

ДИФФУЗИОННАЯ ВОЛНА С ДВУМЯ
РАСХОДЯЩИМИСЯ ФРОНТАМИ ДЛЯ
КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫА.Л. КАЗАКОВ , Л.Ф. СПЕВАК *Представлено О.С. Розановой*

Abstract: The paper considers solutions with zero fronts to a system of two degenerate nonlinear (quasilinear) parabolic equations. Such systems are used in mathematical biology to describe population dynamics, specifically in the "predator-prey" models. The study focuses on a special case, where the zero fronts of two unknown functions, specified by the boundary conditions, move in opposite directions. We prove a new theorem of the existence and uniqueness of an analytical solution to the problem under consideration and derive new exact solutions by reducing the original system to a system of ordinary differential equations in a particular case. A stepwise numerical algorithm based on the collocation method and radial basis functions is proposed. Finally, we conduct a qualitative and quantitative analysis of analytical and numerical solutions, utilizing the exact solutions to verify the numerical algorithm.

KAZAKOV, A.L., SPEVAK L.F. DIFFUSION WAVE WITH TWO DIVERGING FRONTS FOR A QUASILINEAR PARABOLIC SYSTEM.

© 2025 КАЗАКОВ А.Л., СПЕВАК Л.Ф..

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках проектов «Аналитические и численные методы математической физики в задачах томографии, квантовой теории поля и механике жидкости и газа» (№ 121041300058-1); «Исследование и моделирование явлений реологии и тепломассопереноса в средах с внутренней структурой при переменных начальных и граничных условиях» (№ 124020600042-9).

Поступила 8 апреля 2025 г., опубликована 9 декабря 2025 г.

Keywords: quasilinear parabolic system, degeneration, existence theorem, exact solution, numerical solution.

1 Введение

Рассмотрим систему реакционно-диффузионного типа, состоящую из двух квазилинейных уравнений второго порядка

$$u_t - [(\alpha_1 + \beta_1 v_x)u]_x = f(u, v), \quad v_t - [(\alpha_2 - \beta_2 u_x)v]_x = g(v, u). \quad (1)$$

Здесь $u(t, x)$, $v(t, x)$ — искомые функции; t (время) и x (пространственная координата) — независимые переменные; α_1 , α_2 , β_1 , β_2 — константы, $\alpha_1 \alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Известные функции $f(u, v)$, $g(u, v)$ являются достаточно гладкими. Система (1) была предложена в известной монографии [1, с. 10] в качестве модели популяционной динамики «хищник-жертва». Можно видеть, что (1) имеет параболический тип [2]. Отметим, что (1) существенно отличается от традиционных систем реакции-диффузии, применяемых в математической биологии в качестве моделей «хищник-жертва», которые характеризуются тем, что в каждом из уравнений присутствуют производные только от одной искомой функции [3, 4]. Более того, рассматриваемые системы обычно являются полулинейными [5, 6]. Вероятно, сложный характер нелинейностей, которые присутствуют в системе, а также вырождение, имеющее место при $u = 0$, $v = 0$, явились причиной того, что, к нашему большому удивлению, работ, в которых рассматривались бы системы вида (1), нам удалось найти очень мало (см. ниже). Некоторые авторы используют близкие постановки, для которых либо проводят качественные исследования свойств системы [7, 8], либо решают ее численно [9, 10], при этом в последних двух работах рассматриваются системы, в которых вырождения при $u = 0$, $v = 0$ не происходит.

Тем не менее, приведем краткий исторический обзор близких по тематике публикаций. Применение параболических уравнений диффузии и систем реакции-диффузии для описания популяционной динамики имеет давнюю историю, которая началась в 1937 году с классических работ [11, 12], где была предложена модель распространения доминантного гена, имеющая вид полулинейного уравнения, получившего в дальнейшем название «уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова» (КПП). За этими работами последовало огромное количество других публикаций по применению параболических уравнений и систем в математической биологии, среди которых большое внимание было уделено различным системам типа «хищник-жертва». Сколь-либо исчерпывающий обзор публикаций по этой тематике в рамках одной статьи дать невозможно. Укажем здесь монографию [13], которая снабжена обширной библиографией.

В последние годы основное внимание исследователей уделяется нелокальным уравнениям реакции-диффузии. Результаты этих исследований представлены в обзорной статье [14], в которой анализируются более ста

работ, вышедших за последние полвека. Внимания также заслуживает большая статья [15], в которой рассматривается нелокальная диффузия при наличии препятствий с приложениями к биологии. Учитывают также пространственную неоднородность (гетерогенность) ресурсов и видов [16] и т.д.

Работ, в которых рассматривалась бы квазилинейная система «хищник-жертва», сравнительно немного [3, 10, 17]. При этом в [3, 17] рассматриваются более простые, по сравнению с (1), постановки, а в [10, 17] нет вырождения.

Таким образом, традиционные модели, при всем их разнообразии, как правило, разрешимы относительно старшей производной при любых значениях искомых функций, в отличие от системы (1), которая вырождается [18, 3] при $u = 0$, $v = 0$. Между тем, такое свойство квазилинейных параболических уравнений и систем приводит к появлению интересного класса решений, которые описывают возмущения, распространяющиеся по нулевому фону с конечной скоростью (общеизвестно, что в линейном и полулинейном случаях подобное возможно только при выполнении условия гиперболичности [19]). Впервые решения такого рода были обнаружены вскоре после II мировой войны [20] для уравнения нелинейной теплопроводности, и изучались, в частности, в уральской школе по математике и механике, основанной акад. А.Ф. Сидоровым [21], в частности, в работах авторов [22, 23]. В зависимости от интерпретации, указанные решения в литературе называют тепловыми, фильтрационными или диффузионными волнами.

Для системы (1) изучение решений, имеющих тип диффузионной волны, начато работами [24]: в частном случае, когда функции $f(u, v)$ и $g(u, v)$ квадратичные, т.е. имеет место нелинейность Лотки-Вольтерры, и [25]: в более общей постановке при $f(u, v)$ и $g(u, v)$ общего вида. Были доказаны теоремы существования и единственности и рассмотрены точные решения, в том числе, имеющие вид бегущей волны. В статье [26] аналитические исследования впервые были дополнены численными.

Настоящая работа является продолжением [25] и [26]. Статья имеет следующую структуру: в п. 2 обсуждается постановка задачи; в п. 3 формулируется и доказывается теорема существования аналитического решения рассмотренной задачи; в п. 4 рассматриваются точные решения, построение которых сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ); в п. 5 приводится численный метод, который используется для выполнения расчетов в п. 6; наконец, в п. 7 формулируются выводы по результатам исследований.

2 Постановка задачи

Перепишем систему (1) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha_1 u_x + \beta_1 (uv_{xx} + u_x v_x) + f(u, v), \\ v_t &= \alpha_2 v_x - \beta_2 (vu_{xx} + u_x v_x) + g(u, v). \end{aligned} \quad (2)$$

Для системы (2) рассмотрим граничные условия

$$u|_{x=a(t)} = 0, \quad v|_{x=b(t)} = 0, \quad (3)$$

где $a(t)$, $b(t)$ — известные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям $a(0) = b(0) = 0$, $a(t) < 0$, $b(t) > 0$ при $t > 0$. Будем искать классические решения системы (2), удовлетворяющие (3). Можно видеть, что при $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$ рассматриваемой задаче удовлетворяет тривиальное решение $u \equiv 0, v \equiv 0$. Как будет показано ниже, в данном случае имеются и нетривиальные решения.

Назовем *нулевыми фронтами* многообразия, на которых одна из искомым функций обращается в нуль для решения, которое, вообще говоря, является нетривиальным. Можно видеть, что в данном случае нулевые фронты $x = a(t)$ и $x = b(t)$ движутся в противоположных направлениях.

Отметим, что система (2) может рассматриваться в качестве математической модели популяционной динамики только при неотрицательных u и v , поскольку численность популяции, очевидно, не может быть отрицательной. Таким образом, в рамках настоящего исследования нас интересуют решения, принимающие положительные значения для обеих искомым функций. Там, где одна из искомым функций отрицательна, взаимодействие популяций прекращается, и рассматривать систему (2) не имеет смысла, во всяком случае, с точки зрения предметной области.

