S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 2, стр. 1473–1487 (2025) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.099 MSC 35G15, 35S99

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА-ЛЯВА

А.И. Кожанов, М. Ван

Представлено О.С. Розановой

Abstract: This work investigates the solvability of nonlocal boundary value problems for the generalized Boussinesq-Love differential equation in anisotropic S.L. Sobolev spaces. A distinctive feature of the studied problems is that their nonlocal conditions represent Samarskii-Ionkin type conditions with respect to the temporal (distinguished) variable. The main objective of this work is to prove existence and uniqueness theorems for regular solutions of the considered problems—specifically, solutions possessing all generalized derivatives in the S.L. Sobolev sense that appear in the corresponding equation.

Keywords: generalized Boussinesq–Love equation, nonlocal boundary value problems, generalized Samarskii–Ionkin conditions, regular solutions, existence, uniqueness.

Kozhanov A.I., M. Wang, Nonlocal Problems for the Generalized Boussinesq-Love Equation.

Работа выполнена в рамках государственного задания Иститута математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0008.

Поступила 10 июля 2025 г., опубликована 29 декабря 2025 г.

1 Введение

При математическом моделировании процессов распространения продольных волн в стержнях, длинных волн на воде, волн в плазме возникает дифференциальное уравнение

$$(\sigma^2\Delta - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \gamma^2\Delta u = 0, \qquad (*)$$

называемое уравнением Буссинеска [1]-[3]. Такое же уравнение (или более общее) возникает в теории упругости; называют его уравнением Буссинеска-Лява -см. [4]. В настоящей работе будет изучаться уравнение, которое можно назвать обобщенным уравнением Буссинеска-Лява - именно, уравнение вида (*), по с переменными коэффициентами и с дополнительными младшими производными.

Для собственно уравнений Буссинеска, для обобщенных уравнений Буссинеска-Лява разрешимость различных краевых и нелокально-краевых задач представляется достаточно хорошо изученной- см. работы [3]-[15]. В основном в этих работах изучались классические локальные краевые задачи, лишь в работах [10], [13], [15] изучались нелокальные задачи (то есть такие задачи, в которых вместо обычных граничных условий задаются условия, связывающие значения решения или (и) его производных в граничных точках со значениями решения или (и) производных в иных точках тех или других граничных или внутренних многообразий.

Именно нелокальные задачи в новых постановках и будут предметом исследования в настоящей работе.

Более точно, в работе будет изучаться разрешимость нелокальных задач для обобщенных уравнений Буссинеска-Лява с заданием условий по переменной t, являющихся условиями Самарского-Ионкина. Ранее подобные задачи для уравнений вида (*) и для их обобщений не изучались.

Нелокальные краевые задачи с условиями, которые в настоящее время называются условиями Самарского-Ионкина, впервые появились в математической литературе в 1977 году в статье Н.И. Ионкина [16]. В дальнейшем постановка [16] была обобщена А.А. Самарским в работе [17] (именно поэтому нелокальные условия типа условий [16] и их обобщений и называюся условиями Самарского-Ионкина). Разрешимость нелокальных задач с условиями Самарского-Ионкина для различных классов дифференциальных уравнений изучалась во многих работах; библиографию этих работ и последние результаты можно найти в монографии [18], статьях [19]-[21].

Как уже говорилось выше, в настоящей работе будут изучаться новые нелокальные краевые задачи для обобщенных уравнений Буссинеска-Лява.

Все построения и выкладки в работе будут основаны на свойствах функций из пространств Лебега L_P и Соболева ${W_p}^l$. Необходимые определение и описание требуемых свойств можно найти в монографиях [22]-[24].

