

***L_n -КЛАССЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ
КВАЗИМНОГООБРАЗИЕМ 3-СТУПЕННО
НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП***

В.В. Лодейщикова 

Представлено И.Б. Горшковым

Abstract: Let $L_n(\mathcal{N})$ be the class of all groups G in which the normal closure of each n -generated subgroup of G belongs to \mathcal{N} . Let \mathcal{N} be the quasivariety of nilpotent groups of class at most 3 without elements of orders 2 and 5 in which the quasi-identity $(\forall x)(\forall y)([x, y, x] = 1 \rightarrow [x, y, y] = 1)$ is true.

In this paper we prove that any group G belonging to the class $L_1(\mathcal{N})$ is 3-Engel. In particular, the result is true for the quasivariety generated by the free 2-generated nilpotent group of class at most 3.

Keywords: group, nilpotent group, quasivariety, Levi class.

1 Введение

Пусть \mathcal{N} – класс групп. Обозначим через $L_n(\mathcal{N})$ класс всех групп G , в которых нормальное замыкание $\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G$ любой n -порожденной подгруппы $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ группы G принадлежит \mathcal{N} .

Оператор L_n для каждого натурального числа n был введен в работе [1]. Было показано, что если \mathcal{N} – квазимногообразие групп, то $L_n(\mathcal{N})$

LODEISHCHIKOVA, V.V., L_n -CLASSES GENERATED BY THE QUASIVARIETY OF NILPOTENT GROUPS OF CLASS AT MOST 3.

© 2025 Лодейщикова В.В.

Поступила 30 апреля 2025 г., опубликована 3 декабря 2025 г.

также является квазимногообразием групп. При этом возникает цепочка

$$L_1(\mathcal{N}) \supseteq L_2(\mathcal{N}) \supseteq L_3(\mathcal{N}) \supseteq \dots \supseteq \mathcal{N},$$

в которой $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$.

В работе [2] найдены условия на \mathcal{N} , при выполнении которых последовательность $L_1(\mathcal{N}), L_2(\mathcal{N}), \dots$ содержит бесконечное множество различных квазимногообразий. В [3] доказано, что если G — группа без элементов порядка 2 и нормальное замыкание каждой 2-порожденной подгруппы группы G является нильпотентной группой ступени не более 3, то G — нильпотентная группа ступени не выше 4. Также показано, что в этом утверждении ограничение на элементы второго порядка убрать нельзя.

Изучение классов $L_n(\mathcal{N})$ началось с исследования классов $L(\mathcal{N}) = L_1(\mathcal{N})$, которые называются классами Леви, порожденными \mathcal{N} . В работах [4]-[8] исследовались классы Леви, порожденные почти абелевыми квазимногообразиями нильпотентных групп (т. е. неабелевыми квазимногообразиями, все собственные подквазимногообразия которых абелевы). Классы Леви, порожденные 2-ступенчато нильпотентными группами изучались также в [9]-[13].

В [14] показано, что класс Леви квазимногообразия правоупорядочиваемых групп строго содержит это квазимногообразие.

Данная работа продолжает исследования L_n -классов.

Всюду в работе \mathcal{N} — квазимногообразие нильпотентных ступени 3 групп без элементов порядков 2 и 5, в которых истинно квазитождество

$$(\forall x)(\forall y)([x, y, x] = 1 \rightarrow [x, y, y] = 1). \quad (1)$$

В настоящей работе доказано, что любая группа G , принадлежащая классу $L_1(\mathcal{N})$, является 3-энгелевой. В частности, результат справедлив для квазимногообразия $qF_2(\mathcal{N}_3)$.

2 Предварительные сведения

В работе используются обозначения:

$$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy;$$

$\langle x_1, x_2, \dots \rangle$ — группа, порожденная элементами x_1, x_2, \dots ;

$\langle x \rangle$ — циклическая группа, порожденная элементом x ;

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle^G = \langle x_1^g, \dots, x_n^g \mid g \in G \rangle$ — нормальное замыкание подгруппы

$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ в G ;

$q\mathcal{M}$ — квазимногообразие, порожденное множеством групп \mathcal{M} ;

если $\mathcal{M} = \{G\}$, то вместо $q\mathcal{M}$ будем писать qG ;

$F_n(\mathcal{M})$ — свободная группа ранга n в квазимногообразии \mathcal{M} ;

\mathcal{N}_c — многообразие нильпотентных групп ступени не выше c .