Ранее в [25] был рассмотрен частный случай задачи (2), (3), когда $a(t) \equiv b(t)$. К сожалению, для полученных результатов не удалось предложить содержательную интерпретацию, поскольку выяснилось: полученные решения таковы, что функции u и v всюду, за исключением нулевого фронта, принимают значения разных знаков. Настоящее исследование имеет своей целью найти решение указанной проблемы и получить решения, которые в области, ограниченной нулевыми фронтами, положительны (обе искомым функции). При этом прохождение через нулевой фронт приводит к смене знака одной из искомым функций (она становится отрицательной), и для сохранения «физичности» решения последняя заменяется тождественным нулем, что приводит к появлению разрыва производных при сохранении непрерывности самих функций.

3 Теорема существования

Будем искать решение задачи (2), (3) в классе аналитических функций, т.е. в виде рядов Тейлора. Отметим, что это далеко не единственный возможный способ представления решений дифференциальных уравнений в частных производных в виде рядов. Так, некоторые ученики А.Ф.

Сидорова применяют специальные ряды [27], а в работе [28] функция Грина для уравнения Колмогорова–Феллера строится в виде ряда, состоящего из суммы сингулярной и регулярной компонент, причем при некоторых соотношениях между параметрами ряд обрывается, что приводит к точному решению в виде конечной суммы.

Для задачи (2), (3) справедлива следующая

Теорема 1. Пусть

- (1) $a(t)$, $b(t)$ — аналитические функции в окрестности точки $t = 0$;
- (2) $f(u, v)$, $g(u, v)$ — аналитические функции в окрестности точки $u = 0$, $v = 0$;
- (3) $a(0) = b(0)$, $a'(0) = b'(0)$, $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Тогда задача (2), (3) имеет в некоторой окрестности точки $t = 0$, $x = 0$ два и только два аналитических решения, одно из которых является тривиальным, а второе — нетривиальным.

Доказательство. Обоснование корректности теоремы проводится классическим методом мажорант [29]: формальное решение строится в виде рядов Тейлора с рекуррентно определяемыми коэффициентами, сходимость рядов доказывается посредством построения мажорантной задачи. Подобное утверждение ранее было доказано нами в частном случае [25], поэтому будем кратки в рассуждениях, останавливаясь более подробно только на специфических особенностях, отличающих настоящую работу от предшествующей.

Сделаем в уравнении (2) замену переменных

$$t' = t, \quad y = x - a(t). \quad (4)$$

Задача (2), (3) в результате замены (4), которая, очевидно, является невырожденной, примет следующий вид:

$$u_t = [\alpha_1 + a'(t)]u_y + \beta_1(uv_{yy} + v_y u_y) + f(u, v), \quad (5)$$

$$v_t = [\alpha_2 + a'(t)]v_y - \beta_2(vu_{yy} + u_y v_y) + g(v, u),$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=b(t)-a(t)} = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее "штрих" у переменной t для упрощения обозначений опускается.

Напомним, что, если $a(t) \equiv b(t)$, то имеем случай, рассмотренный ранее в работе [25]. Отметим, что можно было бы с равным успехом сделать замену $y = x - b(t)$, т.е. поменять ролями функции $a(t)$ и $b(t)$ (u и v).

Решение задачи (5), (6) будем искать в виде

$$u(t, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{t^k}{k!} \frac{y^l}{l!} = \sum_{k,l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k! l!}, \quad u_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial t^k \partial y^l} \right|_{t=0, y=0},$$

$$v(t, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{k,l} \frac{t^k}{k!} \frac{y^l}{l!} = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k! l!}, \quad v_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} v}{\partial t^k \partial y^l} \right|_{t=0, y=0}. \quad (7)$$

Коэффициенты рядов (7) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$.

Из (6) следует, что

$$u_{0,0} = v_{0,0} = 0.$$

По условию теоремы имеем, что функции $a(t)$ и $b(t)$ можно разложить в ряды Тейлора

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}, \quad a_n = \left. \frac{d^n a}{dt^n} \right|_{t=0}, \quad b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}, \quad b_n = \left. \frac{d^n b}{dt^n} \right|_{t=0}.$$

Положим для удобства дальнейших преобразований $c(t) = b(t) - a(t)$, $c_n = b_n - a_n$, $n = 0, 1, \dots$ Из условия теоремы следует, что $a_1 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$.

Дифференцируя (6) по t , получаем

$$u_t = 0, \quad v_t + c'(t)u_y = 0,$$

полагая $t = y = 0$, имеем, что

$$u_{1,0} = 0, \quad v_{1,0} = 0.$$

Обратимся теперь к системе (5). Подставляя в нее $t = y = 0$, а также уже найденные значения, получаем

$$\alpha_1 u_{0,1} + \beta_1 v_{0,1} u_{0,1} = 0, \quad \alpha_2 v_{0,1} - \beta_2 v_{0,1} u_{0,1} = 0. \quad (8)$$

Система (8) имеет два решения

$$u_{0,1} = \alpha_2 / \beta_2, \quad v_{0,1} = -\alpha_1 / \beta_1; \quad u_{0,1}^* = 0, \quad v_{0,1}^* = 0.$$

Можно без труда убедиться, что нулевому решению соответствует тривиальное решение задачи (5), (6) (и исходной задачи (2), (3)). Поэтому далее будем рассматривать ненулевой корень системы (8). Итак, все первые производные найдены.

Отметим здесь, что, если $\beta_1 \cdot \beta_2 = 0$, то система (8) имеет только одно, нулевое, решение, откуда следует, что задача (5), (6) также имеет в этом случае единственное, тривиальное, решение.

Найдем теперь вторые производные. Дважды дифференцируя (6) по t , получаем

$$u_{tt} = 0, \quad v_{tt} + 2c'(t)u_{ty} + [c'(t)]^2 u_{yy} + c''(t)u_y = 0,$$

и полагая $t = y = 0$, имеем, что

$$u_{2,0} = 0, \quad v_{2,0} = -c_2 u_{0,1} = -c_2 \alpha_2 / \beta_2.$$

Обратимся далее к системе (5). Продифференцировав уравнения (5) по t и положив $t = y = 0$, получим равенства

$$u_{2,0} = \alpha_1 u_{1,1} + a_2 u_{0,1} + \beta_1 (u_{1,0} v_{0,2} + u_{0,0} v_{1,2} + u_{0,1} v_{1,1} + u_{1,1} v_{0,1}) + f_{1,0}, \quad (9)$$

$$v_{2,0} = \alpha_2 v_{1,1} + a_2 v_{0,1} - \beta_2 (v_{1,0} u_{0,2} + v_{0,0} u_{1,2} + u_{0,1} v_{1,1} + u_{1,1} v_{0,1}) + g_{1,0}, \quad (10)$$

где

$$f_{1,0} = [f(u, v)]_t \Big|_{\substack{t=0 \\ y=0}} = f_u(0, 0)u_{1,0} + f_v(0, 0)v_{1,0} = 0,$$

$$g_{1,0} = [g(u, v)]_t \Big|_{\substack{t=0, \\ y=0}} = g_u(0, 0)u_{1,0} + g_v(0, 0)v_{1,0} = 0.$$

Используя ранее найденные значения, из (9), (10) можно выразить коэффициенты

$$u_{1,1} = \frac{a_2}{\beta_2} - \frac{v_{2,0}}{\beta_2 v_{0,1}} = \frac{a_2}{\beta_2} - \frac{c_2 \beta_1 \alpha_2}{\beta_2^2 \alpha_1}, \quad v_{1,1} = -\frac{a_2}{\beta_1}.$$

Продифференцировав уравнения (5) по y и положив $t = y = 0$, получим, что

$$u_{1,1} = \alpha_1 u_{0,2} + \beta_1 (u_{0,1} v_{0,2} + u_{0,0} v_{0,3} + u_{0,1} v_{0,2} + u_{0,2} v_{0,1}) + f_{0,1}, \quad (11)$$

$$v_{1,1} = \alpha_2 v_{0,2} - \beta_2 (v_{0,1} u_{0,2} + v_{0,0} u_{0,3} + u_{0,1} v_{0,2} + u_{0,2} v_{0,1}) + g_{0,1}, \quad (12)$$

где

$$f_{0,1} = [F(u, v)]_y \Big|_{\substack{t=0, \\ y=0}} = f_u(0, 0)u_{0,1} + f_v(0, 0)v_{0,1},$$

$$g_{0,1} = [g(u, v)]_y \Big|_{\substack{t=0, \\ y=0}} = g_u(0, 0)u_{0,1} + g_v(0, 0)v_{0,1}.$$

Используя ранее найденные значения, получим из (11), (12), что

$$u_{0,2} = \frac{g_{0,1} - v_{1,1}}{2\beta_2 v_{0,1}}, \quad v_{0,2} = \frac{u_{1,1} - f_{0,1}}{2\beta_1 u_{0,1}}.$$

Вторые производные найдены. База индукции установлена.

