

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПРИ
БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ
ОБОВЩЕННОЙ ДИФФУЗИОННО–ДРЕЙФОВОЙ
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И УРАВНЕНИЯ
ПУАССОНА

М.О. Корпусов

Представлено О.С. Розановой**Abstract:** In this paper, we consider one generalized system of ambipolar diffusion equations. We prove global time solvability and uniqueness. We construct asymptotics for large times.**Keywords:** nonlinear equations, asymptotics.

1 Введение

В настоящей работе мы рассмотрели задачу Коши для следующей системы уравнений амбиполярной диффузии в полупроводниковой плазме в формализме электронов и дырок в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 (\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2 (\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1} p D_x \phi)), \quad (2)$$

$$\Delta_x \phi = p - n, \quad m \geq 1, \quad a, b > 0, \quad (3)$$

KORPUSOV, M.O., ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR AT LARGE TIMES OF A WEAK SOLUTION OF A GENERALIZED DIFFUSION-DRIFT-POISSON SYSTEM OF EQUATIONS.

© 2025 Корпусов М.О.

Работа поддержана РНФ (грант N 23-11-00056).

Поступила 17 февраля 2025 г., опубликована 23 октября 2025 г.

где переменные n и p соответствуют концентрациям электронов и дырок соответственно.

Отметим, что в настоящей работе мы впервые рассмотрели случай $m > 1$. Случаю $m = 1$ посвящено много интересных работ. Отметим, прежде всего работу [1]. В этой работе рассматривался случай $\mathbb{R}^3$ и изучалась глобальная во времени разрешимость задачи Коши для такой системы уравнений:

$$n_t = \operatorname{div}(\nabla n + n\nabla(\psi + V)) - R(n, p, x), \quad (4)$$

$$p_t = \operatorname{div}(\nabla p + p\nabla(-\psi + V)) - R(n, p, x), \quad (5)$$

$$-\varepsilon^2 \Delta \psi = n - p - D(x). \quad (6)$$

Отметим, однако, что эта система уравнений с физической точки зрения ошибочна, поскольку в уравнение (5) для дырок потенциал V внешнего электрического поля должен входить как и потенциал ψ самосогласованного электрического поля электронов и дырок со знаком « $-$ »! Тем не менее это не сколько не влияет на математическое качество работы! Отметим также более раннюю работу [2].

В настоящей работе мы доказали существование, единственность и глобальную во времени разрешимость слабого решения задачи Коши для системы уравнений (1)–(4), а также изучили асимптотическое поведение решения $\{n, p, \phi\}$ при больших временах. При этом существенно использовали технику работы [3]. Заметим, что широкий спектр результатов об асимптотическом поведении при больших временах для нелинейных эволюционных уравнений математической физики получен в работах И. А. Шишмарева, П. И. Наумкина, Е. И. Кайкиной и Н. Хаяши (см. работы [4], [5]).

2 Вывод системы уравнений

Рассмотрим диффузию электронов и дырок в полупроводниковой плазме (см. работы [6], [7]). Уравнения диффузии имеют вид уравнений непрерывности для электронов (e) и дырок (p) в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_e = 0, \quad \frac{\partial N_p}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J}_p = 0, \quad (7)$$

причем плотности потоков $\mathbf{J}_e$ и $\mathbf{J}_p$ выражаются через плотности числа частиц и их градиенты согласно:

$$\mathbf{J}_e = -N_e b_e e \mathbf{E} - D_e \nabla N_e, \quad \mathbf{J}_p = N_p b_p e \mathbf{E} - D_p \nabla N_p, \quad (8)$$

где D_e, D_p — коэффициенты диффузии, а b_e, b_p — подвижности электронов и дырок, а e — заряд электрона, который отрицательный: $e < 0$. Мы предполагаем, что подвижности зависят от концентрации электронов и дырок согласно степенному закону:

$$b_e = b_{e0} |N_e|^{m-1}, \quad b_p = b_{p0} |N_p|^{m-1}, \quad m \geq 1. \quad (9)$$

