N > 5$ оптимальный двумерный циркулянт порядка N есть*

$$C(N; s_2 - 1, s_2), \text{ где } s_2 = \lceil \sqrt{N/2} \rceil. \quad (2)$$

Далее будем использовать также другое представление графов семейства (2), полученное в [12], с образующими, заданными в виде функций от диаметра $d > 1$:

$$C(N; s_1, s_2) = \begin{cases} C(N; d - 1, d), & \text{при } N_{d-1} < N \leq 2d^2, \\ C(N; d, d + 1), & \text{при } 2d^2 < N \leq N_d. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $N_d = 2d^2 + 2d + 1$ – максимально возможное (достижимое) число вершин двумерного циркулянта диаметра d [2]. В [15] графы семейства (2) преобразованы в решётчатые структуры, получившие название Midimew сетей, укладка которых на плоскости представляет собой L -контур (L-shapes) [13, 14] с рёбрами, соединяющими их граничные вершины. Примеры задания циркулянтных графов на плоскости в виде L -контуров с параметрами a, b, p, q и числом вершин $N = ab - pq$ показаны на рис. 2. На рис. 2б представлен L -контур для циркулянта $C(10; 1, 4)$, на рис. 2с – L -контур прямоугольного вида для графа $C(12; 1, 4)$ с $a = 4, b = 3, p = 0, q = 1$. Midimew сети рассматривались в качестве топологии при проектировании суперкомпьютеров с массовым параллелизмом и сетей на кристалле. В [4, 15, 20] для них предложены алгоритмы маршрутизации на основе аналитически вычисляемых векторов кратчайших путей. Для циркулянтов степени четыре известны

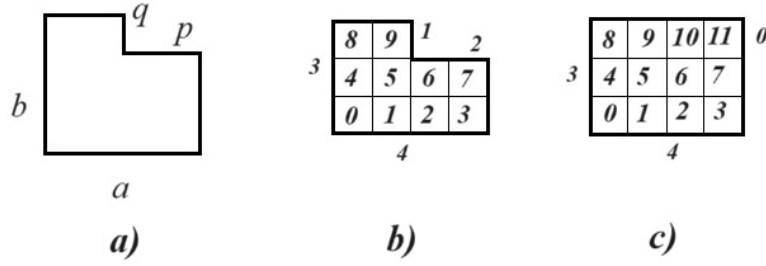


Рис. 2. Параметры L -контуров для циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$: а), б) – общего вида, в) – прямоугольного вида

ТАБЛИЦА 1. Семейства оптимальных графов (2) с прямоугольным контуром укладки на плоскости

Семейства $F_i(d)$	$C(N; s_1, s_2)$	a	b	p	q
$F_1(d)$	$C(2d^2 - d; d - 1, d)$	d	$2d - 1$	0	$d - 1$
$F_2(d)$	$C(2d^2; d - 1, d)$	d	$2d$	0	$d - 1$
$F_3(d)$	$C(2d^2 + d - 1; d, d + 1)$	$d + 1$	$2d - 1$	0	d
$F_4(d)$	$C(2d^2 + d; d, d + 1)$	$2d + 1$	d	$d + 1$	0
$F_5(d)$	$C(2d^2 + 2d; d, d + 1)$	$d + 1$	$2d$	0	d

алгоритмы маршрутизации другого типа, также не требующие таблиц маршрутизации и использующие параметры a , b , p , q плотной укладки графов на плоскости [21].

В [15] для оптимальных графов семейства (2) найдены функции от N , аналитически задающие параметры их представлений на плоскости в виде L -контуров. Это позволило найти для каждого диаметра описания пяти возможных семейств циркулянтов (2) с L -контуром прямоугольного вида, где $N = ab$. Планарное представление графов семейства в виде прямоугольных контуров позволяет эффективно отображать граф решения многих параллельных задач в вычислительную систему и, как показано в [18], имеет минимальное число пересекающихся линий связи и ограниченную длину максимальной из них, не зависящую от размера сети, что является преимуществом при проектировании сетей на кристалле. В табл. 1 даны описания всех пяти известных семейств $F_1(d)$, $F_2(d)$, $F_3(d)$, $F_4(d)$, $F_5(d)$ оптимальных циркулянтных графов в виде функций от диаметра d и найденные параметры a , b , p , q их укладки на плоскости. Нумерация семейств соответствует порядку возрастания значений N . Графы семейств существуют при всех диаметрах $d > 1$.