Пусть найдены $u_{k,l}$, $v_{k,l}$ при $k + l = 0, 1, \dots, n$, т.е. до порядка n включительно. Найдем коэффициенты порядка $n + 1$.

Из первого условия (6) имеем, что $u_{n+1,0} = 0$. Для определения $v_{n+1,0}$ продифференцируем второе условие (6) $n + 1$ раз по переменной t . Применяя двумерный аналог формулы Фаа-Ди-Бруно [30, 31], получим следующее равенство:

$$\left(\sum_{k_1+2k_2+\dots+(n+1)k_{n+1}=n+1} \frac{(n+1)! \Xi_1^{k_1} \Xi_2^{k_2} \dots \Xi_{n+1}^{k_{n+1}}}{k_1! k_1! \dots k_{n+1}!} \right) v(t, y) = 0, \quad (13)$$

где

$$\Xi_1 = \frac{\partial}{\partial t} + c'(t) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \Xi_i = \frac{c^{(i)}(t)}{i!} \frac{\partial}{\partial y}, \quad i \geq 2; \quad k_j \geq 0.$$

Положив в (13) $t = y = 0$, получим равенство, содержащее коэффициенты $v_{k,l}$, $k + l = 1, 2, \dots, n + 1$. Явный вид данного выражения здесь не приводится, поскольку он отличается крайней громоздкостью и не имеет принципиального значения. Существенно здесь то, что все коэффициенты порядка $n + 1$, которые порождаются действием оператора Ξ_1^{n+1} , за счет наличия множителя c_1 обращаются в нуль. Исключением является $v_{n+1,0}$, множитель перед которым равен 1. Таким образом, получаем, что

$$v_{n+1,0} = - \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+\dots+(n+1)k_{n+1}=n+1, \\ k_1 \leq n}} \frac{(n+1)! \Xi_1^{k_1} \Xi_2^{k_2} \dots \Xi_{n+1}^{k_{n+1}}}{k_1! k_1! \dots k_{n+1}!} v(t, y) \right) \Big|_{\substack{t=0, \\ y=0}}.$$

Итак, $u_{n+1,0}$, $v_{n+1,0}$ найдены. Для определения $u_{n,1}$, $v_{n,1}$ применим к каждому уравнению системы (5) оператор $\partial^n / \partial t^n \Big|_{\substack{t=0, \\ x=0}}$. Получим равенства

$$u_{n+1,0} = \alpha_1 u_{n,1} + \sum_{i=1}^n C_n^i a_{i+1} u_{n-i,1} + \\ + \beta_1 \left(\sum_{i=0}^n C_n^i u_{i,0} v_{n-i,2} + \sum_{i=0}^n C_n^i v_{i,1} u_{n-i,1} \right) + f_{n,0}, \quad (14)$$

$$v_{n+1,0} = \alpha_2 v_{n,1} + \sum_{i=1}^n C_n^i a_{i+1} v_{n-i,1} - \\ - \beta_2 \left(\sum_{i=0}^n C_n^i v_{i,0} u_{n-i,2} + \sum_{i=0}^n C_n^i u_{i,1} v_{n-i,1} \right) + g_{n,0}, \quad (15)$$

где

$$f_{n,0} = \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial t^n} \Big|_{\substack{t=0, \\ x=0}}, \quad g_{n,0} = \frac{\partial^n g(v, u)}{\partial t^n} \Big|_{\substack{t=0, \\ x=0}},$$

и вычисляются с помощью обобщенной формулы Фаа-Ди-Бруно.

Можно убедиться, что в каждом из уравнений (14), (15) содержится только одна неизвестная величина, уединяя которую, получаем, что

$$v_{n,1} = -\frac{F_{n,0}}{\beta_1 u_{0,1}}, \quad u_{n,1} = \frac{v_{n+1,0} - G_{n,0}}{\beta_2 v_{0,1}}.$$

Здесь величины $F_{n,0}$, $G_{n,0}$ известны в силу предположения индукции и вычисляются по формулам

$$F_{n,0} = \sum_{i=1}^n C_n^i a_{i+1} u_{n-i,1} + \beta_1 \left(\sum_{i=2}^n C_n^i u_{i,0} v_{n-i,2} + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i v_{i,1} u_{n-i,1} \right) + f_{n,0}, \\ G_{n,0} = \sum_{i=1}^n C_n^i a_{i+1} v_{n-i,1} - \beta_2 \left(\sum_{i=2}^n C_n^i v_{i,0} u_{n-i,2} + \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i u_{i,1} v_{n-i,1} \right) + g_{n,0}.$$

Пусть найдены $u_{n-i+1,i}$, $v_{n-i+1,i}$ при $i = 0, 1, \dots, k$. Для нахождения $u_{n-k,k+1}$, $v_{n-k,k+1}$ применим к каждому уравнению системы (5) оператор $\partial^n / \partial t^{n-k} x^k \Big|_{\substack{t=0, \\ y=0}}$. Получим

$$u_{n-k+1,k} = \alpha_1 u_{n-k,k+1} + \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a_{i+1} u_{n-k-i,k+1} + \\ + \beta_1 \left(\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j} v_{n-k-i,k-j+2} + \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} v_{n-k-i,k-j+1} \right) + \\ + f_{n-k,k}, \quad (16) \\ v_{n-k+1,k} = \alpha_2 v_{n-k,k+1} + \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a_{i+1} v_{n-k-i,k+1} -$$

$$-\beta_2 \left(\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j v_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2} + \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} v_{n-k-i,k-j+1} \right) + g_{n-k,k}. \quad (17)$$

Здесь

$$f_{n-k,k} = \frac{\partial^n f(u, v)}{\partial t^{n-k} \partial x^k} \Big|_{t=0, x=0}, \quad g_{n-k,k} = \frac{\partial^n g(v, u)}{\partial t^{n-k} \partial x^k} \Big|_{t=0, x=0}.$$

Конкретные значения также могут быть получены с помощью обобщенной формулы Фаа-Ди-Бруно.

В каждом из уравнений (16), (17) содержится только одна неизвестная величина, уединяя которую, получим, что

$$v_{n-k,k+1} = \frac{u_{n-k+1,k} - F_{n-k,k}}{(k+1)\beta_1 u_{0,1}}, \quad u_{n-k,k+1} = \frac{v_{n-k+1,k} - G_{n-k,k}}{(k+1)\beta_2 v_{0,1}}.$$

Здесь величины $F_{n-k,k}$, $G_{n-k,k}$ известны в силу предположения индукции и вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_{k,n-k} &= f_{n-k,k} + \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a_{i+1} u_{n-k-i,k+1} + \\ &+ \beta_1 \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j} v_{n-k-i,k-j+2}}_{i+j \geq 2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} v_{n-k-i,k-j+1}}_{1 \leq i+j \leq n} \right), \\ G_{k,n-k} &= g_{n-k,k} + \sum_{i=1}^{n-k} C_{n-k}^i a_{i+1} v_{n-k-i,k+1} - \\ &- \beta_2 \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j v_{i,j} u_{n-k-i,k-j+2}}_{i+j \geq 2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=0}^k C_{n-k}^i C_k^j u_{i,j+1} v_{n-k-i,k-j+1}}_{1 \leq i+j \leq n} \right). \end{aligned}$$

Формальное решение в виде рядов (7) построено, причем их коэффициенты определяются однозначно и, следовательно, нетривиальное решение является единственным.

Сходимость построенных рядов доказывается методом мажорант с использованием стандартной процедуры. При этом вид системы позволяет построить общую мажоранту для обеих искомым функций и свести доказательство к классической теореме Коши-Ковалевской [29] для одного уравнения. Обоснование подобных утверждений ранее неоднократно проводилось авторами [32], в данном случае доказательство проводится аналогично. \square

4 Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ)

Пусть в системе (2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, а слагаемые, не содержащие производные, являются степенными функциями и имеют вид

$$f(u, v) = A_1 v^\lambda u^{\theta-\lambda} - A_2 u^\theta, \quad g(v, u) = B_1 u^\mu v^{\theta-\mu} - B_2 v^\theta, \quad (18)$$

где $A_1, A_2, B_1, B_2, \lambda, \mu, \theta$ – неотрицательные константы, причем $\theta > \lambda > 0, \theta > \mu > 0$. Системы со свободными членами подобного вида встречаются в моделях диффузии в двухкомпонентных средах, которые также имеют вид квазилинейных параболических систем второго порядка [33], и по своим свойствам близки к рассматриваемой здесь задаче популяционной биологии.