Стандартным образом определяем вес $w(a)$ коммутатора, считая, что

- 1) $w(x) = 1$, если x — предметная переменная,
- 2) $w(a) = w(u) + w(v)$, если $a = [u, v]$.

Дадим определение базисных коммутаторов от переменных x_1, \dots, x_r [15]:

- 1) $c_i = x_i, i = 1, \dots, r$ – базисные коммутаторы веса 1, $w(x_i) = 1$.
- 2) Пусть базисные коммутаторы весов, меньших n уже определены. Тогда базисными коммутаторами веса n являются коммутаторы $c_k = [c_i, c_j]$, где
 - a) c_i и c_j – базисные коммутаторы и $w(c_i) + w(c_j) = n$;
 - b) $c_i > c_j$, а если $c_i = [c_s, c_t]$, то $c_j \leq c_t$.
- 3) Коммутаторы веса n следуют за коммутаторами весов, меньших n , и между собой они упорядочены произвольным образом. Базисные коммутаторы считаем пронумерованными так, что они упорядочены по индексам.

Согласно [15], если F – свободная группа с порождающими x_1, \dots, x_r , то базисные коммутаторы веса k образуют свободный базис свободной абелевой группы F_k/F_{k+1} , где $F = F_1$, $F_k = [F_{k-1}, F]$ и

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_r = 1.$$

Напомним, что группа называется n -энгелевой, если

$$[x, \underbrace{y, \dots, y}_n] = 1$$

для всех $x, y \in G$.

Нам понадобятся следующие хорошо известные тождества, истинные в любой группе:

$$\begin{aligned} & (\forall x)(\forall y)(\forall z)([xy, z] = [x, z][x, y][y, z]), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, yz] = [x, z][x, y][x, y, z]), \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)([x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1) \text{ (тождество Витта).} \end{aligned}$$

Будем говорить, что коммутаторы в произвольной группе G обладают свойством линейности, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются равенства

$$[xy, z] = [x, z][y, z], \quad [x, yz] = [x, y][x, z].$$

При написании тождеств и квазитождеств кванторы всеобщности иногда будут опускаться.

3 Основные результаты

Предложение 1. *Любая группа G , принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является 4-энгелевой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in G$ и

$$\langle x \rangle^G = \langle x^y \mid y \in G \rangle = \langle x, [x, y] \mid y \in G \rangle.$$

По определению класса Леви $\langle x \rangle^G \in \mathcal{N}$. Элементы $x, [y, x] \in \langle x \rangle^G$ и поскольку $\langle x \rangle^G \in \mathcal{N}_3$, то в группе G для произвольных элементов x, y будет

верно равенство $[y, x, x, x, x] = 1$. Таким образом, группа G является 4-энгелевой. \square

Лемма 1. *Любая 2-порожденная группа G , принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 5.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную 2-порожденную группу $G \in L(\mathcal{N})$, $G = \langle x_1, x_2 \rangle$. Заметим, что по предложению 1 группа G является 4-энгелевой. Ясно, что $G = \langle x_1 \rangle^G \cdot \langle x_2 \rangle^G$. Нормальные замыкания $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ являются нильпотентными ступени не выше 3. По теореме Фиттинга [16] группа G нильпотентна ступени не выше 6. Таким образом, в группе G все коммутаторы веса 7 равны 1.

Для доказательства леммы достаточно показать, что значения всех базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1. Введем обозначения для базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} b_{61} &= [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]], & b_{62} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, [x_2, x_1]], \\ b_{63} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]], & b_{64} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1]], \\ b_{65} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1], & b_{66} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2], \\ b_{67} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2], & b_{68} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2], \\ b_{69} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_2]. \end{aligned}$$

Ввиду 4-энгелевости группы G получим, что

$$b_{65} = b_{66} = b_{69} = 1.$$

Поскольку элементы $[x_2, x_1], x_1 \in \langle x_1 \rangle^G$ и $\langle x_1 \rangle^G \in \mathcal{N}_3$, то $b_{62} = 1$. Аналогично из $[x_2, x_1, x_1], [x_2, x_1], x_2 \in \langle x_2 \rangle^G$ и $\langle x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}_3$ следует, что $b_{64} = b_{68} = 1$.