В [18] для графов семейств $F_i(d)$, $i \in \overline{1, 5}$, разработан метод их трансформации в двумерные решётки, при котором длина самой длинной из пересекающихся связей не растёт с размером сети, а увеличивается на небольшую константу (≤ 5). Таким образом, при предварительно проведённой несложной трансформации графа межмодульных соединений

будут отсутствовать длинные провода в сети на кристалле с большим числом модулей. Аналогичный способ трансформации может быть применён к графам других возможных семейств с прямоугольным контуром укладки на плоскости [16]. Известно также [15, 17] семейство близких к оптимальным циркулянтных графов с L -контуром квадратного вида и числом вершин $N = 2^{2i}$, $i > 2$. Диаметр графов семейства $d = 3\sqrt{N}/4$. Данное семейство нашло применение в [5] в качестве базовой структуры клеточных нейронных сетей при моделировании решения задач для сложных физических процессов.

В настоящей работе решена задача существования и построения новых семейств оптимальных циркулянтных графов степени четыре с минимумом диаметра и прямоугольным контуром укладки на плоскости, и представлен процесс конструирования бесконечных серий таких семейств графов. Найдены аналитические формулы для параметров укладки семейств графов на плоскости, которые могут применяться при организации алгоритмов маршрутизации. Рассмотрены свойства масштабируемости найденных графов.

3 Поиск множества оптимальных циркулянтов степени четыре с прямоугольным контуром

В [15] доказано, что среди Midimew сетей, имеющих одновременно минимальный диаметр и минимально возможное среднее расстояние, нет других семейств с искомым свойством, кроме найденных в табл. 1. Поэтому ослабим обязательное требование минимума среднего расстояния в искомом графе и будем искать нужные семейства среди циркулянтов с минимально возможным диаметром, совпадающим с точной нижней границей (1). Для этого перечислим множество значений числа вершин графов $N = 2d^2 \pm f(d)$, являющихся расширением структур с прямоугольным контуром из табл. 1 и произведением двух сомножителей (здесь $f(d)$ – искомый линейный полином):

$$N = (d \pm k)(2d \pm j) = ab, k \geq 0, j \geq 0, \quad (4)$$

где $d = D(N)$ – диаметр оптимального графа. При этом область изменения параметров k и j при любых $d \geq 1$ ограничена следующим необходимым условием оптимальности графов:

$$2d^2 - 2d + 1 < N(d) \leq 2d^2 + 2d + 1. \quad (5)$$

Одновременное выполнение обеих частей (5) означает существование такого числа d_m (минимального диаметра), при котором функция $N(d)$ при любом $d \geq d_m$ может быть числом вершин оптимального циркулянта с прямоугольным контуром укладки на плоскости. Рассмотрим четыре возможные комбинации знаков в (4):

(а) $N = (d + k)(2d + j) = 2d^2 + (2k + j)d + kj$. Проверка условия (5) $-2 \leq 2k + j \leq 2$ даёт значения $k = 0, j = 0, 1, 2$ и $k = 1, j = 0$ при

ТАБЛИЦА 2. Серии $S_i(d, k)$ новых семейств оптимальных циркулянтов с прямоугольным контуром

S_i	Семейства графов $C(N; s_1, s_2)$	a	b	p	q
S_1	$C(2d^2 - d - 2k^2 + k; d - k, d + k + 1)$	$2d + 2k - 1$	$d - k$	p_1	0
S_2	$C(2d^2 - d - 2k^2 - k; 1, 2d + 2k)$	$d + k$	$2d - 2k - 1$	0	$d - k$
S_3	$C(2d^2 - 2k^2; 1, d^2 - d - k^2 - k)$	$d + k$	$2d - 2k$	0	$d - k - 1$
S_4	$C(2d^2 + d - 2k^2 - k; 1, 2d - 2k)$	$d - k$	$2d + 2k + 1$	0	$d + k + 1$
S_5	$C(2d^2 + d - 2k^2 + k; 1, 2d + 2k)$	$d + k$	$2d - 2k + 1$	0	$d - k + 1$
S_6	$C(2d^2 + 2d - 2k^2 - 2k; d - k, d + k + 1)$	$d + k + 1$	$2d - 2k$	0	$d - k$

$d \geq 1$. Соответственно, имеем три множества значений $N = 2d^2 \subseteq F_2(d)$, $N = 2d^2 + d \subseteq F_4(d)$ и $N = 2d^2 + 2d \subseteq F_5(d)$.

