

УСЕЧЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА —ХОПФА С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СИМВОЛОМ

А.Ф. Воронин 

Представлено И.В. Подвигиным

Abstract: The paper provides sufficient conditions for the correct solvability of the truncated Wiener-Hopf equation with a real symbol.

Keywords: truncated Wiener —Hopf equation, correctness, existence, uniqueness, stability, real symbol.

1 Введение*

Рассматривается уравнение в свертках второго рода на конечном интервале, которое называют также усеченным уравнением Винера —Хопфа:

$$u(t) - \int_0^\tau k(t-s)u(s) ds = f(t), \quad t \in (0, \tau), \quad (1)$$

где

$$k \in L_1(R), \quad f \in L_1(0, \infty), \quad \tau > 0. \quad (2)$$

Легко видеть, что значения функции $k(t)$ вне интервала $(-\tau, \tau)$ и функции $f(t)$ вне интервала $(0, \tau)$ не влияют на решение уравнения (1). Для удобства считаем, что $k(t)$, $f(t)$ — заданные функции при $t \in (-\tau, \tau)$

VORONIN, A.F., THE TRUNCATED WIENER —HOPF EQUATION WITH A REAL SYMBOL.
© 2025 Воронин А.Ф..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

Поступила 1 ноября 2025 г., опубликована 29 декабря 2025 г.

и $t \in (0, \tau)$ соответственно, и произвольные при $t \notin (-\tau, \tau)$ и $t > \tau$ соответственно.

Решение уравнения (1) при условии (2) (решение задачи (1)–(2)) будем искать в $L_1(0, \tau)$.

Символом уравнения (1) называют функцию S :

$$S(x) := 1 - \mathcal{F}k(x), \quad x \in R, \quad (3)$$

где \mathcal{F} – преобразование Фурье,

$$\mathcal{F}k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{ixt} dt, \quad x \in R.$$

Уравнения типа свертки тесно связаны с различными приложениями. Это задачи классической математической физики и ее обратные задачи, задачи информатики, всевозможные задачи современной техники и экономики: ядерной физики, автоматического управления, теории игр, масштабного обслуживания и другие [1, с. 6]. Заметим, что в [1] рассматриваются приложения уравнений Винера –Хопфа, усеченные же уравнения Винера –Хопфа имеют более широкую область применений. Например, усеченные уравнения Винера –Хопфа лежат в основе одной из модификаций метода Гельфанд–Левитана–Марченко–Крейна [2]–[3]. Метод используется для решения множества обратных задач, таких как обратная задача рассеяния или обратные задачи для уравнений волнового типа. Кроме того, в алгебре Винера порядка два задача факторизации сводится к усеченному уравнению Винера –Хопфа [4]–[5].

К настоящему времени не существует общей теории уравнения (1) (в отличие от уравнения Винера –Хопфа [1], [6]). Более того, не существует теории корректности задачи (1)–(2) с обозримыми условиями корректности. Успех в исследовании задачи (1)–(2) достигнут лишь в частных случаях:

В [7] задача (1)–(2) исследована при условии, что ядро имеет следующий общий вид:

$$k(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{m_j} c_{lj} e^{p_j t^l}, \quad t \in (-\tau, \tau),$$

где c_{lj}, p_j – комплексные постоянные.

В [8, теорема 7.2] показано, что существует $\tau_1 > 0$, такое что при всех $\tau > \tau_1$ решение задачи (1)–(2) существует и единствено, если выполнено следующее условие

$$S(x) \neq 0, \quad x \in R, \quad \text{Ind } S(x) := \frac{1}{2\pi} \Delta_{\mathbb{R}} \arg S(x) = 0, \quad (4)$$

где $\text{Ind } S(x)$ – индекс функции S .

В [9] приведены результаты исследования задачи (1)–(2) при выполнении неравенства в (4) и условия

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}k(x)/S(x)\}(t) = 0, \quad t < -\tau,$$

где \mathcal{F}^{-1} – обратное преобразование Фурье.