Так как G нильпотентна ступени 6, то в ней будет верно равенство:

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1, x_1]] = 1.$$

Из истинности в \mathcal{N} квазитождества (1) получим, что

$$[x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] = 1.$$

Следовательно, $b_{67} = 1$.

Из нильпотентности группы G следует равенство

$$[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2]] = 1.$$

Заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2], x_1 \cdot x_2 \in \langle x_1 \cdot x_2 \rangle^G$ и по определению класса Леви $\langle x_1 \cdot x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}$. Поскольку в \mathcal{N} истинно квазитождество (1) получим равенство

$$[x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2] = 1$$

в группе G . Значит,

$$d_1 = [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1] = 1$$

и

$$d_2 = [x_2, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2, x_2] = 1.$$

Ввиду линейности коммутаторов веса 6 в 6-ступеночно нильпотентной группе, получим, что

$$d_1 = d_{11} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \cdot d_{18},$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1], & d_{12} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_1], \\ d_{13} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_1], & d_{14} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_1], \\ d_{15} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_1], & d_{16} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_1], \\ d_{17} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_1], & d_{18} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_1]. \end{aligned}$$

и

$$d_2 = d_{21} \cdot d_{22} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \cdot d_{28},$$

где

$$\begin{aligned} d_{21} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2], & d_{22} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2], \\ d_{23} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_2], & d_{24} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_2], \\ d_{25} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2], & d_{26} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_2], \\ d_{27} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2, x_2], & d_{28} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_2]. \end{aligned}$$

Из 4-энгелевости группы G следует, что $d_{11} = d_{21} = d_{28} = 1$. Заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1]$, $[x_2, x_1, x_2]$ принадлежат нормальным замыканиям $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$.

Ввиду нильпотентности группы G следующие коммутаторы веса 7 будут равны 1:

$$\begin{aligned} [x_2, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2]] &= 1, & [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]] &= 1, \\ [x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1, x_2]] &= 1. \end{aligned}$$

По определению класса Леви $\langle x_2 \rangle^G, \langle x_2 \rangle^G \in \mathcal{N}$ и из истинности в \mathcal{N} квазитождества (1) следуют равенства

$$\begin{aligned} [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2] &= 1, & [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1] &= 1, \\ [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2] &= 1. \end{aligned}$$

Значит, $d_{12} = d_{17} = d_{18} = d_{22} = d_{27} = 1$.

Также заметим, что элементы $[x_2, x_1, x_1, x_2]$, $[x_2, x_1, x_2, x_2]$, $[x_2, x_1, x_1, x_1]$, $[x_2, x_1, x_2, x_1]$ принадлежат нормальным замыканиям $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ и в группе G ввиду нильпотентности будут верны равенства:

$$\begin{aligned} [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1, x_2]] &= 1, & [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_2]] &= 1, \\ [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1, x_1]] &= 1, & [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_2, x_1]] &= 1. \end{aligned}$$

Из истинности в нормальных замыканиях $\langle x_1 \rangle^G$, $\langle x_2 \rangle^G$ квазитождества (1) получим, что

$$\begin{aligned} d_{13} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_1] = 1, & d_{14} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_1] = 1, \\ d_{25} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] = 1, & d_{26} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_2] = 1. \end{aligned}$$

Применяя тождество Витта и используя нильпотентность группы G , получим, что

$$\begin{aligned} d_{15} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_1] = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1, x_1], x_2]^{-1} = \end{aligned}$$

$$= [x_2, x_1, x_1, x_1, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1, x_2] = b_{62} \cdot b_{66} = 1.$$

Из 4-энгелевости группы G следует, что $[x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_1] = 1$. Тогда, применяя тождество Витта, получим равенства:

$$\begin{aligned} d_{24} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_1, x_2] = \\ &= [x_1, x_2, [x_2, x_1, x_2, x_2]]^{-1} \cdot [x_2, [x_2, x_1, x_2, x_2], x_1]^{-1} = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_2]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2, x_1] = \\ &= [x_2, x_1, x_2, x_2, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, x_2, x_2, x_2, x_2, x_1]^{-1} = b_{64}^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Используя тождество Витта и nilпотентность группы G , получим равенство:

$$\begin{aligned} d_{16} &= [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2, x_1] = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_2, x_1], x_2]^{-1} = \\ &= [x_2, x_1, x_2, x_1, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1], [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1], x_2, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot \\ &\cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = \\ &= b_{63} \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Ранее было доказано, что $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_1] = 1$, значит, $[x_2, x_1, x_2, x_1, x_1, x_2] = 1$ и $d_{16} = b_{63}$.