(b) $N = (d - k)(2d + j) = 2d^2 + (j - 2k)d - kj$. Из условия $-1 \leq j - 2k \leq 2$ следует $2k - 1 \leq j \leq 2k + 2$. При $k = 0$ имеем совпадения с N из случая (a). При $k > 0$ получим следующие четыре новых множества значений N :

$$N = 2d^2 + 2d - 2k^2 - 2k \in S_6$$

$$N = 2d^2 + d - 2k^2 - k \in S_4$$

$$N = 2d^2 - 2k^2 \in S_3$$

$$N = 2d^2 - d - 2k^2 + k \in S_1.$$

(c) $N = (d + k)(2d - j) = 2d^2 + (2k - j)d - kj$. Проверка условия $-2 \leq 2k - j \leq 2$ при $k = 0$ даёт значения $j = 0, 1$. Соответственно, имеем два множества значений $N = 2d^2 \subseteq F_2(d)$, $N = 2d^2 - d \subseteq F_1(d)$.

При $k > 0$ имеем $2k - 2 \leq j \leq 2k + 1$. Соответственно, получаем четыре множества значений N (среди них S_2 и S_5 – новые множества):

$$N = 2d^2 + 2d - 2k^2 + 2k \in S_6$$

$$N = 2d^2 + d - 2k^2 + k \in S_5$$

$$N = 2d^2 - 2k^2 \in S_3$$

$$N = 2d^2 - d - 2k^2 - k \in S_2.$$

(d) $N = (d - k)(2d - j) = 2d^2 - (2k + j)d + kj$. Аналогичная проверка выполнения (5) не даёт новых значений N .

Остаётся найти (в случае их существования) соответствующие значения образующих для найденных значений числа вершин оптимальных графов. В результате были получены шесть серий $S_i(d, k)$, $i \in \overline{1, 6}$, значений $N(d, k)$, которые при фиксированных k соответствуют семействам оптимальных циркулянтов с прямоугольным контуром. В табл. 2 приведены описания найденных серий семейств графов $S_i(d, k)$ вместе с образующими s_1, s_2 и параметрами a, b, p, q прямоугольных контуров укладки на плоскости, которым они соответствуют (здесь $p_1 = d + k + 1$). Нумерация серий семейств соответствует порядку возрастания числа вершин входящих в них графов. Для найденных серий в табл. 3 даны области

ТАБЛИЦА 3. Области изменения диаметров для серий $S_i(d, k)$

Серии $S_i(d, k)$	Значения d_m	Диаметры: $d \geq d_m$, область k
$S_1(d, k)$	$2k^2 - k + 2$	$k \geq 1, d \neq (2t+1)k + t, t \geq 1$
$S_2(d, k)$	$2k^2 + k + 2$	$k \geq 1$
$S_3(d, k)$	$k^2 + 2$	$k \geq 0, k \equiv d \pmod{2}$
$S_4(d, k)$	$\lceil \frac{2k^2+k+2}{3} \rceil$	$k \geq 1$
$S_5(d, k)$	$\lceil \frac{2k^2-k+2}{3} \rceil$	$k \geq 1$
$S_6(d, k)$	$\lceil \frac{k^2+k+1}{2} \rceil$	$k \geq 1, d \neq (2t+1)k + t, t \geq 1$

изменения диаметров d графов соответствующих семейств, полученные из условия (5) и условия связности графов (в сериях $S_1(d, k)$, $S_6(d, k)$, где $s_1 \neq 1$, при невыполнении условия $(N, s_1, s_2) = 1$ графы оказываются несвязными). Отметим, что описания семейств в сериях $S_1(d, 1)$, $S_6(d, 1)$ порождают новые оптимальные графы с прямоугольным контуром, не изоморфные описаниям (2) и (3). Для серий $S_i(d, k)$, $i \in \overline{2, 5}$, найдены описания семейств графов с единичной образующей, существующих при любых диаметрах $d \geq d_m$.

Вообще говоря, графы серий $S_4(d, k)$ и $S_5(d, k)$ можно объединить в одну серию общего вида $N = 2d^2 + d - m(m+1)/2$, но с разными параметрами и образующими в зависимости от чётности (нечётности) m , то же самое можно сказать и об объединении серий $S_1(d, k)$ и $S_2(d, k)$.