Случай, когда функция k является периодической, с периодом τ , исследован в [10].

Положим

$$k_{\pm}(t) = \theta(\pm t) k(t), \quad t \in R,$$

где θ – функция Хевисайда.

Имеем

$$k(t) = k_{-}(t) + k_{+}(t), \quad t \in R, \quad \mathcal{F}k_{\pm}(x) = \mathcal{F}\{\theta(\pm t)k(t)\}(x).$$

Хорошо известно, для уравнения типа сверток второго рода на полубесконечном интервале (уравнения Винера –Хопфа) и для скалярной краевой задачи Римана существуют развитые теории (см., например, [1],[6]). Взаимосвязь (эквивалентность) между уравнением Винера –Хопфа и скалярной краевой задачей Римана –Гильберта была найдена в середине прошлого века (см. исторические сведения в [1]).

Изучение уравнений типа свертки на конечном интервале с помощью векторной краевой задачи Римана –Гильберта началось, по-видимому, с работы [11]. Развитие этого направления исследования смотри в [12].

В работах автора (см., например, [4]–[5]) развивается направление, в котором изучается векторная краевая задача Римана –Гильберта (задача факторизации) с помощью уравнения типа свертки (1). Была получена формула взаимосвязи (и найдены условия эквивалентности) между задачей (1)–(2) и краевой задачей Римана –Гильберта с матричным коэффициентом, допускающим стандартную факторизацию в алгебре Винера порядка 2. Показано [4], что широкий класс краевых задач Римана –Гильберта (задач факторизации) сводится к задаче (1)–(2).

В данной работе построена матрица-функция, которая допускает каноническую факторизацию в алгебре Винера порядка 2. Показано, что задача Римана –Гильберта, коэффициент которой является построенная матрица-функция, сводится к задаче (1)–(2) с вещественным символом. В виду того, что существование канонической факторизации матрицы-функции гарантирует корректную разрешимость соответствующей краевой задачи Римана –Гильберта (см. ниже теорему 1), то по доказанной ниже теореме 2 были получены условия корректной разрешимости задачи (1)–(2) с вещественным символом (см. ниже теоремы 3,4).

Прежде чем перейти непосредственно к краевой задаче Римана –Гильберта и взаимосвязи этой задачи с усеченным уравнением Винера –Хопфа, введем следующие обозначения. Для $1 \leq n, m \leq 2$ положим $L_{n \times m}$ – пространство $n \times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, $\mathcal{F}f$ – образ Фурье матрицы-функции $f \in L_{n \times m}$. \mathbb{R} – расширенная вещественная прямая (\mathbb{R} – вещественная прямая); $\mathbb{W}^{n \times n}$ – алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$, где C – постоянная матрица порядка n и $f \in L_{n \times n}$; $\mathbb{W}_+^{n \times n}$ ($\mathbb{W}_-^{n \times n}$) – подалгебра в $\mathbb{W}^{n \times n}$, состоящая из матриц-функций вида $C + \mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$); при $C=0$ соответствующие алгебры и подалгебры будем снабжать

нижним индексом 0 ($\mathbb{W}_0^{n \times n}$, $\mathbb{W}_{0\pm}^{n \times n}$). При $n = 1$ верхний индекс $n \times n$ при \mathbb{W} будем опускать. Если B — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}B$ обозначим группу из обратимых элементов в B . Через $\mathbb{W}^{n \times 1}$, $\mathbb{W}_{\pm}^{n \times 1}$ обозначим группы, состоящие из векторов столбцов матриц-функций из алгебр $\mathbb{W}^{n \times n}$, $\mathbb{W}_{\pm}^{n \times n}$ соответственно.