С учетом (18), система (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha u_x + \beta_1(uv_{xx} + u_x v_x) + A_1 v^\lambda u^{\theta-\lambda} - A_2 u^\theta, \\ v_t &= \alpha v_x - \beta_2(vu_{xx} + u_x v_x) + B_1 u^\mu v^{\theta-\mu} - B_2 v^\theta. \end{aligned} \quad (19)$$

Выполним в системе (19) разделение переменных. Пусть

$$u = \psi(t)p(z), \quad v = \psi(t)q(z), \quad z = \frac{x + \alpha t}{\varphi(t)}. \quad (20)$$

Здесь $\psi(t), \varphi(t)$ – достаточно гладкие функции, $\varphi(0) \neq 0$. Способ задания переменной z позволяет за счет выбора $\varphi(t)$ записать уравнение, по крайней мере, одного нулевого фронта в виде $z = \text{const}$. Аналогичные замены ранее использовались авторами для нелинейных диффузионных уравнений [23, 34] и систем «реакция-диффузия» [35].

После подстановки (20), приведения подобных слагаемых и умножения обеих частей на $[\varphi(t)/\psi(t)]^2$ система (19) примет вид

$$\begin{aligned} \beta_1(pq'' + q'p') + \frac{\varphi\varphi'z}{\psi}p' - \frac{\varphi^2\psi'}{\psi^2}p + A_1\psi^{\theta-2}\varphi^2q^\lambda p^{\theta-\lambda} - A_2\psi^{\theta-2}\varphi^2p^\theta &= 0, \\ -\beta_2(qp'' + p'q') + \frac{\varphi\varphi'z}{\psi}q' - \frac{\varphi^2\psi'}{\psi^2}q + B_1\psi^{\theta-2}\varphi^2p^\mu q^{\theta-\mu} - B_2\psi^{\theta-2}\varphi^2q^\theta &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система (21) становится СОДУ, если выполнены следующие условия:

$$\frac{\varphi\varphi'}{\psi} = \text{const}, \quad \frac{\varphi^2\psi'}{\psi^2} = \text{const}, \quad \psi^{\theta-2}\varphi^2 = \text{const}. \quad (22)$$

Система (22) содержит три уравнения относительно двух искомых функций, т.е. является переопределенной. Покажем, что она, тем не менее, разрешима в содержательных случаях.

Разделив 2-е уравнение системы (22) на 3-е, получим обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными $\psi'/\psi^\theta = \text{const}$. В свою очередь, из 1-го и 3-го уравнений (22) имеем, что $\varphi^{\theta/(\theta-2)}\varphi' = \text{const}$. Полученные уравнения легко интегрируются в квадратурах, при этом необходимо отдельно рассмотреть три различных подслучая: а) $\theta = 1$; б) $\theta \neq 1, \theta \neq 2$; в) $\theta = 2$.

Очевидно, что ψ и φ могут быть константами только одновременно. Вначале предположим, что они константами не являются.

а) При $\theta = 1$ имеем, что $\varphi(t) = d_2 e^{d_1 t}$, где d_1, d_2 здесь и далее — произвольные ненулевые константы. Тогда из 1-го уравнения (22) получаем, что $\psi(t) = \varphi \varphi' = d_1 d_2^2 e^{2d_1 t}$. Можно убедиться, что 2-е и 3-е уравнения (22) в данном случае являются верными равенствами. Таким образом, найдено решение

$$u = d_1 d_2^2 e^{2d_1 t} p\left(\frac{x + \alpha t}{d_2 e^{d_1 t}}\right), \quad v = d_1 d_2^2 e^{2d_1 t} q\left(\frac{x + \alpha t}{d_2 e^{d_1 t}}\right). \quad (23)$$

Функции $p(z)$ и $q(z)$ в (23) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \beta_1(pq'' + p'q') + zp' - 2p + A_3 q^\lambda p^{1-\lambda} - A_4 p &= 0, \\ -\beta_2(qp'' + p'q') + zq' - 2q + B_3 p^\mu q^{1-\mu} - B_4 q &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где $A_3 = A_1/d_1$, $B_3 = B_1/d_1$, $A_4 = A_2/d_1$, $B_4 = B_2/d_1$.

б) При $\theta \neq 1$, $\theta \neq 2$ имеем, что $\varphi(t) = (d_1 t + d_2)^{(\theta-2)/(2\theta-2)}$, тогда из 1-го уравнения (22) получаем, что $\psi(t) = \varphi \varphi' = [d_1(\theta-2)/(2\theta-2)](d_1 t + d_2)^{1/(1-\theta)}$, 2-е и 3-е уравнения (22) также выполняются. Итак, в данном случае решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \frac{d_1(\theta-2)}{2\theta-2} (d_1 t + d_2)^{1/(1-\theta)} p\left(\frac{x + \alpha t}{(d_1 t + d_2)^{(\theta-2)/(2\theta-2)}}\right), \\ v &= \frac{d_1(\theta-2)}{2\theta-2} (d_1 t + d_2)^{1/(1-\theta)} q\left(\frac{x + \alpha t}{(d_1 t + d_2)^{(\theta-2)/(2\theta-2)}}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Функции $p(z)$ и $q(z)$ в (25) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \beta_1(pq'' + p'q') + zp' - \frac{2p}{2-\theta} + A_3 q^\lambda p^{\theta-\lambda} - A_4 p^\theta &= 0, \\ -\beta_2(qp'' + p'q') + zq' - \frac{2q}{2-\theta} + B_3 p^\mu q^{\theta-\mu} - B_4 q^\theta &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $A_3 = A_1[(\theta-2)/(2\theta-2)d_1]^{\theta-2}$, $B_3 = B_1[(\theta-2)/(2\theta-2)d_1]^{\theta-2}$, $A_4 = A_2[(\theta-2)/(2\theta-2)d_1]^{\theta-2}$, $B_4 = B_2[(\theta-2)/(2\theta-2)d_1]^{\theta-2}$.

Отметим, что система (24) является частным случаем (26) при $\theta = 1$.

в) При $\theta = 2$ у системы (22), очевидно, нет решений, которые не являются константами.

Рассмотрим теперь случай $\varphi, \psi = \text{const}$. Тогда система (21) имеет вид

$$\beta_1(pq'' + p'q') + A_3 q^\lambda p^{\theta-\lambda} - A_4 p^\theta = 0, \quad -\beta_2(qp'' + p'q') + B_3 p^\mu q^{\theta-\mu} - B_4 q^\theta = 0. \quad (27)$$

Здесь $A_3 = A_1 \psi^{\theta-2} \varphi^2$, $B_3 = B_1 \psi^{\theta-2} \varphi^2$, $A_4 = A_2 \psi^{\theta-2} \varphi^2$, $B_4 = B_2 \psi^{\theta-2} \varphi^2$. Можно убедиться, что, используя представление (27), невозможно получить решения искомого вида, удовлетворяющие задаче (2), (3).

5 Численное решение

Численное решение нелинейных параболических уравнений и систем основано, как правило, на дискретизации по времени и выборе подходящего метода решения пространственной задачи. Наиболее популярны среди них метод конечных разностей (МКР) [36] и метод конечных элементов (МКЭ) [37, 38], однако они более подходят к задачам, в которых, в отличие от рассматриваемой в настоящей работе, область решения не меняется с течением времени. Отметим, что в упомянутых выше работах [9, 10] используется МКР. Решения МКР и МКЭ не являются гладкими по пространственным переменным. Последнего недостатка лишен метод граничных элементов (МГЭ), который для решения неоднородных и нелинейных задач используется в совокупности с методом двойственной взаимности (МДВ) [39, 40, 41]. МДВ относится к бессеточным методам [42], применение которых быстро развивается в последние десятилетия. Отметим среди них также метод коллокаций [43, 44] и метод фундаментальных решений [45]. Подчеркнем, что основным критерием выбора метода решения для авторов является получение в качестве искомых функций непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным выражений, что существенно упрощает верификацию решений, а также дает возможность проведения их количественного и качественного анализа. В своих предыдущих работах [46, 32, 35] мы использовали разностную дискретизацию по времени, а пространственную задачу решали с помощью МГЭ в сочетании с МДВ либо методом коллокаций. В обоих случаях основой решения является аппроксимация радиальными базисными функциями (РБФ) [43, 47]. Отметим, что алгоритмически эти два подхода очень близки, однако опыт показал, что при решении систем лучшую сходимость обеспечивает метод коллокаций.