Следует отметить, что каждая серия содержит неограниченное количество порождаемых семейств оптимальных графов с прямоугольным контуром, но при этом начальный диаметр, с которого начинается новое семейство, каждый раз увеличивается. Визуально графы всех новых серий расположены на линиях значений $N(d)$, параллельных линиям, образованным семействами $F_1(d)$, $F_2(d)$, $F_4(d)$, $F_5(d)$, $F_6(d)$, и сдвинутых влево. Причём, если на каждом диаметре существует только пять семейств из табл. 1, то число графов новых серий из табл. 2 растёт с ростом диаметра. В табл. 4 показан фрагмент (для диаметров $d \leq 14$) порядков графов с прямоугольным контуром укладки на плоскости. Порядки графов новых серий выделены жирным шрифтом, семейств из табл. 1 – курсивом. На некоторых порядках графы новых серий пересекаются с графами семейств $F_i(d)$, но при этом значения образующих у них разные. Все такие случаи совпадений порядков графов отмечены в табл. 4 подчёркиванием. В разделе 3 доказывается корректность описаний новых серий семейств.

4 Доказательство оптимальности графов найденных серий семейств

Докажем, что все графы серий $S_i(d, k)$ из табл. 2 являются оптимальными. Для доказательства нам потребуется понятие l_1 -нормы [22].

Рассмотрим Z^2 – двумерную целочисленную решётку. Зафиксируем точку отсчёта $(x, y) = (0, 0) \in Z^2$. Для точек $(x, y) \in Z^2$ определим

ТАБЛИЦА 4. Порядки графов семейств оптимальных циркулянтов с прямоугольным контуром

d	Порядки графов семейств
2	<u>6</u> , <u>8</u> , <u>9</u> , <u>10</u> , <u>12</u>
3	14 , <u>15</u> , 16 , <u>18</u> , <u>20</u> , <u>21</u> , <u>24</u>
4	26 , <u>28</u> , 30 , <u>32</u> , 33 , <u>35</u> , <u>36</u> , <u>40</u>
5	42 , 44 , <u>45</u> , 48 , <u>49</u> , <u>50</u> , 52 , <u>54</u> , <u>55</u> , 56 , <u>60</u>
6	63 , 64 , <u>65</u> , <u>66</u> , 68 , <u>72</u> , 75 , <u>77</u> , <u>78</u> , 80 , <u>84</u>
7	88 , 90 , <u>91</u> , 95 , 96 , <u>98</u> , 99 , 102 , <u>104</u> , <u>105</u> , <u>112</u>
8	114 , 115 , 117 , 119 , <u>120</u> , 121 , <u>126</u> , <u>128</u> , 130 , 132 , 133 , <u>135</u> , <u>136</u> , 140 , <u>144</u>
9	147 , 150 , 152 , <u>153</u> , 156 , 160 , 161 , <u>162</u> , 165 , 168 , <u>170</u> , <u>171</u> , 176 , <u>180</u>
10	182 , 184 , 187 , 189 , <u>190</u> , 192 , 195 , <u>200</u> , 204 , 207 , <u>209</u> , <u>210</u> , <u>220</u>
11	224 , 225 , 228 , 230 , <u>231</u> , 232 , 238 , 240 , <u>242</u> , 243 , 247 , 250 , <u>252</u> , <u>253</u> , <u>260</u> , <u>264</u>
12	266 , 272 , 273 , 275 , <u>276</u> , 279 , 280 , 285 , <u>288</u> , 290 , 294 , 297 , <u>299</u> , <u>300</u> , <u>308</u> , <u>312</u>
13	315 , 319 , 320 , 322 , 323 , <u>325</u> , 330 , 336 , <u>338</u> , 340 , 341 , 345 , 348 , <u>350</u> , <u>351</u> , <u>352</u> , <u>364</u>
14	368 , 370 , 372 , 375 , 377 , <u>378</u> , 380 , 384 , 385 , 391 , <u>392</u> , 396 , 400 , 403 , <u>405</u> , <u>406</u> , 408 , 416 , <u>420</u>