2 Краевая задача Римана —Гильберта

Рассмотрим краевую задачу Римана —Гильберта на расширенной прямой \mathbb{R} , в которой требуется найти вектор-функции $\Phi^{\pm} := (\Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm})^T \in \mathbb{W}_{0\pm}^{2 \times 1}$ по краевому условию:

$$\Phi^+(x) = M(x) \Phi^-(x) + (0, q^-(x))^T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau} m^-(x) \\ e^{-ix\tau} m^+(x) & 1 + m_{22}(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{G}\mathbb{W}^{2 \times 2}, \quad (0, q^-)^T \in \mathbb{W}_{0-}^{2 \times 1}, \quad (6)$$

$$q^-(x) = \int_{-\tau}^0 q_-(t) e^{ixt} dt, \quad q_- \in L_1(-\tau, 0), \quad (7)$$

$$m^{\pm} \in \mathbb{W}_{0\pm}, \quad 1 + m_{22}(x) = d_M(x) + m^+(x)m^-(x), \quad d_M \in \mathcal{G}\mathbb{W}. \quad (8)$$

Легко видеть, что определитель матрицы M равен d_M ($\det M = d_M$).

Считаем, что

$$\kappa := \text{Ind } d_M(x) = 0.$$

Следовательно, справедлива следующая факторизация функции $d_M(x)$:

$$d_M(x) = d_M^+(x) d_M^-(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{где } d_M^{\pm} \in \mathcal{G}\mathbb{W}_{\pm}. \quad (9)$$

Ниже приведем хорошо известные результаты из теории краевой задачи Римана —Гильберта и факторизации матриц-функций (см., например, [13, гл. I], [14, §7]).

Будем говорить, что матрица $M \in \mathcal{G}\mathbb{W}^{2 \times 2}$ допускает стандартную (левую) факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$M(x) = M_+(x) D(x) M_-(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $M_{\pm} \in \mathcal{G}\mathbb{W}_{\pm}^{2 \times 2}$ (M_{\pm} — фактор-множители), $D(x)$ - диагональная матрица-функция,

$$D(x) = \left\{ \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\kappa_1}, \left(\frac{x-i}{x+i} \right)^{\kappa_2} \right\},$$

$\kappa_1 \geq \kappa_2$ — частные индексы матрицы M (целые числа), $\kappa = \text{Ind} \det M(t) = \sum_{j=1}^2 \kappa_j$ — суммарный индекс матрицы M .

Корректность краевой задачи Римана определяют частные индексы ее матричного коэффициента. В частности, имеет место следующая

Теорема 1. Пусть суммарный индекс матрицы $M(t)$ равен нулю. Тогда для устойчивости чисел p и l (где l – число линейно независимых решений, p – число условий разрешимости задачи Римана –Гильберта (5)–(6)) относительно элементов матрицы $M(x)$ необходимо и достаточно, чтобы частные индексы матрицы $M(x)$ были равны нулю. Кроме того, если частные индексы матрицы $M(x)$ равны нулю, то однородная задача Римана –Гильберта (5)–(6) имеет только тривиальное решение, а неоднородная задача корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво по отношению к коэффициентам задачи M и q^-).

3 Взаимосвязь между краевой задачей Римана –Гильберта (5)–(6) и задачей (1)–(2)

Положим

$$w_\tau^\pm(x) := d_M^\pm(x) \mp m^\pm(x), \quad \mathcal{F}f(x) := \frac{e^{ix\tau} q^-(x)}{w_\tau^+(x)}, \quad (10)$$

$$S(x) := \frac{d_M(x) + m^+(x)m^-(x)}{w_\tau^-(x)w_\tau^+(x)}, \quad (11)$$

где

$$|w_\tau^\pm(z)| > 0, \quad \pm \operatorname{Im} z \geq 0 \quad (z = x + iy), \quad (12)$$

S – символ уравнения (1).

Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены соотношения в (10)–(12). Тогда решение $u(t)$ (образ Фурье решения) усеченного уравнения Винера –Хопфа (1) при ограничении (2) выражается через решение краевой задачи Римана (5)–(9) по формуле:

$$\mathcal{F}u(x) = \Phi_1^+(x) + e^{ix\tau} d_M^-(x)\Phi_2^-(x). \quad (13)$$

Доказательство. Перенесем вектор-столбец $(0, q^-)^T$ в левую часть краевого условия (5) и обозначим

$$\phi_2(x) := \Phi_2^+(x) - q^-.$$

Далее будем рассуждать также как при доказательстве [4, теоремы 3] вплоть до равенства [4, (2.9)], в котором, в нашем случае

$$C_2 = 0 = \hat{f} = 0, \quad \Psi_1^+ = \Phi_1^+ + e^{ix\tau} d_M^-\Phi_2^-.$$

Таким образом, равенство [4, (2.9)] будет иметь вид:

$$(1 - \mathcal{F}k(x))\Psi_1^+(x) - \frac{\Phi_2^+(x) - q^-(x)}{w_\tau^+(x)}e^{ix\tau} = \frac{d_M^-(x)\Phi_1^-(x)}{w_\tau^-(x)}, \quad x \in R. \quad (14)$$

Из равенства (14), с учетом второго равенства в (10) и соотношений в [4, (2.10)–(2.13)] (при $C_2 = 0$), получим исходное уравнение (1). В последнем

$$f(t) = -\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{ix\tau}q^-(x)}{w_\tau^+(x)}\right\}(t), \quad k(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1 - S(x)\}(t), \quad (15)$$

где S – символ уравнения (1), который определен формулой (11).

□

Отметим, что выражения для символа уравнения в (11) имеет эквивалентную форму [5, формула (1.7)]:

$$S(x) = \frac{d_M^+(x)}{w_\tau^+(x)} + \frac{d_M^-(x)}{w_\tau^+(x)} - 1. \quad (16)$$

4 Условия для корректной разрешимости задачи Римана —Гильберта (5)–(6)

Из теоремы 1 следует, что для корректной разрешимости задачи Римана —Гильберта (5)–(6) необходимо и достаточно существование канонической факторизации матрицы $M(x)$ в (6). Найдем достаточные условия для существования канонической факторизации матрицы $M(x)$. Справедлива

Лемма 1. *В следующих двух случаях матрица $M(x)$ в (6) допускает каноническую факторизацию (задача Римана —Гильберта (5)–(6) корректно разрешима):*

$$\begin{aligned} (i) \quad & m^+ = \overline{m^-}, \quad d_M^\pm = 1; \\ (ii) \quad & m^+ = -\overline{m^-}, \quad d_M^\pm = 1 \pm m^\pm, \\ & d_M^-(x) = 1 - m^-(x) \neq 0, \quad m^-(x) + \overline{m^-(x)} < 1, \quad x \in R. \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Доказательство начнем со случая (i). Легко видеть, что в этом случае матрица-функция $M(x)$ положительно определенная. Тогда матрица-функция $M(x)$ допускает каноническую факторизацию [15].

Перейдем к доказательству случая (ii). В этом случае матрица-функция $M(x)$ имеет следующий вид:

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{ix\tau}m^-(x) \\ -e^{-ix\tau}\overline{m^-(x)} & 1 - m^-(x) - \overline{m^-(x)} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$M_R(x) := \frac{M(x) + M^*(x)}{2} = \left\{1, 1 - m^-(x) - \overline{m^-(x)}\right\},$$

где

$$M^*(x) = \overline{M^T(x)}, \quad T \text{ – знак транспонирования.}$$

Из второго неравенства в (17) следует, что $\det M_R(x) \neq 0$, $x \in R$. Таким образом, эрмитова матрица-функция $M_R(x)$ положительно определена.