Кроме того, коэффициенты диффузии D_e, D_p связаны с подвижностями b_{e0}, b_{p0} соотношениями (см. [6] формула 25.3):

$$D_e = T b_{e0}, \quad D_p = T b_{p0}. \quad (10)$$

Наконец, для самосогласованного электрического поля $\mathbf{E}$ справедливы такие уравнения:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi e(N_p - N_e), \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Таким образом, если ввести потенциал электрического поля ϕ согласно формуле $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, то из (7)–(11) получим такую систему уравнений:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = D_e \Delta_x N_e - \frac{D_e e}{T} \operatorname{div}(|N_e|^{m-1} N_e \nabla \phi), \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_p}{\partial t} = D_p \Delta_x N_p + \frac{D_p e}{T} \operatorname{div}(|N_p|^{m-1} N_p \nabla \phi), \quad (13)$$

$$\Delta_x \phi = -\frac{4\pi e}{\varepsilon} (N_p - N_e). \quad (14)$$

Систему уравнений (12)–(14) можно в безразмерных переменных (поскольку $e < 0$) привести к виду (1)–(3).

3 Обозначения

В работе рассматривается ситуация, когда $N \in \mathbb{N}$ и $N \geq 3$.

Символом $[a, b]$ мы обозначаем всевозможные варианты:

$$[a, b], \quad (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b].$$

Символом $O(x, R) \subset \mathbb{R}^N$ мы обозначаем открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^N$ и радиусом $R > 0$. Под $C_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1]$ понимаем линейное пространство таких функций f , что для любого шара $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^N$ имеем:

$$[f]_{\alpha; O(x_0, R_0)} := \sup_{x \neq y, x, y \in O(x_0, R_0)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty. \quad (15)$$

Будем говорить, что функция $f = f(x, t)$ при $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$ принадлежит $C_{x, loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1]$ равномерно по $t \in [0, T]$, если для любого шара $O(x_0, R_0) \subset \mathbb{R}^N$ имеем:

$$\sup_{t \in [0, T]} [f(t)]_{\alpha; O(x_0, R_0)} = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \neq y, x, y \in O(x_0, R_0)} \frac{|f(x, t) - f(y, t)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty. \quad (16)$$

Отметим, что мы пользуемся обозначениями из книги [8]. В частности, мы используем такое обозначение:

$$|f|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)|. \quad (17)$$

Символом D_x — мы обозначаем градиент, символом D_{x_j} — частную производную по переменной x_j , символом $D_{x_j x_k}^2$ — частную производную второго порядка по переменным x_j и x_k в такой же последовательности,

символом D_t — обозначаем частную производную по времени. Символом D_x^l мы обозначаем произвольную частную производную (по переменной $x = (x_1, \dots, x_N)$) порядка $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Символом $C_{x,t}^{(m,n)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ мы обозначаем линейное пространство таких функций $f = f(x, t)$, что все частные производные по переменной x до порядка $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и все частные производные по переменной t до порядка $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ существуют в классическом смысле на множестве $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ и являются непрерывными, причем частные производные по $t \in [0, T]$ в граничных точках понимаются в смысле возможности непрерывного продолжения в граничную точку. Если в дополнение сама функция и все её частные производные до порядков m и n включительно ограничены, то мы используем обозначение $C_{b,x,t}^{(m,n)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$.

Символом $C_b(\mathbb{R}^N)$ мы обозначаем линейное пространство функций непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^N$. Символом $C_b^{(k)}(\mathbb{R}^N)$ мы обозначаем линейное пространство k -раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^N$, причем сама функция и все её частные производные до порядка k являются ограниченными. Символом $C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ мы обозначаем линейное пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}^N \times [0, T]$.

Символом $C([0, T]; B)$, где B — банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_B$, мы обозначаем линейное пространство функций f , определенных на $[0, T]$ со значениями в B , таких, что

$$\|f(t_1) - f(t_2)\|_B \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0 \quad (18)$$

для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$. Причем линейное пространство $C([0, T]; B)$ является банаховым относительно нормы:

$$\|f\|_{BT} := \sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_B. \quad (19)$$

Символом $C((0, T]; B)$ мы обозначаем линейное пространство таких функций f , что для любого $\delta \in (0, T)$ функция $f \in C([\delta, T]; B)$. Аналогичным образом определяется линейное пространство $C^{(1)}((0, T]; B)$.