Уточним, что целью работы является доказательство теорем существования и единственности регулярных решений тех или иных задач-то есть таких решений, которые имеют все обобщенные по Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

2 Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ с гладкой (для простоты - бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ конечной высоты T, $S = \Gamma \times (0, T)$ - боковая граница Q. Далее, пусть $a^{ij}(x)$, $b^{ij}(x)$, $c^{ij}(x)$, $i, j{=}1, \ldots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$ - заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $f(x, t)$ - заданная функция, определенная при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, γ - заданное действительное число. Определим дифференциальные операторы A, B, C и L по их действию на заданной функции $v(x, t)$:

$$Av = \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x)v_{x_j}) + a_0(x)v,$$
$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v,$$
$$Cv = \frac{\partial}{\partial x_i}(c^{ij}(x)v_{x_j}) + c_0(x)v,$$
$$Lv = Av_{tt} + Bv_t + Cv$$

(здесь и далее подразумевается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Нелокальная задача I. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = \gamma u(x, T), \quad u_t(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Нелокальная задача II. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условие*

$$u_t(x, 0) = \gamma u_t(x, T), \quad u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

В нелокальных задачах I и II уравнение (1) есть обобщение уравнения (*); именно поэтому авторы называют его обобщенным уравнением Буссинеска-Лява. Далее, в случае $\gamma = 0$ нелокальные задачи I и II становятся эллиптическими задачами с граничными данными на всей границе цилиндра Q, в случае $\gamma = 1$ нелокальные задачи I и II являются аналогами задачи Ионкина работы [16], в более же общем случае произвольного числа γ нелокальные задачи I и II будут задачами с обобщенным условиям Самарского-Ионкина работы [17].

Как уже говорилось выше, нелокальные задачи I и II для уравнений (1) ранее не изучались.

3 Разрешимость нелокальной задачи I

Доказательство разрешимости нелокальной задачи I будет проведено с помощью метода регуляризации и метода продолжения по параметру; поскольку же и для применения метода регуляризации, и для применения метода продолжения по параметру требуются подходящие априорные оценки, установим вначале их наличие.

Всюду ниже будем считать, что оператор A эллиптичен в $\overline{\Omega}$, оператор B эллиптико - параболичен; и что оба оператора симметричны:

$$a^{ij}(x)=a^{ji}(x),\quad i,j=1,\dots,n,\quad a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\alpha_0|\xi|^2,$$
$$x\in\overline{\Omega},\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha_0>0; \tag{5}$$
$$b^{ij}(x)=b^{ji}(x),\quad i,j=1,\dots,n,\quad b^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq 0,\quad x\in\overline{\Omega},\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Далее, пусть d_0 есть неотрицательное число такое, что выполняется условие

$$-c^{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq d_0a^{ij}(x)\xi_i\xi_j,\quad d_0>0,\quad x\in\overline{\Omega},\quad \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

и пусть функции $a_0(x)$ и $b_0(x)$ таковы, что для некоторого неотрицательного числа β_0 выполняется

$$|b_0(x)|\leq\beta_0|a_0(x)|,\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{8}$$

Определим линейеое пространство V и норму в нем:

$$V=\left\{v(x,t):\frac{\partial^k v(x,t)}{\partial t^k}\in L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),\, k=0,1,2\right\},$$

$$||v||_V=\left(\sum_{k=0}^{2}||\frac{\partial^k v}{\partial t^k}||^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Именно это пространство и будет основым в настоящей работе.

Всюду ниже термин „регулярное решение нелокальной задачи I“будет подразумевать решение из пространства V.

По заданному числу γ определим числа γ_1 и γ_2:

$$\gamma_1=max(1-\gamma^2,0),\quad \gamma_2=\gamma_1+\gamma^2-1.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (5)-(8)*, а также условия*

$$a^{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\quad b^{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\quad c^{ij}(x)\in C^1(\overline{\Omega}),$$
$$c^{ij}(x)=c^{ji}(x),\quad x\in\overline{\Omega},\quad i,j=1,\dots,n;$$
$$a_0(x)\leq 0,\quad b_0(x)\leq 0\quad |b_0(x)|\leq\beta_0|a_0(x)|,\quad x\in\overline{\Omega}; \tag{9}$$
$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\beta_1a^{ij}(x)\xi_i\xi_j,\quad c_0(x)\geq\bar{c_0}|a_0(x)|,\quad \bar{c_0}>0,\quad x\in\overline{\Omega},\quad \xi\in\mathbb{R}^n; \tag{10}$$
$$T^2d_0-T\beta_1-\gamma_2>0,\quad (T\beta_1+\gamma_2)^2+4(T\beta_1+\gamma_2)-4T^2d_0<0,$$

$$T^2\bar{c}_0 - T\beta_0 - \gamma_2 > 0, \quad (T\beta_0+\gamma_2)^2 + 4(T\beta_0+\gamma_2) - 4T^2\bar{c}_0 < 0. \tag{11}$$