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} d_{23} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1, x_2] = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2, x_2]^{-1} = \\ &= [x_2, x_1, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, [x_2, x_1], [x_2, x_1, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2, x_2] = \\ &= b_{63} \cdot [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1, x_1]]^{-1} \cdot b_{67} = \\ &= b_{63} \cdot b_{61}^{-1}. \end{aligned}$$

Из того, что $d_1 = 1$ и $d_1 = d_{16} = b_{63}$ следует, что $b_{63} = 1$. Тогда из равенств $d_2 = 1$, $d_2 = d_{23} = b_{63} \cdot b_{61}^{-1}$, $b_{63} = 1$ получим, что $b_{61} = 1$.

Итак, значения всех базисных коммутаторов веса 6 от переменных x_1 , x_2 в группе G равны 1. Значит, G — nilпотентная группа ступени не выше 5. \square

Предложение 2. В любой группе G , принадлежащей классу $L(\mathcal{N})$ истинны тождества

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, b, a, a] = 1), \tag{2}$$

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, a, b, b] = 1), \tag{3}$$

$$(\forall a)(\forall b)([a, b, b, b, a] = [a, b, b, a, b]^{-1}). \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$. Если $H = \langle a, b \rangle$, то $H \leq G$, $H \in L(\mathcal{N})$. По лемме 1 H является nilпотентной ступени не выше 5 и в ней верны равенства

$$[a, b, b, a, [a, b, b]] = 1, [a, b, a, b, [a, b, a]] = 1.$$

По определению класса Леви $\langle a \rangle^H \in \mathcal{N}$. Поскольку $[a, b, b], a \in \langle a \rangle^H$, то ввиду истинности в $\langle a \rangle^H$ квазитождества (1) получим равенство

$$[a, b, b, a, a] = 1.$$

Рассмотрим элементы $x = [ab, a, b]$, $y = ab$ ($x, y \in \langle ab \rangle^H$, $\langle ab \rangle^H \in \mathcal{N}$). Тогда из нильпотентности группы G

$$[x, y, x] = [ab, a, b, ab, [ab, a, b]] = 1.$$

Ввиду истинности в $\langle ab \rangle^H$ квазитождества (1) получим, что

$$[ab, a, b, ab, ab] = 1.$$

Из линейности коммутаторов веса 5 в нильпотентной группе ступени 5, 4-энгелевости группы G и равенства $[a, b, b, a, a] = 1$ следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= [b, a, b, a, a] \cdot [b, a, b, a, b] \cdot [b, a, b, b, a] \cdot [b, a, b, b, b] = \\ &= [a, b, b, a, a]^{-1} \cdot [b, a, b, a, b] \cdot [b, a, b, b, a] \cdot [a, b, b, b, b]^{-1} = \\ &= [b, a, b, a, b] \cdot [b, a, b, b, a] = [a, b, b, a, b]^{-1} \cdot [a, b, b, b, a]^{-1}. \end{aligned}$$

Значит,

$$[a, b, b, b, a] = [a, b, b, a, b]^{-1}.$$

Полученные равенства верны для произвольных элементов $a, b \in G$, значит, в группе G истинны тождества (2), (3) и (4). \square

Лемма 2. *Любая 2-порожденная группа G , принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 4.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную 2-порожденную группу $G \in L(\mathcal{N})$, $G = \langle x_1, x_2 \rangle$. Заметим, что по лемме 1 группа G является нильпотентной ступени не выше 5 и коммутаторы веса 5 будут обладать свойством линейности. По предложению 1 группа G будет 4-энгелевой, а по предложению 2 в G будут истинны тождества (2), (3) и (4).

Для доказательства леммы достаточно показать, что значения всех базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1.

Введем обозначения для базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} b_{51} &= [x_2, x_1, x_1, [x_2, x_1]], & b_{52} &= [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1]], \\ b_{53} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_1], & b_{54} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2]. \\ b_{55} &= [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2], & b_{56} &= [x_2, x_1, x_2, x_2, x_2]. \end{aligned}$$

Ввиду 4-энгелевости группы G $b_{53} = b_{56} = 1$. Из тождества (2) следует, что $b_{55} = 1$.