Тогда по [14, теорема 8.1] получим, что матрица-функция $M(x)$ допускает каноническую факторизацию в случае (ii). \square

5 Уравнение (1) с вещественным символом

Имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство*

$$\|k_-\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |k_-(t)| dt < 1. \quad (18)$$

Если символ уравнения (1) веществен и для него справедливо неравенство

$$S(x) = 1 - \mathcal{F}k_-(x) - \overline{\mathcal{F}k_-(x)} > 0, \quad x \in R, \quad (19)$$

то уравнение (1) корректно разрешимо в $L_1(0, \tau)$ для любой его правой части $f \in L_1(0, \tau)$.

Доказательство. Поставим в соответствие задаче (1)–(2) краевую задачу Римана — Гильберта (5)–(6) так, чтобы выполнялись теорема 2 и лемма 1 с условием (ii). Для этого положим

$$m^- := \mathcal{F}k_-, \quad m^+ := -\overline{m^-}, \quad d_M^\pm := 1 \pm m^\pm \quad (d_M = |1 - \mathcal{F}k_-|^2). \quad (20)$$

Тогда из (10)–(11) получим

$$w_\tau^\pm(x) = 1, \quad \mathcal{F}f(x) = e^{ix\tau} q^-(x), \quad S(x) = d_M(x) + m^+(x)m^-(x). \quad (21)$$

Легко видеть, что условия теоремы 2 и леммы 1 (с условием (ii)) выполнены. Следовательно, по лемме 1 краевая задача Римана — Гильберта (5)–(6) корректно разрешима. Тогда из теоремы 2 и равенств в (15) следует, что решение задачи (1)–(2) существует, единствено и справедлива оценка:

$$\|u\|_1 \leq \|\Phi_1^+\|_W + \|d_M^-(x)\|_W \|\Phi_2^-\|_W, \quad (22)$$

где $\|\cdot\|_W$ — норма в алгебре Винера. Из оценки (22) вытекает, что задача (1)–(2) устойчива. Из последнего равенства в (21) имеем

$$S(x) = 1 - \mathcal{F}k_-(x) - \overline{\mathcal{F}k_-(x)}. \quad (23)$$

\square

Рассмотрим другой случай, когда символ уравнения (1) веществен и задан формулой

$$S(x) = \frac{1}{1 + m^-(x)} + \frac{1}{1 + \overline{m^-(x)}} - 1, \quad \text{где } \|m^-\|_W < 1. \quad (24)$$

Имеет место

Теорема 4. Пусть для символа уравнения (1) выполняется условие (24), а для функций f и k справедливы равенства в (15), где

$$w_\tau^+ = 1 - \overline{m^-}.$$

Тогда уравнение (1) корректно разрешимо в $L_1(0, \tau)$ для любой его правой части $f \in L_1(0, \tau)$.

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3. Поставим в соответствие задаче (1)–(2) краевую задачу Римана — Гильберта (5)–(6) так, чтобы выполнялись теорема 2 и лемма 1 с условием (i). Для этого положим

$$m^+ := \overline{m^-}, \quad d_M^\pm = d_M := 1.$$

Тогда из (10)–(11) получим

$$w_\tau^\pm(x) = 1 \mp m^\pm, \quad \mathcal{F}f(x) = e^{ix\tau} \frac{q^-(x)}{w_\tau^+(x)}.$$

Легко видеть, что условия теорема 2 (с равенством (16)) и леммы 1 (с условием (i)) выполнены. Следовательно, по лемме 1 краевая задача Римана — Гильберта (5)–(6) корректно разрешима. Тогда по теореме 2, с учетом оценки (22), корректно разрешима и задача (1)–(2).