Положительные постоянные мы обычно обозначаем большой буквой C , если постоянная C зависит от каких-то параметров мы пишем C с аргументами. На протяжении всей статьи символом $\mathfrak{M}_{c,x,t}$ мы обозначаем оператор:

$$\mathfrak{M}_{c,x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad \Delta_x := \sum_{j=1}^N D_{x_j}^2, \quad (20)$$

а символом $\mathfrak{M}_{c,x,t}^T$ мы обозначаем транспонированный оператор:

$$\mathfrak{M}_{c,x,t}^T := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x. \quad (21)$$

Символами $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$, $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{N+1})$ мы обозначаем линейные топологические пространства основных функций с компактным

носителем, а символами $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$ — соответствующие двойственные пространства обобщенных функций. При этом символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы единообразно обозначаем соответствующее спаривание, причем из контекста ясно между какими пространствами.

Символом $L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ мы обозначаем такое линейное пространство функций f , что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0, T)$ функция $f \in L^m(K)$. Символом $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, T))$ мы обозначаем такое линейное пространство функций f , что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^N \times [0, T)$ функция $f \in W^{1,\infty}(K)$. Аналогичным образом определяются линейные пространства $L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$ и $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty))$. Мы используем следующие нормы на соответствующих линейных пространствах:

$$\|f\|_{r,T} := \sup_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_r, \quad \|f\|_T = \|f\|_{1,T} + \|f\|_{\infty,T}, \quad r \in [1, +\infty], \quad (22)$$

4 Слабые решения

Пусть $N \geq 3$. Рассмотрим уравнение в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$:

$$\mathfrak{M}_{c,x,t} \mathcal{E}_c(x, t) = \delta(x) \delta(t), \quad (23)$$

$$\mathfrak{M}_{c,x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad \mathfrak{M}_{c,x,t}^T := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad c > 0. \quad (24)$$

Несложно показать, что

$$\mathcal{E}_c(x, t) = \frac{\theta(t)}{(4\pi c^2 t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4c^2 t}\right). \quad (25)$$

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений при $a, b > 0$, $m \geq 1$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 (\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad (26)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2 (\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1} p D_x \phi)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad (27)$$

$$\Delta_x \phi = p - n, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad (28)$$

$$n(x, 0) = n_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (29)$$

Дадим определение локального во времени слабого решения.

Определение 1. Слабым локальным во времени решением задачи Коши (26)–(29) называется такая упорядоченная тройка

$$\{n, p, \phi\} \in L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, T)) \times L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, T)) \times W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, T)), \quad (30)$$

что для любых $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ выполнены равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} n(x, t) \mathfrak{M}_{a,x,t}^T \psi_1(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) \psi_1(x, 0) dx + \\ & + a^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |n(x, t)|^{m-1} n(x, t) (D_x \phi(x, t), D_x \psi_1(x, t)) dx dt = 0, \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} p(x, t) \mathfrak{M}_{b,x,t}^T \psi_2(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} p_0(x) \psi_2(x, 0) dx - \\ & - b^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |p(x, t)|^{m-1} p(x, t) (D_x \phi(x, t), D_x \psi_2(x, t)) dx dt = 0, \quad (32) \end{aligned}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (D_x \phi(x, t), D_x \psi_3(x, t)) dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (p(x, t) - n(x, t)) \psi_3(x, t) dx dt = 0, \quad (33)$$

причем $n_0, p_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ и $m \geq 1$.

Дадим определение глобального во времени слабого решения.

Определение 2. Слабым глобальным во времени решением задачи Коши (26)–(29) называется такая упорядоченная тройка

$$\{n, p, \phi\} \in L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \times L_{loc}^m(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)) \times W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty)), \quad (34)$$

что для любых $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, +\infty))$ выполнены равенства:

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} n(x, t) \mathfrak{M}_{a,x,t}^T \psi_1(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) \psi_1(x, 0) dx + \\ & + a^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |n(x, t)|^{m-1} n(x, t) (D_x \phi(x, t), D_x \psi_1(x, t)) dx dt = 0, \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} p(x, t) \mathfrak{M}_{b,x,t}^T \psi_2(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} p_0(x) \psi_2(x, 0) dx - \\ & - b^2 \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |p(x, t)|^{m-1} p(x, t) (D_x \phi(x, t), D_x \psi_2(x, t)) dx dt = 0, \quad (36) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (D_x \phi(x, t), D_x \psi_3(x, t)) \, dx \, dt + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (p(x, t) - n(x, t)) \psi_3(x, t) \, dx \, dt = 0, \quad (37)$$

причем $n_0, p_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ и $m \geq 1$.