Тогда для регулярных решений u(x,t) нелокальной задачи I имеет место априорная оценка

$$\int\limits_Q ta^{ij}u_{x_it}u_{x_jt}\,dx\,dt + \int\limits_Q ta^{ij}u_{x_i}u_{x_j}dxdt \le M_1\int\limits_Q f^2dxdt \tag{12}$$

с постоянной M_1, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x), i, j = 1, \ldots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, а также числами γ и T.

Доказательство. Умножим (1) на функцию $tu(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}dxdt + \frac{1-\gamma^2}{2}\int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)dx$$

$$-\int\limits_Q ta_0(x)u_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q[2tc_0(x)-b_0(x)]u^2dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_\Omega Tb^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)dx$$

$$-\frac{1-\gamma^2}{2}\int\limits_\Omega a_0(x)u^2(x,T)dx + \frac{T}{2}\int\limits_\Omega b_0(x)u^2(x,T)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_Q[b^{ij}(x)-2tc^{ij}(x)]u_{x_i}u_{x_j}dxdt = \int\limits_Q tfudxdt \tag{13}$$

Имеют место неравенства

$$\int\limits_\Omega a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)dx \le \frac{\delta_1^2}{T}\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}dxdt +$$

$$\frac{1}{T^2}(\frac{T}{\delta_1^2}+2)\int\limits_Q ta^{ij}u_{x_i}u_{x_j}dxdt \tag{14}$$

$$\int\limits_\Omega |a_0(x)|u^2(x,T)dx \le \frac{\delta_2^2}{T}\int\limits_Q t|a_0(x)|u_t^2dxdt + \frac{1}{T^2}(\frac{T}{\delta_2^2}+2)\int\limits_Q t|a_0(x)|u^2dxdt \tag{15}$$

(δ_1 и δ_2 - произвольные положительные числа; доказательство этих неравенств будет приведено ниже).

Вернемся к равенству (13). Используя условия леммы, а также неравенства (14) и (15), нетрудно от (13) перейти к оценке

$$\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}dxdt + d_0\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dxdt + \int\limits_Q t|a_0(x)|u_t^2dxdt$$

$$+\bar{c}_0\int\limits_Q t|a_0(x)|u^2dxdt \le \frac{\delta_1^2}{2T}(T\beta_1+\gamma_2)\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_it}u_{x_jt}dx +$$

$$\frac{1}{2T^2}(T\beta_1+\gamma_2)(2+\frac{T}{\delta_1^2})\int\limits_Q ta^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dxdt+\frac{\delta_2^2}{2T}(T\beta_0+\gamma_2)\int\limits_Q t|a_0(x)|u_t^2dxdt+$$

$$\frac{1}{2T^2}(T\beta_0+\gamma_2)(2+\frac{T}{\delta_2^2})\int\limits_Q t|a_0(x)|u^2dxdt+|\int\limits_Q tfudxdt|. \tag{16}$$

Чтобы из этой оценки вытекала требуемая априорная оценка (12), необходимо, чтобы для чисел δ_1 и δ_2 выполнялись неравенства

$$1-\frac{\delta_1^2}{2T}(T\beta_1+\gamma_2)>0, \tag{17}$$

$$d_0-\frac{1}{2T^2}(T\beta_1+\gamma_2)(2+\frac{T}{\delta_1^2})>0, \tag{18}$$

$$1-\frac{\delta_1^2}{2T}(T\beta_0+\gamma_2)>0, \tag{19}$$

$$\bar{c_0}-\frac{1}{2T^2}(T\beta_0+\gamma_2)(2+\frac{T}{\delta_1^2})>0. \tag{20}$$

Существование требуемых чисел δ_1 и δ_2 обеспечивается условием (11). Действительно, первые два условия (11) означают, что выполняются неравенства

$$\frac{T(T\beta_1+\gamma_2)}{4T^2d_0-4(T\beta_1+\gamma_2)}<\frac{2T}{T\beta_1+2\gamma_2}$$

Выберем число δ_1 так, чтобы выполнялось

$$\delta_1^2\in(\frac{T(T\beta_1+\gamma_2)}{4T^2d_0-4(T\beta_1+\gamma_2)},\frac{2T}{T\beta_1+2\gamma_2})$$

Очевидно, что для данного числа δ_1 выполняются неравенства (17) и (18).