функцию отображения (помечивания), порождённую укладкой циркулянтного графа $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости Z^2 :

$$l(x, y) = xs_1 + ys_2 \pmod{N} \in Z_N.$$

Под l_1 -нормой точки решётки (x, y) понимается

$$\|(x, y)\| = |x| + |y|.$$

Введём множество всех нулей на плоскости, порождённых описанием $C(N; s_1, s_2)$: $X = \{(x, y) \in Z^2 | l(x, y) = 0 \in Z_N\}$. На множестве X (нулей) выбираем два линейно независимых вектора a^* и b^* , для которых выполняется условие

$$\max\{\|a^*\|, \|b^*\|\} \leq \min\{\|a^* + b^*\|, \|a^* - b^*\|\}. \quad (6)$$

Такие векторы называются базовыми векторами множества X (packed basis [22]). В [22] доказана следующая

Лемма 1. Пусть a^* , b^* – базовые векторы множества нулей X , порождённого описанием $C(N; s_1, s_2)$, и пусть $[a^*, b^*]$ – параллелограмм с диагоналями d_1 и d_2 , где $\|d_1\| = \min\{\|a^* + b^*\|, \|a^* - b^*\|\}$, $\|d_2\| = \max\{\|a^* + b^*\|, \|a^* - b^*\|\}$. Тогда диаметр графа $C(N; s_1, s_2)$ равен

$$\text{width}([a^*, b^*]) = \begin{cases} \lfloor \|d_1\|/2 \rfloor - 1, & \text{если } \|d_1\| = \|d_2\| > \max\{\|a^*\|, \|b^*\|\} \\ & \text{и } \|a^*\|, \|b^*\| \text{ – нечётные,} \\ \lfloor \|d_1\|/2 \rfloor, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Для доказательства оптимальности графов найденных серий требуется для каждой серии найти базовые векторы соответствующего множества X , удовлетворяющие условию (6), определить диаметр графов по формуле (7) и сравнить его с (1).

Теорема 2. Диаметр d любого циркулянтного графа $C(N; s_1, s_2) \in S_i(d, k)$, где $i = 2, 5, 6$ и значения d, k определены в табл. 3, равен $D(N)$.

Доказательство. Для серий $S_2(d, k)$, $S_5(d, k)$, $S_6(d, k)$ существуют общие базовые векторы соответствующих множеств X :

$$a^* = (a - p, b - q), \quad b^* = (0, b).$$

Докажем теорему для графов серии $S_2(d, k)$. Подстановкой значений параметров a, b, p, q из табл. 2 получим

$$a^* = (d + k, d - k - 1), \quad b^* = (0, 2d - 2k - 1),$$

$$a^* + b^* = (d + k, 3d - 3k - 2), \quad a^* - b^* = (d + k, -(d - k)), \quad \text{где } d > k.$$

Следовательно,

$$\|a^*\| = 2d - 1, \quad \|b^*\| = 2d - 2k - 1,$$

$$\|a^* + b^*\| = 4d - 2k - 2, \quad \|a^* - b^*\| = 2d.$$

Учитывая соотношение между d и k из табл. 3 для серии $S_2(d, k)$, получим

$$2d - 1 < \min\{4d - 2k - 2, 2d\}.$$

Таким образом, условие (6) выполнено. Применим к графам серии $S_2(d, k)$ формулу (7):

$$d(N; s_1, s_2) = \lfloor \|d_1\|/2 \rfloor = \lfloor 2d/2 \rfloor = d.$$

В результате диаметры графов всех семейств серии $S_2(d, k)$ равны d . Поскольку при всех допустимых d и k условие (5) выполнено для всех графов серии, то $d = D(N)$, и графы серии $S_2(d, k)$ оптимальны.

Для графов серии $S_5(d, k)$ имеем

$$a^* = (d + k, d - k), \quad b^* = (0, 2d - 2k + 1),$$

$$a^* + b^* = (d + k, 3d - 3k + 1), \quad a^* - b^* = (d + k, -(d - k + 1)).$$

Следовательно,

$$\|a^*\| = 2d, \quad \|b^*\| = 2d - 2k + 1,$$

$$\|a^* + b^*\| = 4d - 2k + 1, \quad \|a^* - b^*\| = 2d + 1.$$

Имеем

$$2d < \min\{4d - 2k + 1, 2d + 1\}.$$

Таким образом, условие (6) выполнено. Применение (7) к графам серии $S_5(d, k)$ даёт:

$$d(N; s_1, s_2) = \lfloor \|d_1\|/2 \rfloor = \lfloor (2d + 1)/2 \rfloor = d.$$

Аналогично, применив указанный метод доказательства к графам серии $S_6(d, k)$, получим требуемый результат. \square

Теорема 3. Диаметр d любого циркулянтного графа $C(N; s_1, s_2) \in S_i(d, k)$, где $i = 1, 3, 4$ и значения d, k определены в табл. 3, равен $D(N)$.