Справедлива следующая несложная:

Лемма 1. *Всякое глобальное во времени слабое решение $\{n, p, \phi\}$ задачи Коши (26)–(29) в смысле определения 2 является локальным во времени слабым решением задачи Коши (26)–(29) в смысле определения 1 для любого $T > 0$. Обратно, если тройка $\{n, p, \phi\}$ является слабым локальным во времени решением задачи Коши в смысле определения 1 для каждого $T > 0$, то это слабое глобальное во времени решение задачи Коши в смысле определения 2.*

Наконец, справедлива следующая:

Лемма 2. *Всякое слабое локальное во времени решение задачи Коши (26)–(29) в смысле определения 1 представимо в следующем виде при условии существования соответствующих интегралов:*

$$\begin{aligned} \tilde{n}(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t) n_0(y) \, dy + \\ & + a^2 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau) \operatorname{div} \left(|\tilde{n}(y, \tau)|^{m-1} \tilde{n}(y, \tau) D_y \tilde{\phi}(y, \tau) \right) \, dy \, d\tau, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t) p_0(y) \, dy - \\ & - b^2 \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau) \operatorname{div} \left(|\tilde{p}(y, \tau)|^{m-1} \tilde{p}(y, \tau) D_y \tilde{\phi}(y, \tau) \right) \, dy \, d\tau, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\tilde{\phi}(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tilde{n}(y, t) - \tilde{p}(y, t)}{|x - y|^{N-2}} \, dy, \quad (40)$$

где мы использовали обозначение:

$$\tilde{h}(x, t) := \begin{cases} h(x, t), & \text{если } t \geq 0; \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \quad (41)$$

Доказательство. Итак, пусть $\{n, p, \phi\}$ — это слабое локальное во времени решение задачи Коши (26)–(29) в смысле определения 1. Тогда с

учетом (31) получим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{M}_{a,x,t} \tilde{n}, \psi_1 \rangle &= \langle \tilde{n}, \mathfrak{M}_{a,x,t}^T \psi_1 \rangle = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} n(x,t) \mathfrak{M}_{a,x,t}^T \psi_1(x,t) dx dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) \psi_1(x,0) dx - a^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |n(x,t)|^{m-1} n(x,t) (D_x \phi(x,t), D_x \psi_1(x,t)) dx dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) \psi_1(x,0) dx - a^2 \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{n}(x,t)|^{m-1} \tilde{n}(x,t) (D_x \tilde{\phi}(x,t), D_x \psi_1(x,t)) dx dt = \\
&= \langle n_0 \delta(t), \psi_1 \rangle + \left\langle a^2 \operatorname{div}(|\tilde{n}|^{m-1} \tilde{n} D_x \tilde{\phi}), \psi_1 \right\rangle, \quad (42)
\end{aligned}$$

из которых получаем равенство в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$:

$$\mathfrak{M}_{a,x,t} \tilde{n} = n_0 \delta(t) + a^2 \operatorname{div}(|\tilde{n}|^{m-1} \tilde{n} D_x \tilde{\phi}), \quad (43)$$

из которого при условии существования всех свертков получим равенство (38) для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$. Аналогичным образом из (32) при условии существования всех свертков получим равенство (39) для почти всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$. Наконец, с учетом (33) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta_x \tilde{\phi}, \psi_3 \rangle &= \langle \tilde{\phi}, \Delta_x \psi_3 \rangle = \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{\phi}(x,t) \Delta_x \psi_3(x,t) dx dt = \\
&= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (D_x \phi(x,t), D_x \psi_3(x,t)) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (p(x,t) - n(x,t)) \psi_3(x,t) dx dt = \\
&= \int_{-\infty}^T \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{p}(x,t) - \tilde{n}(x,t)) \psi_3(x,t) dx dt = \langle \tilde{p} - \tilde{n}, \psi_3 \rangle, \quad (44)
\end{aligned}$$

из которой получаем следующее равенство в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$:

$$\Delta_x \tilde{\phi} = \tilde{p} - \tilde{n}. \quad (45)$$

Здесь заметим, что фундаментальным решением уравнения в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$

$$\Delta_x \mathcal{E}_0(x,t) = \delta(t) \delta(x) \quad (46)$$

является, очевидно, распределение:

$$\mathcal{E}_0(x,t) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} \delta(t) \quad (47)$$