Аналогично показывается, что при выполнении третьего и четвертого неравенств условия (11) можно выбрать число δ_2 так, чтобы выполнялись неравенства (19) и (20).

Используя указанный выше выбор чисел δ_1 и δ_2, оценивая последнее слогаемое правой части (16) с помощью неравенства Юнга и элементарных оценок для нормы функции $u(x,t)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, нетрудно получить требуемую оценку (12).

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполняются все условия леммы 1. Тогда для регулярных решений $u(x,t)$ нелокальной задачи I имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_i}^2dxdt\le M_2\int\limits_Q f^2dxdt \tag{21}$$

с постоянной M_2, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$, $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, а также числами γ и T.

Доказательство оценки (21) проводится применением к правой части равенство

$$\int_Q u_{x_i}^2 dxdt = -2\int_Q tu_{x_i}u_{x_it}dxdt - T\int_\Omega u_{x_i}^2(x,T)dx$$

неравенства Юнга и оценок (12) и (14).

Для получения следующих оценок потребуется вспомогательное неравенство для операторов A, B и $-C$.

Лемма 2. *Пусть выполняются все условия леммы 1, и пусть для опеpотора B имеем место представление*

$$B = a_1A + B_1. \tag{22}$$

Тогда для регулярных решений $u(x,t)$ нелокальной задачи I имеют место оценки

$$-\int_Q tAu(x,t)\cdot Cu(x,t)dxdt \geq k_0\int_Q t[Au(x,t)]^2dxdt - K_0, \tag{23}$$

$$\int_Q t[B_1u_t(x,t)]^2dxdt \leq k_1\int_Q t[Au_t(x,t)]^2dxdt + K_1, \tag{24}$$

в которых $t\in[0,T]$, числа k_0, k_1, K_0 и K_1 положительны и определяются функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$, i, j = 1, ..., n, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, $f(x,t)$, числами γ и T, а также областью Ω.

Доказательство. Требуемые оценки (23) и (24) нетрудно вывести, используя второе основное неравенство для эллиптических операторов - см.[23, гл. III, § 8], а также используя оценки (12) и (21).

Положим

$$\gamma_{20} = \gamma_2 + Ta_1, \quad T_0 = \frac{\gamma_{20}T}{2(T^2k_0 - \gamma_{20})}, \quad T_1 = \frac{2T}{\gamma_{20}},$$

$$\varphi(\theta) = 4(1 - \frac{\theta\gamma_{20}}{2T})(k_0 - (2 + \frac{T}{\theta})\frac{\gamma_{20}}{2T^2}) \quad (\theta > 0)$$

Лемма 3. *Пусть выполняются все условия леммы 1 и 2, а также условия*

$$a_1 \geq 0, \quad T^2k_0 - \gamma_{20} > 0, \quad \gamma_{20}^2 + 4\gamma_{20} < 4T^2k_0, \quad k_1 < min(\varphi(T_0), \varphi(T_1)).$$

Тогда для регулярных решений u(x,t) нелокальной задачи I имеет место априорная оценка

$$\int_Q [t(Au_t)^2 + t(Au)^2]dxdt \leq M_3\int_Q f^2dxdt \tag{25}$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$, i, j = 1, ..., n, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, $f(x,t)$, числами γ и T, а также областью Ω.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на функцию $-tAu(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q t[Au_t(x,t)]^2dxdt - \int\limits_Q tAu(x,t)Cu(x,t)dxdt + \frac{a_1}{2}\int\limits_Q [Au(x,t)]^2dxdt$$

$$+\frac{\gamma_1}{2}\int\limits_\Omega [Au(x,t)]^2dx = \frac{\gamma_{20}}{2}\int\limits_\Omega [Au(x,T)]^2dx + \int\limits_Q tAu(x,t)B_1u_t(x,t)dxdt$$

$$-\int\limits_Q tf(x,t)Au(x,t)dxdt \tag{26}$$

Используя условия леммы, оценку

$$\int\limits_\Omega [Au(x,T)]^2 \le \frac{\delta_1^2}{T}\int\limits_Q t[Au_t(x,t)]^2dxdt + \frac{1}{T^2}(2+\frac{T}{\delta_1^2})\int\limits_Q t[Au(x,t)]^2dxdt \tag{27}$$