Доказательство. Для серии $S_1(d, k)$ базовые векторы X равны

$$a^* = (a - p, b) = (d + k - 2, d - k), \quad b^* = (-(2p - a), 2b) = (-3, 2d - 2k).$$

Для серии $S_3(d, k)$

$$a^* = (a, -q) = (d + k, -(d - k - 1)), \quad b^* = (0, b) = (0, 2d - 2k).$$

Для серии $S_4(d, k)$

$$a^* = (a, b - q) = (d - k, d + k), \quad b^* = (2a, -(2q - b)) = (2d - 2k, -1).$$

Докажем теорему для графов серии $S_1(d, k)$. Имеем

$$a^* + b^* = \begin{cases} (-1, 3d - 3) & \text{при } k = 1, \\ (d + k - 5, 3d - 3k) & \text{при } k > 1, \end{cases}$$

$$a^* - b^* = (d + k + 1, -(d - k)), \quad \text{где } d > k.$$

Следовательно,

$$\|a^*\| = 2d - 2, \quad \|b^*\| = 2d - 2k + 3,$$

$$\|a^* + b^*\| = \begin{cases} 3d - 2 & \text{при } k = 1, \\ 4d - 2k - 5 & \text{при } k > 1, \end{cases}$$

$$\|a^* - b^*\| = 2d + 1.$$

Из соотношения между d и k из табл. 3 следует (6):

$$2d - 2 < \begin{cases} \min\{3d - 2, 2d + 1\} & \text{при } k = 1, \\ \min\{4d - 2k - 5, 2d + 1\} & \text{при } k > 1. \end{cases}$$

Применим к графам серии $S_1(d, k)$ формулу (7):

$$d(N; s_1, s_2) = \lfloor \|d_1\|/2 \rfloor = \lfloor (2d + 1)/2 \rfloor = d.$$

В результате диаметры графов всех семейств серии $S_1(d, k)$ равны d . Поскольку при всех допустимых d и k условие (5) выполнено для всех графов серии, то $d = D(N)$, и графы серии $S_1(d, k)$ оптимальны. Доказательства для графов серий $S_3(d, k)$ и $S_4(d, k)$ аналогичны. \square

Следует отметить, что при фиксированном k диаметры графов семейств, принадлежащих $S_3(d, k)$, имеют чётные значения при k чётном и нечётные – в противном случае. Таким образом, в отличие от семейства из [23] с $N = 2d^2 - 2$, существующего при диаметрах $d = A^2 + A - 2$, где $A \geq 2$, в данной работе найдено новое семейство оптимальных графов серии $S_3(d, 1)$, существующее при тех же N и любом нечётном $d > 1$. Дополнительно отметим, что графы семейства с описанием $C(2d^2 - 2; d, d + 1)$ и нечётных диаметрах $d > 1$ также имеют прямоугольный контур укладки на плоскости с параметрами $a = d + 1$, $b = 2d - 2$, $p = 0$, $q = d$.

5 L -масштабируемость семейств графов найденных серий с прямоугольным контуром

Графы всех найденных в данной работе серий семейств обладают ещё одним свойством, полезным с точки зрения реализации алгоритмов маршрутизации в сетях на кристалле – L -масштабируемостью семейств графов [24]. Данное свойство состоит в том, что при укладке на плоскости Z^2 члены семейства образуют последовательность L -контуров (а) с параметрами a, b, p, q , описываемыми линейными функциями от диаметра d графов, и (б) все параметры N, s_1, s_2, a, b, p, q графов семейства, как функции от d , удовлетворяют системе сравнений [13, 14], определяющей расположение нулей при укладке графов на плоскости:

$$\begin{cases} as_1 - qs_2 \equiv 0 \pmod{N}, \\ -ps_1 + bs_2 \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases} \quad (8)$$

Геометрически это означает, что длины соответствующих сторон L -контуров укладки графов семейства увеличиваются линейно при росте диаметра графа. Одна из них при этом может сохранять свою длину (как в нашем случае $p = 0$ или $q = 0$). Соответственно, сложность $O(\log N)$ [14] решения проблемы определения параметров L -контуров для L -масштабируемых семейств сокращается до $O(1)$.