и тогда единственным решением уравнения (45) в классе, в котором существует свертка, является следующая:

$$\tilde{\phi} = \mathcal{E}_0 * (\tilde{p} - \tilde{n}) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\tilde{n}(y, t) - \tilde{p}(y, t)}{|x-y|^{N-2}} dy. \quad (48)$$

Лемма доказана полностью. $\square$

5 Объемный и поверхностный потенциалы

Рассмотрим следующий поверхностный потенциал по нижней крышке области $\mathbb{R}^N \times (0, T)$:

$$V_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_c(x-y, t) \mu_0(y) dy, \quad c > 0. \quad (49)$$

Справедливы очевидные преобразования:

$$V_0(x, t) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) \mu_0(x + 2c\sqrt{t}z) dz. \quad (50)$$

Имеет место следующая:

Лемма 3. Если $\mu_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, то $V_0 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ для любого $T > 0$. Если $\mu_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)$, то

$$\sup_{t \in [0, T]} \sup_{x^1 \neq x^2} \frac{|V_0(x^1, t) - V_0(x^2, t)|}{|x^1 - x^2|} \leq C(N) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D_x \mu_0(x)|. \quad (51)$$

Если $\mu_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$, то для любых $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^N$ и любых $t^1, t^2 \in [0, T]$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} |D_{x_j} V_0(x^1, t^1) - D_{x_j} V_0(x^2, t^2)| &\leq \\ &\leq C(N) [D_{x_j} \mu_0(x)]_\alpha [|x^1 - x^2|^\alpha + |t^1 - t^2|^{\alpha/2}]. \end{aligned} \quad (52)$$

Если $\mu_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, то для любого $R > 0$ имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{x \in O(0, R)} |V_0(x, t) - \mu_0(x)| = 0. \quad (53)$$

Наконец, если $\mu_0 \in C_b(\mathbb{R}^N)$, то имеем:

$$\mathfrak{M}_{x,t} V_0(x, t) = 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \quad \mathfrak{M}_{x,t} := \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x, \quad (54)$$

причем для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ справедливо равенство:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} V_0(x, t) \mathfrak{M}_{x,t}^T \psi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^N} \mu_0(x) \psi(x, 0) dx = 0, \quad (55)$$

$$\mathfrak{M}_{x,t}^T := -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x.$$

Доказательство. Шаг 1. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |V_0(x, t_1) - V_0(x, t_2)| \, dx \leq \\ & \leq \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) |\mu_0(x + 2c\sqrt{t_1}z) - \mu_0(x + 2c\sqrt{t_2}z)| \, dz \, dx = \\ & = \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) |\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y)| \, dy \, dz, \quad \delta := 2c(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}). \end{aligned} \quad (56)$$

Справедливы равенства:

$$\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y) = \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} \mu_0(y + \sigma \delta z) \, d\sigma = \delta \int_0^1 (z, D_y \mu_0(y + \sigma \delta z)) \, d\sigma, \quad (57)$$

из которых получаем оценку:

$$|\mu_0(y + \delta z) - \mu_0(y)| \leq |\delta| |z| \int_0^1 |D_y \mu_0(y + \sigma \delta z)| \, d\sigma. \quad (58)$$

Из (56) с учетом (58) получаем оценку:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |V_0(x, t_1) - V_0(x, t_2)| \, dx \leq \\ & \leq 2c |\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}| \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |z| \exp(-|z|^2) \, dz \int_{\mathbb{R}^N} |D_y \mu_0(y)| \, dy \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (59)$$

при $|t_1 - t_2| \rightarrow +0$. Аналогичным образом получаем оценку:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |V_0(x, t_1) - V_0(x, t_2)| \leq \\ & \leq 2c |\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}| \sup_{y \in \mathbb{R}^N} |D_y \mu_0(y)| \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} |z| \exp(-|z|^2) \, dz \rightarrow +0 \end{aligned} \quad (60)$$