(δ_1 - произвольное положительное число), а также неравенство Гельдера, нетрудно от (26) перейти к неравенству

$$\left(1-\frac{\delta_1^2\gamma_{20}}{2T}\right)\int\limits_Q t[Au_t(x,t)]^2dxdt + \left[k_0 - \frac{\gamma_{20}}{2T^2}(2+\frac{T}{\delta_1^2})\right]\int\limits_Q t[Au(x,t)]^2dxdt$$

$$\le k_1^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q t[Au(x,t)]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q t[Au_t(x,t)]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\left(\int\limits_Q tf^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_Q t[Au(x,t)]^2dxdt\right)^{\frac{1}{2}} + K_2 \tag{28}$$

с постоянной K_2, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$,i, j $= 1, \ldots,$ n, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, $f(x,t)$, числом T, а также областью Ω.

Зафиксируем число δ_1 так, чтобы выполнялось $T_0 < \delta_1^2 < T_1$. Заметим, что при таком выборе числа δ_1 числа $1-\frac{\delta_1^2\gamma_{20}}{2T}$ и $k_0 - \frac{\gamma_{20}}{2T^2}(2+\frac{T}{\delta_1^2})$ будут положительными. Далее, при указанном выборе числа δ_1 и при выполнении условий леммы квадратичная форма

$$\left(1-\frac{\delta_1^2\gamma_{20}}{2T}\right)\xi^2 - k_1^{\frac{1}{2}}\xi\eta + \left(k_0-\frac{\gamma_{20}}{2T^2}(2+\frac{T}{\delta_1^2})\right)\eta^2$$

будет положительно определена. Тогда из (28) и из неравенства Юнга и будет вытекать требуемая оценка (25).

Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть выполняются все условия леммы 3, и пусть число a_1 положительно. Тогда для регулярных решений $u(x,t)$ нелокальной задачи I справедлива оценка*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{Q} u^2_{x_i x_j} dxdt \le M_4 \int\limits_{Q} f^2 dxdt \tag{29}$$

с постоянной M_4, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$, $i,\ j = 1, \ldots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, числами γ и T, а также областью Ω.

Доказательство. Требуемую оценку нетрудно получить, если в дополнение к рассуждениям, проведенным при доказательстве леммы 4, применить второе основное неравенство для эллиптических операторов к третьему слагаемому левой части равенства (26).

Лемма 4. *Пусть выполняются все условия леммы 3, и пусть дополнительно число a_1 положительно*

Тогда для регулярных решений u(x,t) нелокальной задачи I имеет место априорная оценка

$$\int\limits_{Q} [Au_{tt}(x,t)]^2 dxdt + \int\limits_{Q} [Au_t(x,t)]^2 dxdt \le M_5 \int\limits_{Q} f^2 dxdt,$$

постоянная M_5 в которой определяется лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x)$, $c^{ij}(x)$,$i,\ j = 1, \ldots, n$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)$, числами γ и T, а также областью Ω.

Доказательство. Умножим уравнение (1) на функцию $Au_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Используя элементарное неравенство

$$\int\limits_{Q} v_t^2 dxdt \le \delta \int\limits_{Q} v_{tt}^2 dxdt + C(\delta) \int\limits_{Q} v^2 dxdt$$

в котором δ есть произвольное положительное число, и используя также оценку (29) и неравенство Юнга, нетрудно получить требуемую оценку.

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству разрешимости нелокальной задачи I.

Теорема 1. *Пусть выполняются все условия лемм 1-4. Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I имеет регулярное решение, причем ровно одно.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $\gamma < 1$.