Используя тождества (3), (4) и тождество Витта, получим:

$$\begin{aligned} b_{54} &= [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1]^{-1} = \\ &= [x_1, x_2, [x_2, x_1], x_1] \cdot [x_2, [x_2, x_1], x_1, x_1] = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1], x_1]^{-1} \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_1]^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Используя тождество (4) и тождество Витта, получим:

$$\begin{aligned} 1 &= b_{54} = [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_1]^{-1} = \\ &= [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_1]] \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_1], x_2] = \end{aligned}$$

$$= [x_2, x_1, x_1, [x_2, x_1]]^{-1} \cdot [x_2, x_1, x_1, x_1, x_2]^{-1} = \\ = b_{51}^{-1} \cdot b_{54}^{-1} = b_{51}^{-1}. \text{ Значит, } b_{51} = 1.$$

Применяя тождество (2) и (4), получим равенства

$$[x_2, x_1, x_2, x_2, x_1] = [x_1, x_2, x_2, x_2, x_1]^{-1} = \\ [x_1, x_2, x_2, x_1, x_2] = [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2]^{-1} = \\ = [x_2, x_1, [x_2, x_1], x_2] \cdot [x_1, [x_2, x_1], x_2, x_2] = [x_2, x_1, x_1, x_2, x_2]^{-1} = b_{55}^{-1} = 1, \\ \text{в частности, } [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2] = b_{55}.$$

С другой стороны, из тождества Витта следуют равенства

$$[x_2, x_1, x_2, x_2, x_1] = [x_2, x_1, [x_2, x_1, x_2]]^{-1} \cdot [x_1, [x_2, x_1, x_2], x_2]^{-1} = \\ = [x_2, x_1, x_2, [x_2, x_1]] \cdot [x_2, x_1, x_2, x_1, x_2] = b_{52} \cdot b_{55} = b_{52}.$$

Таким образом, $b_{52} = 1$. Следовательно, значения всех базисных коммутаторов веса 5 от переменных x_1, x_2 в группе G равны 1 и группа G нильпотентна ступени не выше 4.

□

Теорема 1. Любая группа G , принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является 3-энгелевой.

Доказательство. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$. Тогда если $H = \langle a, b \rangle$, то $H \leq G$ и $H \in L(\mathcal{N})$. По лемме 2 группа H нильпотентна ступени не выше 4. Значит, $[a, b, a, [a, b]] = 1$.

Рассмотрим элементы $x = a, y = [a, b]$ ($x, y \in \langle a \rangle^H, \langle a \rangle^H \in \mathcal{N}$). Из истинности квазитождества (1) в группе $\langle a \rangle^H$ получим, что

$$[y, x, x] = [a, b, a, a] = 1.$$

Ввиду линейности коммутаторов веса 4 в нильпотентной группе ступени 4, имеем $[b, a, a, a] = 1$. Поскольку равенство выполняется для любых элементов $a, b \in G$, то группа G является 3-энгелевой.

□

Следствие 1. Любая группа G , принадлежащая классу $L(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 4.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу G , принадлежащую классу $L(\mathcal{N})$. По теореме 1 группа G является 3-энгелевой. В квазимногообразии \mathcal{N} содержатся группы без элементов порядков 2 и 5, поэтому в группе G элементы указанных порядков будут отсутствовать. В работе [17] доказано, что 3-энгелева группа без элементов порядков 2 и 5 является нильпотентной ступени не выше 4. Следствие доказано. □

Следствие 2. Любая группа G , принадлежащая классу $L_2(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 4.

Доказательство. Заметим, что для класса \mathcal{N} справедлива цепочка включений:

$$L_2(\mathcal{N}) \subseteq L_1(\mathcal{N}).$$

Из следствия 1 следует, что $L_1(\mathcal{N}) = L(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$, значит, $L_2(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}_4$.

Данный результат можно также получить, используя теорему 2 из [3].

□

Следствие 3. Для квазимногообразия $qF_2(\mathcal{N}_3)$ справедливы включения $L(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$, $L_2(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$.