Решение задачи (2), (3) будем искать в области ненулевых значений двух искомых функций, $x \in [a(t), b(t)]$. Разрешим уравнения системы (2) относительно старших производных,

$$u_{xx} = \frac{\alpha_2 v_x - \beta_2 u_x v_x - v_t + g(u, v)}{\beta_2 v}, \quad v_{xx} = \frac{-\alpha_1 u_x - \beta_1 u_x v_x + u_t - f(u, v)}{\beta_1 u}, \quad (28)$$

и будем строить решение задачи (28), (3) по шагам по времени.

Для корректной постановки задачи в произвольный момент времени сформулируем дополнительные граничные условия для производных искомых функций. Возьмем в условиях (3) полные производные по времени:

$$(u_t + u_x a'(t))|_{x=a(t)} = 0, \quad (v_t + v_x b'(t))|_{x=b(t)} = 0. \quad (29)$$

Выразив из соотношений (29) значения производных по времени, и подставив их в систему (2), получим новые граничные условия, связывающие значения искомых функций и их пространственных производных

на нулевых фронтах

$$\begin{aligned} [(\alpha_1 + a'(t))u_x(t, x) + \beta_1 u_x(t, x)v_x(t, x) + f(0, v(t, x))] |_{x=a(t)} &= 0, \\ [(\alpha_1 + b'(t))v_x(t, x) - \beta_2 u_x(t, x)v_x(t, x) + g(u(t, x), 0)] |_{x=b(t)} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Предполагая разностную дискретизацию по времени, на каждом шаге $t_k = kh$, где h — размер шага, будем строить решение краевой задачи (28), (3), (30) на отрезке $x \in [l_k, L_k]$, $l_k = a(t_k)$, $L_k = b(t_k)$, в следующем виде:

$$u(t_k, x) = u_p(x) + u_h(x), \quad v(t_k, x) = v_p(x) + v_h(x). \quad (31)$$

Здесь $u_p(x)$, $v_p(x)$ — частное решение системы (28), $u_h(x)$, $v_h(x)$ — решение соответствующей задачи для однородной системы,

$$\begin{aligned} u_h'' &= 0, \quad v_h'' = 0, \\ u_h|_{x=l_k} &= -u_p(l_k), \quad v_h|_{x=L_k} = -v_p(L_k). \end{aligned} \quad (32)$$

Если частное решение найдено, то решение задачи (32), очевидно, имеет вид

$$u_h = u_h'(x - l_k) - u_p(l_k), \quad v_h = v_h'(x - L_k) - v_p(L_k), \quad (33)$$

При этом значения u_h' , v_h' могут быть определены из условий (30).

Поскольку найти частное решение прямыми методами в общем случае невозможно, решение будем строить итерационно. На начальной итерации примем, что частное решение является нулевым

$$u_{p(0)} \equiv 0, \quad v_{p(0)} \equiv 0. \quad (34)$$

Далее, на каждой n -й итерации, $n \geq 0$, при известном частном решении $u_{p(n)}$, $v_{p(n)}$, решение задачи (32) имеет вид (33)

$$u_{h(n)} = u_{h(n)}'(x - l_k) - u_{p(n)}(l_k), \quad v_{h(n)} = v_{h(n)}'(x - L_k) - v_{p(n)}(L_k). \quad (35)$$

Тогда

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= u_{p(n)}(x) + u_{h(n)}'(x - l_k) - u_{p(n)}(l_k), \\ v^{(n)} &= v_{p(n)}(x) + v_{h(n)}'(x - L_k) - v_{p(n)}(L_k). \end{aligned} \quad (36)$$

В уравнениях (34), (35), (36) $u^{(n)}$, $u_{p(n)}$, $u_{h(n)}$, $v^{(n)}$, $v_{p(n)}$, $v_{h(n)}$ — n -е итерации решений.

Чтобы найти неизвестные значения $u_{h(n)}'$, $v_{h(n)}'$, подставим решение (36) в граничные условия (30). Получим систему двух алгебраических уравнений относительно этих величин:

$$\begin{aligned} [\alpha_1 + a'(t)] [u_{p(n)}'(l_k) + u_{h(n)}'] + \beta_1 [u_{p(n)}'(l_k) + u_{h(n)}'] [v_{p(n)}'(l_k) + v_{h(n)}'] + \\ + f(0, v_{p(n)}(l_k)) + v_{h(n)}'[l_k - L_k] - v_{p(n)}(L_k) = 0, \\ [\alpha_2 + b'(t)] [v_{p(n)}'(L_k) + v_{h(n)}'] - \beta_2 [u_{p(n)}'(L_k) + u_{h(n)}'] [v_{p(n)}'(L_k) + v_{h(n)}'] + \\ + g(u_{p(n)}(L_k), 0) + u_{h(n)}'(L_k - l_k) - u_{p(n)}(l_k) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Подстановка решения системы (37) в (36) даст нам окончательный вид n -й итерации решения задачи (28), (3), (30).

После этого находим следующую, $n + 1$ -ю, итерацию частного решения системы (28), подставив в правые части уравнений найденную n -ю итерацию:

$$\begin{aligned} u''_{p(n+1)} &= \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}}, \\ v''_{p(n+1)} &= \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Система (38) может быть решена методом коллокаций [43] через разложение правых частей по системе радиальных базисных функций:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \Phi_i(x), \\ \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}} &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \Phi_i(x). \end{aligned} \quad (39)$$

где $\Phi_i(x) = \Phi_i(|x - x_i|)$ — РБФ, x_1, x_2, \dots, x_N — точки коллокации, расположенные на отрезке $[l_k, L_k]$. Для каждой функции Φ_i существует функция Ψ_i , такая что $\Phi_i = \Psi_i''$. Коэффициенты $c_i^{(n+1)}, d_i^{(n+1)}, i = 1, \dots, N$, определяются из решения двух систем линейных алгебраических уравнений,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\alpha_2 v_x^{(n)} - \beta_2 u_x^{(n)} v_x^{(n)} - v_t^{(n)} + g(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_2 v^{(n)}} \right|_{x=x_j} &= \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \Phi_i(x_j); \\ \left. \frac{-\alpha_1 u_x^{(n)} - \beta_1 u_x^{(n)} v_x^{(n)} + u_t^{(n)} - f(u^{(n)}, v^{(n)})}{\beta_1 u^{(n)}} \right|_{x=x_j} &= \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \Phi_i(x_j), \\ j &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (40)$$

Производные по времени в левых частях (40) вычисляются методом конечных разностей, с использованием результатов решения на предыдущем шаге. С учетом того, что область решения с течением времени изменяется, разностная формула зависит от положения точки коллокации: 1) если $x_j < a(t_{k-1})$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} &= \frac{u^{(n)}(t_k, x_j) - u^{(n)}(t_{k-1}, x_j)}{t_k - t_{k-1}}, \\ \frac{\partial v^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} &= \frac{v^{(n)}(t_k, x_j) - v(t_{k-1}, a(t_{k-1})) - v_x(t_{k-1}, a(t_{k-1}))[x_j - a(t_{k-1})]}{h}; \end{aligned}$$

2) если $a(t_{k-1}) \leq x_j \leq b(t_{k-1})$,

$$\frac{\partial u^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} = \frac{u^{(n)}(t_k, x_j) - u(t_{k-1}, x_j)}{h},$$

$$\frac{\partial v^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} = \frac{v^{(n)}(t_k, x_j) - v(t_{k-1}, x_j)}{h},$$

3) если $x_j > b(t_{k-1})$,

$$\frac{\partial u^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} = \frac{u^{(n)}(t_k, x_j) - u(t_{k-1}, b(t_{k-1})) - u_x(t_{k-1}, b(t_{k-1}))(x_j - b(t_{k-1}))}{h},$$

$$\frac{\partial v^{(n)}(t_k, x_j)}{\partial t} = \frac{v^{(n)}(t_k, x_j)}{t_k - b^{-1}(x_j)}.$$

Здесь $t = a^{-1}(x)$ – функция, обратная к $x = a(t)$, $t = b^{-1}(x)$ – обратная к $x = b(t)$. Таким образом, $a^{-1}(x_j)$ – это момент времени, когда функция $u(t, x)$ равна нулю в точке x_j , $b^{-1}(x_j)$ – момент, когда функция $v(t, x)$ равна нулю в точке x_j .