□

6 Примеры

1. Пусть символ уравнения (1) имеет вид (23) и справедливо неравенство

$$\|k_-\|_1 < 1/2.$$

Тогда

$$k(t) = k_-(t) + \overline{k_-(t)}, \quad \|k\|_1 < 1.$$

Из последнего неравенства по теореме Банаха об обратном операторе следует, что решение задачи (1)–(2) существует, единствено и представимо в виде абсолютно сходящегося ряда Неймана, т.е. устойчиво. Получим ниже такой же результат по теореме 3. Другими словами покажем, что в условиях примера теорема 3 выполняется. Легко видеть, что достаточно показать выполнение неравенства в (19). Для этого рассмотрим очевидную цепочку неравенств:

$$|\mathcal{F}k_-(x) + \overline{\mathcal{F}k_-(x)}| \leq 2|\mathcal{F}k_-(x)| \leq 2\|k_-\|_1 < 1.$$

Следовательно, $\mathcal{F}k_-(x) + \overline{\mathcal{F}k_-(x)} < 1$, и неравенство в (19) выполняется.

2. Пусть выполнены условия теоремы 3 или теоремы 4. Можно видеть, что выполняется и условие (4). Тогда по [8, теорема 7.2] существует $\tau_1 > 0$, такое что при всех $\tau > \tau_1$ решение задачи (1)–(2) существует и единствено. Что также следует из теоремы 3 или теоремы 4.

References

- [1] F. D. Gakhov and Yu. I. Cherskii, *Equations of Convolution Type* [in Russian], Nauka, Moscow, 1978.
- [2] V.G. Romanov, *On justification of the Gelfand-Levitan-Krein method for a two-dimensional inverse problem*, Sib. Math. J., **67**:3 (2021), 908–924. Zbl 1501.65056
- [3] S.I. Kabanikhin, M.A. Shishlenin, N.S. Novikov, N.M. Prokhorshin, *Spectral, Scattering and Dynamics: Gelfand-Levitan-Marchenko-Krein Equations*, Mathematics, **11**:21 (2023), 4458–4468.
- [4] A.F. Voronin, *On the method of factorization of matrix-functions in the Wiener algebra of order 2*, J. Appl. Ind. Math., **16**:2 (2022), 365–376. Zbl 1547.16023
- [5] A.F. Voronin, *Construction of a factorization of a certain class of matrix functions in the Wiener algebra of order two*, Russ. Math., **67**:3 (2023), 32–41.
- [6] M.G. Krein, *Integral equations on the half-line with kernel depending on the difference of the arguments*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:5 (1958), 3–120. Zbl 0088.30903
- [7] M.P. Ganin, *On a Fredholm integral equation whose kernel depends on the difference of the arguments*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2 (1963), 31–43. Zbl 0178.14404
- [8] I. Gohberg, I.A. Feldman, *Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution*, Nauka, Moscow, 1971 (in Russian). Zbl 0278.45008
- [9] A.F. Voronin, *A class of second-order convolution equations on an interval*, Differ. Equ., **36**:10 (2000), 1521–1528. Zbl 0990.45001
- [10] A.F. Voronin, *Analysis of a convolution integral equation of the second kind with periodic kernel on a finite interval*, J. Appl. Industr. Math., **4**:2 (2010), 282–289.
- [11] V.Yu. Novokshenov, *Convolution equations on a finite segment and factorization of elliptic matrices*, Math. Notes, **27**:6 (1980), 449–455. Zbl 0464.45003
- [12] A.F. Voronin, *Truncated Wiener-Hopf equation and matrix function factorization*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **17** (2020), 1217–1226. Zbl 1520.47040
- [13] I. Gohberg, M. A. Kaashoek and I. M. Spitkovsky, *An overview of matrix factorization theory and operator applications*, Factorization and integrable systems. Lecture notes of the summer school, Faro, Portugal, September 2000, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhauser, Basel, **141** (2003), 1–102. Zbl 1049.47001
- [14] I. Gohberg, M. G. Krein, *Systems of integral equations on the half-line with kernels depending on the difference of the arguments*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:2 (1958), 3–72. Zbl 0098.07402
- [15] Yu. L. Shmul'yan, *Riemann's problem for positive definite matrices*, Uspekhi Mat. Nauk, **8**:2 (1953), 143–145. Zbl 0052.29902

ANATOLY FEDOROVICH VORONIN
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: voronin@math.nsc.ru