Для чисел λ из отрезка [0,1] рассмотрим краевую задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lv = f - \frac{\lambda\gamma}{1-\lambda\gamma} Cv(x,T) \tag{30}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$v(x,0) = v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{31}$$

В этой задаче уравнение (30) при $\lambda \neq 0$ является "нагруженным" в терминологии работ [25], [26] уравнением. При $\lambda \neq 0$ краевые задачи (30), (2), (31) ранее не изучались, но при $\lambda = 0$ разрешимость этой задачи в классе регулярных решений очевидна - см., например работы [11, 12, 13]. Если теперь привлечь теорему о методе продолжения по параметру [27, гл. III, § 14], то задача (30), (2), (31) будет разрешима в классе регулярных решений для всех λ из отрезка [0,1] при наличии для всевозможных решений $v(x,t)$ этой задачи равномерной по λ априорной оценки

$$||v||_V \leq R_0||f||_{L_2(Q)} \tag{32}$$

Чтобы установить наличие искомой оценки, определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{\lambda\gamma}{1-\lambda\gamma}v(x,T) \tag{33}$$

Для этой функции выполняются уравнение (1), условие (2), а также условия

$$u(x,t) = \lambda\gamma u(x,T), \quad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Повторяя для функции $u(x,t)$ доказательство лемм 1-4, нетрудно установить наличие априорной оценки

$$||u||_V \leq \tilde{R}_0||f||_{L_2(Q)} \tag{34}$$

с постояной $\tilde{R}_0$, определяющейся лишь функциями $a^{ij}(x), b^{ij}(x), c^{ij}(x)$, i, j $= 1, \ldots,$ n, $a_0(x)$, $b_0(x)$ и $c_0(x)$, числами γ и T, а также областью Ω. Учитывая далее представление $v(x,t) = u(x,t) - \lambda\gamma u(x,T)$, получим, что для функции $v(x,t)$ имеет место требуемая оценка (32).

Из оценки (32), из разрешимости в пространстве V краевой задачи (30), (2), (31) при $\lambda = 0$ и из теоремы о методе продолжения по параметру следует, что существует функция $v(x,t)$, принадлежащая пространству V и являющая решением задачи (30), (2), (31) при $\lambda = 1$. Определенная формумой (33) при $\lambda = 1$ функция $u(x,t)$ и будет искомым решением нелокальной задачи I в случае $\gamma < 1$.

Рассмотрим теперь случай $\gamma = 1$. Положим $\gamma_m = 1 - \frac{1}{m}$, $m = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим семейство задач: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$u(x,t) = \gamma_m u(x,t), \quad u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{35}$$

Как следует из доказанного выше, нелокальная задача (30), (2), (35) имеет решение $u_m(x,t)$, принадлежащее пространству V. Для семейства функций $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$ имеет место равномерная по m априорная оценка (34). Используя далее свойство рефлексивности гильбертова пространства (точнее говоря, используя возможность выбора слабо сходящейся в V подпоследовательности $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, нетрудно показать, что существует принадлежащее пространству V решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I при $\gamma = 1$.

Наконец, пусть выполняется $\gamma > 1$.

Пусть λ есть число из отрезка [0,1] Положим

$$\psi(t) = \frac{t^2 - 2tT}{T^2}$$

Рассмотрим задачу: найти фукцию $v(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lv = f(x,t) + \frac{\lambda(\gamma-1)}{1+\lambda(\gamma-1)}L(\psi(t)v(x,T)) \tag{36}$$

и такую, что для нее выполняются условие (2), а также условия

$$v(x,0) - v(x,T) = 0, \quad v_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{37}$$

В этой задаче уравнение (36) при $\lambda \neq 0$ вновь есть нагруженное уравнение. Далее, при $\lambda = 0$ задача (36), (2), (37) представляет собой нелокальную задачу I в случае $\lambda = 1$; как показано выше, задача (36), (2), (37) при $\lambda = 0$ имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству V. Вновь согласно теореме о методе продолжения по параметру, для разрешимости задачи (36), (2), (37) при всех λ из отрезка [0,1] достаточно установить наличие оценки (33). Покажем, что при выполнении всех условий теоремы нужная оценка действительно имеет место.