Теорема 4. *Серии $S_i(d, k)$, где $i \in \overline{1, 6}$ и значения d, k определены в табл. 3, состоят из L -масштабируемых семейств циркулянтных графов.*

Доказательство. Выполнение условия (а) для всех серий $S_i(d, k)$ следует из табл. 2. Проверим выполнение (б) с помощью непосредственной подстановки в (8).

Для серии $S_1(d, k)$ сравнения (8) имеют место при любых d и k :

$$\begin{cases} (2d + 2k - 1)(d - k) = N \equiv 0 \pmod{N}, \\ -(d + k + 1)(d - k) + (d - k)(d + k + 1) = 0 \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для серии $S_2(d, k)$ сравнения (8) имеют место при любых d и k :

$$\begin{cases} d + k - (d - k)(2d + 2k) = -N \equiv 0 \pmod{N}, \\ (2d - 2k - 1)(2d + 2k) = 2N \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для графов семейств серии $S_3(d, k)$ сравнения (8) выполняются при любых d и k одинаковой чётности:

$$\begin{cases} d + k - (d - k - 1)(d^2 - d - k^2 - k) = \frac{2-d+k}{2}N \equiv 0 \pmod{N}, \\ (2d - 2k)(d^2 - d - k^2 - k) = (d - k - 1)N \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для серии $S_4(d, k)$ сравнения (8) имеют место при любых d и k :

$$\begin{cases} d - k - (d + k + 1)(2d - 2k) = -N \equiv 0 \pmod{N}, \\ (2d + 2k + 1)(2d - 2k) = 2N \equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Для остальных серий справедливость (8) при любых допустимых d и k проверяется аналогичным образом. \square

Так как все найденные серии циркулянтов состоят из L -масштабируемых семейств с масштабируемыми по диаметру параметрами укладки графов на плоскости, то для таких графов при любых больших диаметрах параметры a , b , p , q рассчитываются по простым формулам и, соответственно, можно использовать эффективный бестабличный сложности $O(1)$ алгоритм маршрутизации из [24], основанный на их применении при расчётах кратчайших путей в графах.

6 Заключение

В настоящей работе найдены новые циркулянтные топологии степени четыре, представимые в виде прямоугольных решётчатых структур, аналогичные решёткам и двумерным торам, стандартно используемым в сетях на кристалле, но с лучшими структурными и коммуникативными свойствами для масштабных сетей на кристалле. Решена задача существования и предложен метод построения новых семейств оптимальных циркулянтных графов степени четыре с минимумом диаметра и прямоугольным контуром укладки на плоскости. Представлен процесс конструирования бесконечных серий таких семейств графов. Показано, что мощность множества найденных графов увеличивается с ростом диаметра графов. Найдены формулы для параметров укладки графов на плоскости, которые могут применяться при организации алгоритмов маршрутизации. Доказанные свойства масштабируемости найденных графов и ограниченной длины соединений при росте числа вершин актуальны при проектировании масштабных сетей на кристалле. Дальнейшее исследование предложенных циркулянтных структур предполагает их апробацию в качестве топологий сетей на кристалле и реализацию алгоритмов маршрутизации для них.

Автор выражает благодарность к.т.н. Монахову О. Г. и д.т.н. Романову А. Ю. за полезные обсуждения данной работы.

References

- [1] F.K. Hwang, *A survey on multi-loop networks*, Theor. Comput. Sci., **299**:1-3 (2003), 107–121. Zbl 1038.68004
- [2] E.A. Monakhova, *A survey on undirected circulant graphs*, Discrete Math. Algorithms Appl., **4**:1 (2012), Article ID 1250002. Zbl 1247.05115
- [3] X. Huang, A.F. Ramos, Y. Deng, *Optimal circulant graphs as low-latency network topologies*, J. Supercomput., **78** (2022), 13491–13510.
- [4] H. Liu, X. Li, S. Wang, *Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing*, Mathematics, **10**:21 (2022), Article ID 4016.
- [5] B.B. Nesterenko, M.A. Novotarsky, *Cellular neural networks on circulant graphs*, Artificial Intelligence, **3** (2009), 132–138.
- [6] Y. Zhang, X. Yong, M. Golin, *Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs*, Discrete Math., **298**:1-3 (2005), 334–364. Zbl 1070.05029
- [7] A.D. Mednykh, I.A. Mednykh, *Kirchhoff index for circulant graphs and its asymptotics*, Dokl. Math., **102**:2 (2020), 392–395. Zbl 1477.05040