Решив (40), мы найдем следующую итерацию частного решения системы (28):

$$u_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N c_i^{(n+1)} \Psi_i(x), \quad v_{p(n+1)} = \sum_{i=1}^N d_i^{(n+1)} \Psi_i(x). \quad (41)$$

Итерационный процесс (34)–(41) останавливается, если $(n+1)$ -я итерация достаточно близка к n -й. В результате мы получим решение задачи (2), (3) в момент времени $t = t_k$, непрерывное по x на отрезке $x \in [l_k, L_k]$:

$$u(t_k, x) = u_{p(n+1)}(x) + u_{h(n+1)}(x), \quad v(t_k, x) = v_{p(n+1)}(x) + v_{h(n+1)}(x). \quad (42)$$

6 Вычислительный эксперимент

В данном разделе проведен качественный и количественный анализ аналитических решений в виде отрезков рядов, построенных в доказательстве теоремы, а также выполнены расчеты с помощью предложенного численного алгоритма, для верификации которых использованы невязки уравнений системы (2) и точные решения. Далее приводятся и обсуждаются результаты расчетов.

Пример 1. Теорема 1 обеспечивает существование аналитического решения задачи (2), (3) вблизи начального момента времени. Оценить радиус сходимости построенных рядов, а также возможность использования полученного решения в практических или тестовых целях априори невозможно. В связи с этим исследуем свойства отрезков рядов (7)

$$u_n^a(t, x) = \sum_{k+l \leq n} u_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad v_n^a(t, x) = \sum_{k+l \leq n} v_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}, \quad (43)$$

а также аналогичных, построенных по степеням $[x - b(t)]$,

$$u_n^b(t, x) = \sum_{k+l \leq n} u_{k,l} \frac{t^k [x - b(t)]^l}{k!l!}, \quad v_n^b(t, x) = \sum_{k+l \leq n} v_{k,l} \frac{t^k [x - b(t)]^l}{k!l!}. \quad (44)$$

Для примера рассмотрим случай нелинейности Лотки-Вольтерры, когда $f(u, v) = (\gamma_1 - \eta_1 v)u$, $g(u, v) = (\gamma_2 u - \eta_2)v$.

Корректность приближенных решений (43) будем оценивать невязками уравнений (2),

$$\begin{aligned} \delta_1^a &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^a - \alpha_1 u_x^a - \beta_1 (u^a v_{xx}^a + u_x^a v_x^a) - f(u^a, v^a)|, \\ \delta_2^a &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^a - \alpha_2 v_x^a + \beta_2 (v^a u_{xx}^a + u_x^a v_x^a) - g(u^a, v^a)|, \end{aligned} \quad (45)$$

а также погрешностью выполнения второго условия (3),

$$\delta_3^a = |v^a(t, b(t))|, \quad (46)$$

Аналогично, для отрезков рядов (44) будем оценивать значения

$$\begin{aligned} \delta_1^b &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^b - \alpha_1 u_x^b - \beta_1 (u^b v_{xx}^b + u_x^b v_x^b) - f(u^b, v^b)|, \\ \delta_2^b &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^b - \alpha_2 v_x^b + \beta_2 (v^b u_{xx}^b + u_x^b v_x^b) - g(u^b, v^b)|, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\delta_3^b = |u^b(t, a(t))|. \quad (48)$$

Проиллюстрируем расчеты, произведенные при следующих параметрах задачи: $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 5$, $\beta_1 = 3$, $\beta_2 = 4$, $\gamma_1 = \eta_1 = \gamma_2 = \eta_2 = 1$, $a(t) = -0.15t^2$, $b(t) = 0.1t^2$.

На рис. 1 показаны графики отрезков рядов (43), (44) при $n = 20$. Значения невязок, приведенные в табл. 1, показывают, что ряды (43), (44) сходятся по крайней мере на отрезке $x \in [0, 1]$. При этом с течением времени для решения (43) растет погрешность выполнения второго условия (3), а для (44) – первого. Например, при $t = 1$ функция $u_{20}^b(t, x)$ обращается в нуль в точке $x = -0.1444901464$, тогда как $a(1) = -0.15$; $v_{20}^a(t, x) = 0$ в точке $x = 0.1022829333$, при этом $b(1) = 0.1$. Таким образом, функции (43) (или (44)) при достаточно больших n можно считать приближенными решениями задачи (2), (3) лишь вблизи начального момента времени.

Представляет эмпирический интерес использовать в качестве приближенного решения задачи (2), (3) пары функций $u_n^a(t, x)$, $v_n^b(t, x)$, для которых априори будут выполнены условия (3). Точность выполнения уравнений (2) можно оценить невязками

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |u_t^a - \alpha_1 u_x^a - \beta_1 (u^a v_{xx}^b + u_x^a v_x^b) - f(u^a, v^b)|, \\ \Delta_2 &= \max_{x \in [a(t), b(t)]} |v_t^b - \alpha_2 v_x^b + \beta_2 (v^b u_{xx}^a + u_x^b v_x^a) - g(u^a, v^b)|. \end{aligned} \quad (49)$$

В момент $t = 1$ при $n = 5$: $\Delta_1 = 2.2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_2 = 1.4 \cdot 10^{-2}$; при $n = 10$: $\Delta_1 = 2.2 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_2 = 1.8 \cdot 10^{-2}$; при $n = 20$: $\Delta_1 = 2.1 \cdot 10^{-2}$, $\Delta_2 = 1.7 \cdot 10^{-2}$.

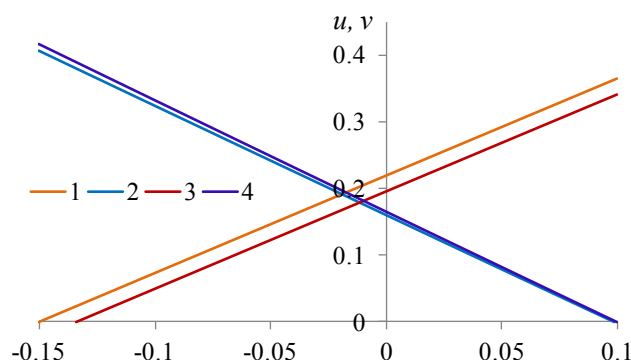


Рис. 1. Отрезки рядов (43), (44) при $t = 1$: 1 – $u_{20}^a(t, x)$, 2 – $v_{20}^a(t, x)$, 3 – $u_{20}^b(t, x)$; 4 – $v_{20}^b(t, x)$.

ТАБЛИЦА 1. Невязки уравнений и погрешности нулевых фронтов для решений (43), (44)

t	n	δ_1^a	δ_2^a	δ_3^a	δ_1^b	δ_2^b	δ_3^b
0.1	5	$3.3 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-9}$	$4.6 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$
0.1	10	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$
0.1	20	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-6}$
0.5	5	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$7.7 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
0.5	10	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$7.7 \cdot 10^{-9}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
0.5	20	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$6.9 \cdot 10^{-9}$	$7.6 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$
1	5	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$	$5.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$
1	10	$1.3 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-6}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$
1	20	$6.7 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$5.2 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$

При тех же параметрах задача (2), (3) была решена численно с помощью алгоритма, описанного в предыдущем разделе. Точность решения оценивалась невязками δ_1 , δ_2 уравнений системы (2), аналогично (43), (44). Производные по времени при этом вычислялись разностно. Приведенные в табл. 2 данные демонстрируют сходимость алгоритма относительно шага по времени h и числа точек коллокаций N .