при $|t_1 - t_2| \rightarrow +0$. Наконец, очевидно, что для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ потенциал $V_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Доказательство (51). Справедливы неравенства при $x^\sigma := \sigma x^1 + (1 - \sigma)x^2$:

$$\begin{aligned} |V_0(x^1, t) - V_0(x^2, t)| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) |x^1 - x^2| \int_0^1 |D_{x^\sigma} \mu_0(x^\sigma + 2c\sqrt{t}z)| d\sigma dz \leq \\ &\leq C(N) |x^1 - x^2| \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D_x \mu_0(x)|. \end{aligned} \quad (61)$$

Неравенство (52) доказывается аналогичным образом. Лемма доказана полностью. $\square$

Теперь рассмотрим следующий поверхностный потенциал по верхней крышке области $\mathbb{R}^N \times (0, t)$:

$$W_0(x, t) := \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\mu_1(y, t)}{|x - y|^{N-2}} dy. \quad (62)$$

Справедлива следующая:

Лемма 4. Если $\mu_1 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, то $W_0 \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$. Кроме того, для любых $\mu_{11}, \mu_{12} \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ справедлива оценка:

$$\|D_x W_0[\mu_{11}] - D_x W_0[\mu_{12}]\|_{\infty, T} \leq C(N) \|\mu_{11} - \mu_{12}\|_T. \quad (63)$$

Если $\mu_1 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, то справедлива оценка:

$$\sup_{t \in [0, T]} [D_{x_j} W_0(x, t)]_\alpha \leq C(N, \alpha) \|\mu_1\|_T \quad \text{для любого } \alpha \in (0, 1), \quad j = \overline{1, N}. \quad (64)$$

Если $\mu_1 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$ и дополнительно для каждого $t \in [0, T]$ функция $\mu_1 \in C_{x, loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$, то для всех $(x, t) \in O(x_0, R_0/2) \times [0, T]$ имеем $W_0 \in C_{x, b}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ для каждого $t \in [0, T]$ и справедливо равенство:

$$\begin{aligned} D_{x_j x_k}^2 W_0(x, t) &= \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, R_0)} \mu_1(y, t) \left(D_{y_j y_k}^2 \frac{1}{|x - y|^{N-2}} \right) dy + \\ &+ \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{O(x_0, R_0)} (\mu_1(y, t) - \mu_1(x, t)) \left(D_{y_j y_k}^2 \frac{1}{|x - y|^{N-2}} \right) dy + \\ &+ \frac{\mu_1(x, t)}{(N-2)\omega_N} \int_{\partial O(x_0, R_0)} \left(D_{y_k} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} \right) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j) dS_y, \end{aligned} \quad (65)$$

где $\mathbf{n}_y$ — внешняя нормаль по отношению к шару $O(x_0, R_0)$, причем

$$\Delta_x W_0(x, t) = \mu_1(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad (66)$$

Более того, для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ справедливо равенство:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (D_x W_0(x, t), D_x \psi(x, t)) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mu_1(x, t) \psi(x, t) \, dx \, dt = 0. \quad (67)$$

Доказательство. Шаг 1. Доказательство (63). Доказательство основано на классических свойствах ньютоновского потенциала и может быть доказано на основе, например, результатов леммы 4.1 работы [9].

Шаг 2. Доказательство (64). Пусть $\delta := |x^1 - x^2| \in (0, 1)$ и $x^0 = (x^1 + x^2)/2$. Справедливы равенства:

$$D_{x_j} W_0(x^1, t) - D_{x_j} W_0(x^2, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} [I_1 + I_2 + I_3], \quad (68)$$

$$I_1 := - \int_{O(x^0, \delta)} \left(D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} \right) \mu_1(y, t) \, dy, \quad (69)$$

$$I_2 := \int_{O(x^0, \delta)} \left(D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}} \right) \mu_1(y, t) \, dy, \quad (70)$$

$$I_3 := - \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)} \left[D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} - D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}} \right] \mu_1(y, t) \, dy. \quad (71)$$

Если $y \in O(x^0, \delta)$, то

$$|x^1 - y| \leq |x^0 - y| + |x^0 - x^1| < \frac{3}{2}\delta, \quad |x^2 - y| \leq |x^0 - y| + |x^0 - x^2| < \frac{3}{2}\delta. \quad (72)$$