Определим функцию $u(x,t)$:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{\lambda(\gamma-1)\psi(t)v(x,T)}{1+\lambda(\gamma-1)}$$

Для этой функции выполняются уравнение (1) и условие (2), а также условие

$$u(x,0) = [1+\lambda(\gamma-1)]u(x,T) \tag{38}$$

Другими словами, функцие $u(x,t)$ есть решение нелокальной задачи I с коэффициентом $\gamma^* = 1+\lambda(\gamma-1)$ в нелокальном условии (3). Поскольку для числа γ^* выполняются $0 < \gamma^* \leq \gamma$, то для функции $u(x,t)$ будет справедлива равномерная по λ априорная оценка в пространстве V. Но тогда для функции $v(x,t)$ будет иметь место оценка (32). Как уже говорилось выше, из разрешимости в пространстве V краевой задачи (36), (2), (37) при $\lambda = 0$ и из априорной оценки (32) следует, что краевая задача (36), (2), (37) будет разрешима в пространстве V при всех λ - то есть и при $\lambda = 1$. Решение же $v(x,t)$ задачи (36), (2), (37) дает требуемое решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I.

Единственность решения нелокальной задачи I в пространстве V при выполнении всех условий теоремы очевидным образом следует из доказанных априорных оценок.

Теорема полностью доказана.

4 Разрешимость нелокальной задачи II

Задача II будет изучена в случае $B = 0$. Основой для ее исследования будет теорема 1 о разрешимости нелокальной задачи I в пространстве V.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда для любой функции* $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,T) = 0$ *при* $x \in \Omega$ *нелокальная задача II для уравнения*

$$Au_{tt} + Cu = f(x,t)$$

имеет единственное регулярное решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $u_t(x,t) \in V$.

Доказательство. Рассмотрим задачу: найти функцию $w(x,t)$ такую, что для нее выполняются уравнения

$$Aw_{tt} + Cw = f_t(x,t)$$

а также условия (2) и (3). Согласно теореме 1 эта задача имеет решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству V. Определим фуцкцию $u(x,t)$ как решение задачи

$$u_t(x,t) = w, \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Эта функция и будет искомым решением нелокальной задачи II.

Единственность решений очевидна.

Теорема доказана.

5 Дополнение

1. Специальный вид операторов A, B и C - именно, самосопряженный, а также независимость их коэффициентов от переменной t, не являются существенными. Случай общих операторов A, B и C с младшими членами и коэффициентами, зависящими от всех переменных, исследуется в целом аналогично изложенному в основной части работы, но выкладки и условия при этом станут существенно более громоздкими.

2. Покажем, что неравенства (14) и (15) действительно имеют место

Имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,T)u_{x_j}(x,T)dx = 2\int\limits_{Q} ta^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dxdt$$

$$+2\int\limits_{Q} t^2a^{ij}(x)u_{x_it}u_{x_j}dxdt$$

используя неравенства Гельдера и Юнга, а также неравенство $t^2 \le tT$, нетрудно получить оценку (14).

Аналогично доказывается справедливость неравенства (15).

3. Аналогично выше изложенному можно изучить разрешимость и получить теоремы существования и единственности решений нелокальных задач I и II с заменой условий (3) или (4) на условия

$$u(x,0) = \gamma u(x,T), \quad u_t(x,T) + \mu u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_t(x,0) = \gamma u_t(x,T) + \mu u(x,T), \quad u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega$$

соответственно.

References

[1] G.B. Whitham, *linear and Nonlinear Waves,* John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1974. Zbl 0373.76001

[2] H. Ikezi, *Experimental Study of Solitons in Plasma*, in: Solitons in Action (Russian), Mir, Moscow (1981), 163—184.

[3] G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii, *Equations and systems which are not solved with respect to a higher derivative*, Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1998. Zbl 1053.35003

[4] V.I. Zhegalov, A.N. Mironov, E.A. Utkina, *Uravneniia s dominiruiushchei chastnoi proizvodnoi [Equations with Dominant Partial Derivative]*, Kazan Univ. Publishing, Kazan, 2014 (In Russian).