Пример 2. Рассмотрим теперь пример построения точного решения системы (19) и его использования для верификации алгоритма численного решения. Рассмотрим случай б), когда решение имеет вид (25). Решим для этого систему ОДУ (26) на некотором отрезке $z \in [z_1, z_2]$ с краевыми условиями

$$p(z_1) = 0, q(z_2) = 0, \quad (50)$$

которым из (26) соответствуют краевые условия на производные:

$$p'(z_2) = \frac{z_2}{\beta_2}, q'(z_1) = -\frac{z_1}{\beta_1}. \quad (51)$$

ТАБЛИЦА 2. Невязки уравнений (2) для численных решений

t	h	N	δ_1	δ_2
0.5	0.1	10	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.1	20	$2.0 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.05	10	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
0.5	0.05	20	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$
1	0.1	10	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
1	0.1	20	$4.9 \cdot 10^{-4}$	$8.8 \cdot 10^{-4}$
1	0.05	10	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$
1	0.05	20	$4.3 \cdot 10^{-4}$	$7.2 \cdot 10^{-4}$

Получить решение задачи (26), (50), (51) в конечной форме вряд ли возможно, поэтому воспользуемся итерационным подходом, предложенным в предыдущем разделе. Решение будем строить в виде $p(z) = p_1(z) + p_2(z)$, $q(z) = q_1(z) + q_2(z)$, где $p_1(z)$, $q_1(z)$ – частное решение системы (26), $p_2(z)$, $q_2(z)$ – решение краевой задачи для однородной системы

$$\begin{aligned} p_2'' &= 0, \quad p_2(z_1) = 0, \quad p_2'(z_2) = \frac{z_2}{\beta_2}, \\ q_2'' &= 0, \quad q_2(z_2) = 0, \quad q_2'(z_1) = -\frac{z_1}{\beta_1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Итерационная процедура имеет вид

$$p_{1(0)} \equiv 0, \quad q_{1(0)} \equiv 0, \quad (53)$$

$$p_{2(n)} = \frac{z_2}{\beta_2}(z - z_1), \quad q_{2(n)} = -\frac{z_1}{\beta_1}(z - z_2), \quad (54)$$

$$p_{(n)} = p_{1(n)} + p_{2(n)}, \quad q_{(n)} = q_{1(n)} + q_{2(n)}, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} p_{1(n+1)}'' &= -p_{(n)}' q_{(n)}' + \frac{1}{\beta_2 q_{(n)}} \left(z q_{(n)}' - \frac{2q_{(n)}}{2-\theta} + B_3 p_{(n)}^\mu q_{(n)}^{\theta-\mu} - B_4 q_{(n)}^\theta \right), \\ q_{1(n+1)}'' &= -p_{(n)}' q_{(n)}' - \frac{1}{\beta_1 p_{(n)}} \left(z p_{(n)}' - \frac{2p_{(n)}}{2-\theta} + A_3 q_{(n)}^\lambda p_{(n)}^{\theta-\lambda} - A_4 p_{(n)}^\theta \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Здесь $p_{(n)}$, $q_{(n)}$, $p_{i(n)}$, $q_{i(n)}$, $i = 1, 2$, – n -е итерации решений. Система (56) может быть решена аналогично (39) и (40).

Итерационный процесс останавливается при выполнении следующего критерия, соответствующего краевым условиям,

$$\max \{ |p_{(n+1)}(z_2) - p_{(n)}(z_2)|, |q_{(n+1)}(z_1) - q_{(n)}(z_1)| \} < \varepsilon, \quad (57)$$

где $\varepsilon > 0$ – заданное число.

Оценку точности алгоритма (53) – (57) проведем с помощью интегралов от невязок уравнений системы (26),

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{z_1}^{z_2} \left| \beta_1(pq'' + p'q') + zp' - \frac{2p}{2-\theta} + A_3q^\lambda p^{\theta-\lambda} - A_4p^\theta \right| dz, \\ I_2 &= \int_{z_1}^{z_2} \left| -\beta_2(qp'' + p'q') + zq' - \frac{2q}{2-\theta} + B_3p^\mu q^{\theta-\mu} - B_4q^\theta \right| dz. \end{aligned} \quad (58)$$

В табл. 3 приведены значения интегралов (58) в зависимости от числа точек коллокации N при следующих значениях параметров: $\alpha = 3.5$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0.2$, $\theta = 0.2$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = 4$, $\varepsilon = 10^{-10}$. Полученные результаты говорят о сходимости предложенного алгоритма и достаточной точности решения задачи (26), (50), (51).

Таблица 3. Погрешности (58) уравнений системы (26)

N	I_1	I_2
10	$9.8 \cdot 10^{-3}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$
20	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$4.9 \cdot 10^{-3}$
40	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
80	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$

Решение задачи (26), (50), (51) на отрезке $z \in [z_1, z_2]$ позволяет построить решение системы (19) вида (25) в произвольный момент времени $t > 0$ в области $x \in [z_1\varphi(t) - \alpha t, z_2\varphi(t) - \alpha t]$. Таким образом, найденное решение может быть использовано как тестовое для численного решения задачи (2), (3), когда (2) имеет вид (19), и в условиях (3) $a(t) = z_1\varphi(t) - \alpha t$, $b(t) = z_2\varphi(t) - \alpha t$.

Задача при тех же значениях параметров была решена с помощью предложенного численного алгоритма. Сравнение результатов расчетов с точным решением, показанное на рис. 2, еще раз подтверждает корректность алгоритма.

7 Заключение

Данной работой авторы продолжили изучение квазилинейной параболической системы второго порядка, предложенной Д. Мюрреем в качестве модели взаимодействия популяций «хищник-жертва». При этом основное внимание уделяется рассмотрению решений с нулевыми фронтами, на которых система вырождается. Важнейшей целью на настоящем этапе исследований стал поиск таких случаев, для которых в области, ограниченной нулевыми фронтами, обе искомые функции положительны, т.е. допускающих осмысленную интерпретацию с точки зрения предметной области.

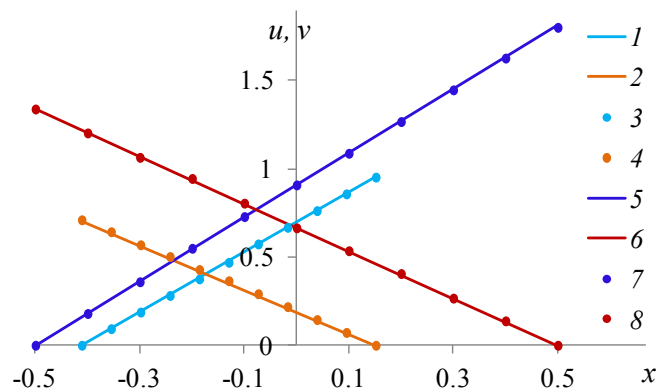


Рис. 2. Сравнение точного и численного решений, $t = 0.6$: 1 – $u(t, x)$, точное, 2 – $v(t, x)$, точное, 3 – $u(t, x)$, численное, 4 – $v(t, x)$, численное; $t = 1$: 5 – $u(t, x)$, точное, 6 – $v(t, x)$, точное, 7 – $u(t, x)$, численное, 8 – $v(t, x)$, численное.

Основным фундаментальным результатом работы является доказательство теоремы существования у рассмотренной системы в случае различных нулевых фронтов для двух искомых функций нетривиального решения типа диффузионной волны, при этом последнее представлено в виде степенных рядов с рекуррентно определяемыми коэффициентами, и рекурсия основана на использовании обобщения классической формулы Фаа-ди-Бруно. Конструктивность доказательства позволила провести качественный и количественный анализ приближенных решений задачи в виде отрезков степенных рядов и сделать содержательные выводы об их применимости.

Для частного случая найден новый класс точных решений системы, построение которого посредством обобщенного разделения переменных сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что, по крайней мере, в некоторых случаях решения обладают искомым свойством: существует непустая область, в которой обе искомые функции положительны.

Предложен пошаговый численный алгоритм с разностной дискретизацией по времени. На каждом шаге итерационно строится непрерывное по пространственной переменной решение на основе метода коллокаций и аппроксимации радиальными базисными функциями. Эффективность и сходимость алгоритма продемонстрирована с помощью оценки невязок уравнений системы и сравнением с построенным точным решением.

Таким образом, проведено комплексное исследование рассмотренной системы, при этом все полученные результаты имеют смысл с точки зрения предметной области. Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны как с ослаблением требований к гладкости входных данных в теореме 1, так и с рассмотрением иных, отличных от

(3), граничных условий, порождающих решения с искомыми свойствами (нулевыми фронтами).