С учетом (72) получим оценки:

$$|I_1| \leq C(N) \|\mu_1\|_{\infty, T} \int_{O(x^1, 3/2\delta)} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-1}} \, dy \leq C(N) \|\mu_1\|_{\infty, T} |x^1 - x^2|, \quad (73)$$

$$|I_2| \leq C(N) \|\mu_1\|_{\infty, T} \int_{O(x^2, 3/2\delta)} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-1}} \, dy \leq C(N) \|\mu_1\|_{\infty, T} |x^1 - x^2|. \quad (74)$$

Если $y \in \mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)$, то имеет место оценка:

$$|x^\sigma - y| \geq |x^0 - y| - |x^\sigma - x^0| \geq \frac{1}{2}|x^0 - y|, \quad x^\sigma = \sigma x^1 + (1-\sigma)x^2, \quad \sigma \in [0, 1], \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} - D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}} &= \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} \left(D_{y_j} \frac{1}{|x^\sigma - y|^{N-2}} \right) d\sigma = \\
&= \int_0^1 \left(x^1 - x^2, D_{x^\sigma} D_{y_j} \frac{1}{|x^\sigma - y|^{N-2}} \right) d\sigma. \quad (76)
\end{aligned}$$

Из (76) с учетом (75) получим оценку:

$$\begin{aligned}
\left| D_{y_j} \frac{1}{|x^1 - y|^{N-2}} - D_{y_j} \frac{1}{|x^2 - y|^{N-2}} \right| &\leq \\
&\leq C(N) |x^1 - x^2| \int_0^1 \frac{1}{|x^\sigma - y|^N} d\sigma \leq C(N) |x^1 - x^2| \frac{1}{|x^0 - y|^N}. \quad (77)
\end{aligned}$$

С учетом (77) из (71) получим оценку:

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq C(N) |x^1 - x^2| \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)} \frac{|\mu_1(y, t)|}{|y - x^0|^N} dy = \\
&= C(N) |x^1 - x^2| \int_{O(x^0, 1) \setminus O(x^0, \delta)} \frac{|\mu_1(y, t)|}{|y - x^0|^N} dy + \\
&\quad + C(N) |x^1 - x^2| \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0, 1)} \frac{|\mu_1(y, t)|}{|y - x^0|^N} dy \leq \\
&\leq C(N) [|x^1 - x^2| |\ln |x^1 - x^2|| \|\mu_1\|_{\infty, T} + |x^1 - x^2| \|\mu_1\|_{1, T}]. \quad (78)
\end{aligned}$$

Итак, с одной стороны, из (68) с учетом (73), (74) и (78) получим оценку:

$$|D_{x_j} W_0(x^1, t) - D_{x_j} W_0(x^2, t)| \leq C(N, \alpha) \|\mu_1\|_T |x^1 - x^2|^\alpha \quad (79)$$

при $|x^1 - x^2| < 1$ и для любого $\alpha \in (0, 1)$. С другой стороны, при $|x^1 - x^2| \geq 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
|D_{x_j} W_0(x^1, t) - D_{x_j} W_0(x^2, t)| &\leq 2 \|D_x W_0\|_{\infty, T} |x^1 - x^2|^\alpha \leq \\
&\leq C(N) \|\mu_1\|_T |x^1 - x^2|^\alpha \quad (80)
\end{aligned}$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$. Таким образом, из (79) и (80) получим искомую оценку:

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, T]} [D_{x_j} W_0(x, t)]_\alpha &= \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x^1 \neq x^2} \frac{|D_{x_j} W_0(x^1, t) - D_{x_j} W_0(x^2, t)|}{|x^1 - x^2|^\alpha} \leq \\
&\leq C(N, \alpha) \|\mu_1\|_T. \quad (81)
\end{aligned}$$

Шаг 3. Доказательство (65) и (66). Является классическим результатом теории ньютоновского потенциала.

□

Рассмотрим следующий объемный потенциал:

$$U_0[\rho_0, \rho_1](x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau. \quad (82)$$

Справедлива следующая:

Лемма 5. Если $\rho_0 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1 \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$, то $U_0 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$. Кроме того, справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \|U_0[\rho_{01}, \rho_{11}] - U_0[\rho_{02}, \rho_{12}]\|_T &\leq C(T, \theta, N) T^\theta \left[\|D_x \rho_{11}\|_{\infty, T} \|\rho_{01} - \rho_{02}\|_T + \right. \\ &\quad \left. + \|\rho_{02}\|_T \|D_x \rho_{11} - D_x \rho_{12}\|_{\infty, T} \right], \quad (83) \end{aligned}$$