- [8] J.R.M. Antalan, F.J.H. Campena, *Distance eigenvalues, forwarding indices, and distance-based topological indices of complement of two circulant networks*, Preprint, arXIV:2104.05299v1, 2021.
- [9] E.A. Monakhova, O.G. Monakhov, A.Yu. Romanov, *Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: comparative analysis for networks-on-chip*, IEEE Trans. Netw. Sci. Eng., **10**:1 (2023), 413–425. MR4545393
- [10] C. Martínez, E. Vallejo, R. Beivide, C. Izu, M. Moretó, *Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors*, Int. J. Parallel Program., **34**:3 (2006), 193–211. Zbl 1103.68423
- [11] K.-J. Pai, J.-S. Yang, G.-Y. Chen, J.-M. Chang, *Configuring protection routing via completely independent spanning trees in dense Gaussian on-chip networks*, IEEE Trans. Netw. Sci. Eng., **9**:2 (2022), 932–946. MR4401314
- [12] E.A. Monakhova, *On the analytic representation of optimal two-dimensional Diophantine structures of homogeneous computing systems*, Vychisl. Sist., **90** (1981), 81–91. Zbl 0532.68055
- [13] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre, M. Valero, *A discrete optimization problem in local networks and data alignment*, IEEE Trans. Comput., **36** (1987), 702–713.
- [14] F.K. Hwang, *A complementary survey on double-loop networks*, Theor. Comput. Sci., **263**:1-2 (2001), 211–229. Zbl 0974.68003
- [15] R. Beivide, E. Herrada, J.L. Balcázar, A. Arruabarrena, *Optimal distance networks of low degree for parallel computers*, IEEE Trans. Comput., **40**:10 (1991), 1109–1124. Zbl 1395.68024
- [16] J. Miguel, C. Izu, A. Arruabarrena et al., *Toroidal networks for multicomputer systems*, ISMM Inter. Workshop, (1991), 112–116.
- [17] R. Beivide, E. Herrada, J.L. Balcazar, J. Labarta, *Optimized mesh-connected networks for SIMD and MIMD architectures*, in D.St. Clair (ed.), *ISCA '87: Proceedings of the 14th annual international symposium on Computer architecture*, ACM, New York, 1987, 163–170.
- [18] F.C.M. Lau, G. Chen, *Optimal layouts of midimew networks*, IEEE Trans. Parallel Distrib. Systems, **7**:9 (1996), 954–961.
- [19] V. Puente, C. Izu, J.A. Gregorio et al., *Improving parallel system performance by changing the arrangement of the network links*, Proceedings of the 14th international conference on Supercomputing, ACM, New York, 2000, 44–53.
- [20] E.A. Monakhova, *A computation of the shortest paths in optimal two-dimensional circulant networks*, Prikl. Diskretn. Mat., **47** (2020), 87–100. Zbl 1455.68146
- [21] B.-X. Chen, J.-X. Meng, W.-J. Xiao, *A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks*, In Jia, X., Wu, J., He, Y. (eds), *Mobile ad-hoc and sensor networks*, MSN 2005, LNCS, **3794**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005, 308–316.
- [22] J. Žerovnik, T. Pisanski, *Computing the diameter in multiple-loop networks*, J. Algorithms, **14**:2 (1993), 226–243. Zbl 0764.68137
- [23] B.-X. Chen, J.-X. Meng, W.-J. Xiao, *Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci., **8**:1 (2006), 299–311. Zbl 1153.05315
- [24] O.G. Monakhov, E.A. Monakhova, *A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks*, Discrete Anal. Oper. Res., **32**:2 (2025), 88–106.

EMILIA ANATOLIEVNA MONAKHOVA
INSTITUTE OF COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL GEOPHYSICS SB
RAS,
PR. LAVRENTIEVA, 6, 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA,
HSE UNIVERSITY,
MYASNITSKAYA 20,, 101000, MOSCOW, RUSSIA
Email address: emilia@rav.sssc.ru