Доказательство. Из [19] следует, что квазитождество (1) истинно в группе $F_2(\mathcal{N}_3)$. Поскольку в квазимногообразии $qF_2(\mathcal{N}_3)$ отсутствуют группы, содержащие элементы порядков 2 и 5 (группы без кручения), то квазимногообразие удовлетворяет условиям следствия 1 и следствия 2. Значит, $L(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$ и $L_2(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_4$. \square

Предложение 3. Любая группа G , принадлежащая классу $L_3(\mathcal{N})$, является нильпотентной ступени не выше 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную группу G , принадлежащую классу $L_3(\mathcal{N})$. По определению L_3 -класса для произвольных $x, y, z \in G$ нормальное замыкание $\langle x, y, z \rangle^G \in \mathcal{N}$. Таким образом, $\langle x, y, z \rangle^G$ является нильпотентной ступени 3 группой.

Хорошо известно, что если всякая 3-порожденная подгруппа некоторой группы нильпотентна ступени не выше 3, то и сама группа нильпотентна ступени не выше 3 [18]. Следовательно, G является нильпотентной ступени не выше 3 и $\mathcal{N} = L_3(\mathcal{N})$. \square

В частности, справедливо включение $L_3(qF_2(\mathcal{N}_3)) \subseteq \mathcal{N}_3$.

References

- [1] A.I. Budkin, *The operator L_n on quasivarieties of universal algebras*, Sib. Math. J., **60**:4 (2019), 565–571. Zbl 1475.08002
- [2] A.I. Budkin, *Groups with nilpotent n -generated normal subgroups*, Sib. Math. J., **64**:4 (2023), 847–853. Zbl 1521.20055
- [3] A.I. Budkin, *Groups with restrictions on normal subgroups*, Algebra Logic, **63**:1 (2024), 1–9. Zbl 1560.20078
- [4] A.I. Budkin, *Levi quasivarieties*, Sib. Math. J., **40**:2 (1999), 225–228. Zbl 0930.20028
- [5] A.I. Budkin, L.V. Taranina, *On levi quasivarieties generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **41**:2 (2000), 218–223. Zbl 0956.20015
- [6] V.V. Lodeishchikova, *The Levi classes generated by nilpotent groups*, Sib. Math. J., **51**:6 (2010), 1075–1080. Zbl 1228.20021
- [7] V.V. Lodeishchikova, *Levi quasivarieties of exponent p^s* , Algebra Logic, **50**:1 (2011), 17–28. Zbl 1266.20040
- [8] V.V. Lodeishchikova, *A Levi class generated by a quasivariety of nilpotent groups*, Algebra Logic, **58**:4 (2019), 327–336. Zbl 1443.20042
- [9] V.V. Lodeishchikova, S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of nilpotent groups of exponent p^s* , Algebra Logic, **61**:1 (2022), 54–66. Zbl 1515.20136
- [10] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of Levi classes*, Algebra Logic, **57**:5 (2018), 381–391. Zbl 1406.20035
- [11] S.A. Shakhova, *The axiomatic rank of the Levi class generated by the almost abelian quasivariety of nilpotent groups*, Lobachevskii J. Math., **41**:9 (2020), 1680–1683. Zbl 1486.20032
- [12] S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of groups with commutator subgroup of order p* , Algebra Logic, **60**:5 (2021), 336–347. Zbl 1495.20033
- [13] S.A. Shakhova, *Levi classes of quasivarieties of nilpotent groups of class at most two*, Algebra Logic, **62**:6 (2024), 501–515. Zbl 1560.20079

- [14] A.V. Zenkov, *On the Levi class of the quasivariety of right-orderable groups*, Sib. Math. J., **65**:1 (2024), 44–47. Zbl 1532.20032
- [15] M. Hall, *The theory of groups*, Macmillan, New York, 1959. Zbl 0084.02202
- [16] M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov, *Fundamentals of the theory of groups*, Springer-Verlag, New-York etc., 1979. Zbl 0549.20001
- [17] H. Heineken, *Engelsche Elemente der Länge drei*, Ill. J. Math, **5**:4 (1961), 681–707. Zbl 0232.20073
- [18] H. Neumann, *Varieties of groups*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1967. Zbl 0251.20001
- [19] A.I. Budkin, *On quasivarieties of axiomatic rank 3 of torsion-free nilpotent groups*, Sib. Math. J., **58**:1 (2017), 43–48. Zbl 1365.20022

VIKTORIIA VLADIMIROVNA LODEISHCHIKOVA
POLZUNOV ALTAI STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
PR. LENINA, 46,
656038, BARNAUL, RUSSIA
Email address: lodeischikova@yandex.ru