[5] A.A. Zamyshlyaeva, A.V. Yuzeeva, *The initial-finish value problem for the Boussinesq–Löve equation*, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **5** (2010), 23—31. Zbl 1231.34012

[6] A.A. Zamyshlyaeva, *Initial-Final Value Problem for the Nonhomogeneous Boussinesq-Love Equation*, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **10** (2011), 22—29. Zbl 1544.35010

[7] A.A. Zamyshlyaeva, E.V. Bychkov, *Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Modified Boussinesq Equation*, Differ. Equ., **60**:8 (2024), 1065–1073. Zbl 1554.35106

[8] S.A. Gabov, A.G. Sveshnikov, *Linear Problems in the Theory of Nonstationary Internal Waves*, Nauka, Moscow, 1990.

[9] T.D. Dzhuraev, A.K. Sopuev, *K teorii differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh chetvertogo poriadka [Theory of partial differential equations of fourth order]*, Tashkent, Fan, 2000 (In Russian).

[10] A.A. Alsykova, *Nonlocal Problems with Integral Conditions for Boussinesq Equation*, Mat. Zamet. SVFU, **23**:1 (2016), 3–11. Zbl 1399.35138

[11] V.I. Zhegalov, *On a Problem for the Generalized Boussinesq-Love Equation*, Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **23**:4 (2019), 771–776. Zbl 1449.35295

[12] A.I. Kozhanov, N.N. Shadrina, *Investigation of the influence of parameters on the correctness of the conjugation problem for the Boussinesq-Love*, Chelyabinskiy Fiz.-Mat. Zh., **7**:1 (2022), 30–42. Zbl 1494.35120

[13] L.S. Pulkina, *Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations*, Samara University Press, Samara, 2012 (in Russian).

[14] Sh. Amirov, A.I. Kozhanov, *Global Solvability of initial boundary-value problems for nonlinear analogs of the Boussinesq equation*, Math. Notes, **99**:2 (2016), 183–191. Zbl 1342.35240

[15] T.K. Yuldashev, *On the boundary value problem for a three-dimensional analog of the Boussinesq differential equation*, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, **158**:3 (2016), 424–433.

[16] N.I. Ionkin, *Solution of a Boundary Value Problem of Heat Conduction Theory with a Nonclassical Boundary Condition*, Differ. Uravn., **13**:2 (1977), 294–304. Zbl 0349.35040

[17] A.A. Samarskii, *Some problems in differential equation theory*, Differ. Uravn., **16**:11 (1980), 1925–1935. Zbl 0519.35069

[18] A.I. Kozhanov, *Nonlocal Problems and Problems with Integral Conditions for Partial Differential Equations: Summary of Results and Open Problems*, Nauka, Novosibirsk, 2024 (In Russian).

[19] A.I. Kozhanov, D. Mamanazarov, *Solvability of the generalized Ionkin problem for differential equations with multiple characteristics*, J. Math. Sci., **281**:6 (2024), 868–881. Zbl 1545.35032

[20] A.I. Kozhanov, *On the Solvability of Nonlocal Problems with Ionkin Conditions for Partial Differential Equations. II*, Mat. Zamet. SVFU, **31**:1 (2024), 48–55.

[21] A.I. Kozhanov, D.S. Khromchenko, *Nonlocal Problems with Integral-Perturbed A.A. Samarskii Condition for Third-Order Quasiparabolic Equations*, Mat. Zamet. SVFU, **30**:4 (2023), 12–23. Zbl 1553.35009

[22] S.L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1988.

[23] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*, Nauka, Moscow, 1973.

[24] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978. Zbl 0387.46033

[25] A.M. Nakhushev, *Loaded Equations and Their Applications*, Nauka, Moscow, 2012.

[26] M.T. Dzhenaliev, *On the Theory of Linear Boundary Value Problems for Loaded Differential Equations*, Computer Center of the Institute of Theoretical and Applied Mathematics, Almaty, 1995.

[27] V.A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

[28] A.I. Kozhanov, *To the Question of the Solvability of the Ionkin Problem for Partial Differential Equations*, Mathematics, **12**:3 (2024), 487.

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: kozhanov@math.nsc.ru

Min Wang
Novosibirsk State University,
pr. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: m.van2@g.nsu.ru