References

- [1] J.D. Murray, *Mathematical biology. Vol 2: Spatial models and biomedical applications. Interdisciplinary applied mathematics, Vol. 18*, Springer, New York, 2003. Zbl 1006.92002
- [2] O. Ladyzenskaja, V. Solonnikov, N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs, Vol 23*, American Mathematical Society, Providence, 1968. Zbl 0174.15403
- [3] W. Allegretto, G. Fragnelli, P. Nistri, D. Papini, *Coexistence and optimal control problems for a degenerate predator-prey model*, J. Math. Anal. Appl., **378**:2 (2011), 528–540. Zbl 1210.49042
- [4] A.L. Kazakov, L.F. Spevak, *Exact and approximate solutions of a degenerate reaction-diffusion system*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **62**:4 (2021), 673–683. Zbl 1486.35107
- [5] V. Volpert, S. Petrovskii, *Reaction-diffusion waves in biology*, Phys. Life Rev., **6**:4 (2009), 267–310.
- [6] A.S. Bratus, S.V. Drozhzhin, T.S. Yakyshkina, *Mathematical models of evolution and dynamics of replicator systems*, URSS, Moscow, 2023.
- [7] B. Telch, *Global boundedness in a chemotaxis quasilinear parabolic predator-prey system with pursuit-evasion*, Nonlinear Anal., Real World Appl., **59** (2021), 103269. Zbl 1464.35145
- [8] W. Cintra, C.A. dos Santos, J. Zhou, *Coexistence states of a Holling type II predator-prey system with self and cross-diffusion terms*, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B, **27**:7 (2022), 3913–3931. Zbl 1501.35181
- [9] J.R. Potts, S.V. Petrovskii, *Fortune favours the brave: Movement responses shape demographic dynamics in strongly competing populations*, J. Theor. Biol., **420** (2017), 190–199. Zbl 1370.92143
- [10] V. Volpert, S. Petrovskii *Reaction-diffusion waves in biology: new trends, recent developments*, Phys. Life Rev., **52** (2025), 1–20.
- [11] A. Kolmogorov, I. Petrovskii, N. Piskunov *Study of a diffusion equation that is related to the growth of a quality of matter and its application to a biological problem*, Moscow University Mathematics Bulletin, **1** (1937), 1–26.
- [12] R.A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics, **7** (1937), 353–369. Zbl 63.1111.04
- [13] H. Malchow, S.V. Petrovskii, E. Venturino, *Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology: Theory, Models, and Simulation*, CRC Press, New York, 2007. Zbl 1298.92004
- [14] M. Banerjee, M. Kuznetsov, O. Udovenko, V. Volpert, *Nonlocal reaction-diffusion equations in biomedical applications*, Acta Biotheor., **70**:2 (2022), 1–28.
- [15] Ju. Brasseur, J. Coville, *Propagation phenomena with nonlocal diffusion in presence of an obstacle*, J. Dyn. Differ. Equations, **35**:1 (2023), 237–301. Zbl 1523.35210
- [16] A.V. Budyansky, K. Frischmuth, V.G. Tsybulin, *Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B, **24**:2 (2019), 547–561. Zbl 1406.35423
- [17] M.S. Rasulov, Sh.M. Jamoldinova, *A Diffusive Predator-Prey System with a Free Boundary*, Vestn. KRAUNTS., Fiz.-Mat. Nauki, **50**:1 (2025), 62–77. Zbl 8057418
- [18] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer-Verlag, New York, 1993. Zbl 0794.35090

- [19] L.C. Evans, *Partial differential equations. 2nd ed.*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010. Zbl 1194.35001
- [20] Ya.B. Zel'dovich, A.S. Kompaneets, *Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature*, Collection of papers dedicated to 70th anniversary of A.F. Ioffe (in Russian) (1950), 61–71.
- [21] A.F. Sidorov, *Selected Works: Mathematics and Mechanics*, Fizmatlit, Moscow, 2001.
- [22] A.L. Kazakov, Sv.S. Orlov, S.S. Orlov, *On some exact solutions of the nonlinear heat equation*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **22**:1 (2016), 112–123.
- [23] A.L. Kazakov, *On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1057–1068. Zbl 1423.35183
- [24] P.A. Kuznetsov, *Analytical diffusion waves in a nonlinear parabolic “predator–prey” model*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **28**:2 (2022), 158–167.
- [25] A.L. Kazakov, P.A. Kuznetsov, *Analytical solutions with zero front to the nonlinear degenerate parabolic system*, Differ. Equ., **58**:11 (2022), 1457–1467. Zbl 1506.35031
- [26] A.L. Kazakov, L.F. Spevak, *Exact and approximate solutions to the quasilinear parabolic system “predator–prey” with zero fronts*, J. Math. Sci., **292** (2025), 591–600.
- [27] M.Yu. Filimonov, *Application of method of special series for solution of nonlinear partial differential equations*, AIP Conference Proceeding, **40** (2014), 218–223.
- [28] O.S. Rozanova, *On the solution to the Kolmogorov-Feller equation arising in a biological evolution model*, Mosc. Univ. Math. Bull., **78**:6 (2023), 276–280. Zbl 1539.60089
- [29] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Interscience, New York, 1962. Zbl 0099.29504
- [30] S.G. Krantz, H.R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions. 2nd ed.*, Birkhauser Verlag, Boston, 2002. Zbl 1015.26030
- [31] A.B. Shabat, M.Kh. Efendiev, *On applications of Faà-di-Bruno formula*, Ufa Math. J., **9**:3 (2017), 131–136. Zbl 1463.37041
- [32] A.L. Kazakov, P.A. Kuznetsov, L.F. Spevak, *Construction of solutions to the boundary value problem with singularity for a nonlinear parabolic system*, J. Appl. Ind. Math., **15**:4 (2021), 616–626. Zbl 1511.35082
- [33] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev, *Handbook of nonlinear partial differential equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton - London - New York, 2003. Zbl 1053.35001
- [34] A. Kazakov, *Solutions to nonlinear evolutionary parabolic equations of the diffusion wave type*, Symmetry, **13**:5 (2021), Paper No. 871.
- [35] A.L. Kazakov, L.F. Spevak, *Exact and approximate solutions of a degenerate reaction–diffusion system*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **62**:4 (2021), 673–683. Zbl 1486.35107
- [36] C. Clavero, J.L. Gracia, *An improved uniformly convergent scheme in space for 1D parabolic reaction–diffusion systems*, Appl. Math. Comput., **243** (2014), 57–73. Zbl 1336.65132
- [37] R.M.P. Almeida, S.N. Antontsev, J.C.M. Duque, *Discrete Solutions for the Porous Medium Equation with Absorption and Variable Exponents*, Math. Comput. Simul., **137** (2017), 109–129. Zbl 1540.76073
- [38] R.M.P. Almeida, J.C.M. Duque, J. Ferreira, R.J. Robalo, *Finite element schemes for a class of nonlocal parabolic systems with moving boundaries*, Appl. Numer. Math., **127** (2018), 226–248. Zbl 1382.65464
- [39] L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, D. Nardini, *The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction*, In: Finite elements in water resources VI, Berlin: Springer-Verlag, 1986, 801–811.
- [40] M. Tanaka, T. Matsumoto, S. Takakuwa, *Dual reciprocity BEM for time-stepping approach to the transient heat conduction problem in nonlinear materials*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., **195** (2006), 4953–4961. Zbl 1126.80008

- [41] S.A. AL-Bayati, L.C. Wrobel, *The dual reciprocity boundary element formulation for convection–diffusion–reaction problems with variable velocity field using different radial basis functions*, nt. J. Mech. Sci., **145** (2018), 367–377.
- [42] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, *Meshless methods: A review and computer implementation aspects*, Math. Comput. Simul., **79**:3 (2008), 763–813. Zbl 1152.74055
- [43] W. Chen, Z.J. Fu, C.S. Chen, *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [44] W.-H. Luo, T.-Z. Huang, X.-M. Gu, Y. Liu, *Barycentric rational collocation methods for a class of nonlinear parabolic partial differential equations*, Appl. Math. Lett., **68** (2017), 13–19. Zbl 1361.65082
- [45] C.S. Chen, A. Karageorghis, Y.S. Smyrlis, *The method of fundamental solutions: a meshless method*, Dynamic Publishers, Atlanta, 2008.
- [46] A. Kazakov, A. Lempert, L. Spevak, O. Nefedova, *On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term*, Symmetry, **12**:6 (2020), Paper No. 921.
- [47] B. Fornberg, N. Flyer, *Solving PDEs with radial basis functions*, Acta Numerica, **24** (2015), 215–258. Zbl 1316.65073

KAZAKOV ALEXANDER LEONIDOVICH
 MATROSOV INSTITUTE FOR SYSTEM DYNAMICS AND CONTROL THEORY,
 STR. LERMONTOV, 134,
 634033, IRKUTSK, RUSSIA
Email address: kazakov@icc.ru

SPEVAK LEV FRIDRIKHOVICH
 THE INSTITUTE OF ENGINEERING SCIENCE,
 STR. KOMSOMOLSKAYA, 34,
 620049, EKATERINBURG, RUSSIA
Email address: lfs@imach.uran.ru