для любого $\theta \in (0, 1/2)$ и любых

$$\rho_{01}, \rho_{02} \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad \rho_{11}, \rho_{12} \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)).$$

Наконец, если $\rho_0 \in C([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1 \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$ и дополнительно $\rho_0, D_{x_j} \rho_1 \in C_{x, loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$, $j = \overline{1, N}$ равномерно по $t \in [0, T]$, то $U_0 \in C_{x, t}^{(1, 0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и справедлива формула:

$$\begin{aligned} D_{x_j} U_0(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - \rho_0(y, \tau) D_y \rho_1(y, \tau) \right) dy d\tau, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T], \quad j = \overline{1, N}. \quad (84) \end{aligned}$$

Если $\rho_0 \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N))$, $\rho_1 \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$, то

$$\sup_{t \in [0, T]} [U_0(x, t)]_\alpha \leq C(N, \alpha) T^{(1-\alpha)/2} \|\rho_0\|_T \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \quad (85)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$.

Доказательство. Шаг 1. Пусть для определенности $0 \leq t_2 < t_1 \leq T$. Тогда справедливо равенство:

$$\begin{aligned} U_0(x, t_1) - U_0(x, t_2) &= \int_{t_2}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t_1 - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau + \\ &+ \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(x - y, t_2 - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau := \\ &:= J_1(x, t_1, t_2) + J_2(x, t_1, t_2). \quad (86) \end{aligned}$$

Заметим, что справедливы следующие оценки фундаментального решения $\mathcal{E}_c(x, t)$:

$$|D_x \mathcal{E}_c(x, t)| \leq C \frac{1}{t^{\mu_1} |x|^{N+1-2\mu_1}}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1), \quad (87)$$

$$|D_x \mathcal{E}_c(x, t)| \leq C \frac{t^{\mu_2}}{|x|^{N+1+2\mu_2}}, \quad \mu_2 > 0. \quad (88)$$

Поэтому для J_1 имеют место такие оценки:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |J_1(x, t_1, t_2)| \, dx \leq \\ & \leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |D_x \rho_1(x, t)| \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x, t)| \, dx \int_{t_2}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^N} |D_x \mathcal{E}_c(x, t_1 - \tau)| \, dx \, d\tau \leq \\ & \leq C \int_{t_2}^{t_1} \left[\frac{1}{(t_1 - \tau)^{\mu_1}} \int_{O(0,R)} \frac{dy}{|y|^{N+1-2\mu_1}} + (t_1 - \tau)^{\mu_2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,R)} \frac{dy}{|y|^{N+1+2\mu_2}} \right] d\tau \leq \\ & \leq C(R) \left[\frac{(t_1 - t_2)^{1-\mu_1}}{1 - \mu_1} + \frac{(t_1 - t_2)^{1+\mu_2}}{1 + \mu_2} \right] \rightarrow +0 \quad (89) \end{aligned}$$

при $|t_1 - t_2| \rightarrow +0$. Аналогичным образом, получаем оценку:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |J_1(x, t_1, t_2)| \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |D_x \rho_1(x, t)| \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |\rho_0(x, t)| \times \\ & \times \int_{t_2}^{t_1} |D_x \mathcal{E}_c(x, t_1 - \tau)| \, dx \, d\tau \leq C(R) \left[\frac{(t_1 - t_2)^{1-\mu_1}}{1 - \mu_1} + \frac{(t_1 - t_2)^{1+\mu_2}}{1 + \mu_2} \right] \rightarrow +0 \quad (90) \end{aligned}$$

при $|t_1 - t_2| \rightarrow +0$. Выражение для J_2 перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} & J_2(x, t_1, t_2) = \\ & = \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_0(x - y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(y, t_2 - \tau), D_x \rho_1(x - y, \tau)) \, dy \, d\tau = \\ & = \int_0^{t_2} \int_{O(0,\delta)} \rho_0(x - y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(y, t_2 - \tau), D_x \rho_1(x - y, \tau)) \, dy \, d\tau + \\ & + \int_0^{t_2} \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(0,\delta)} \rho_0(x - y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(y, t_2 - \tau), D_x \rho_1(x - y, \tau)) \, dy \, d\tau = \\ & = J_{21}(x, t_1, t_2) + J_{22}(x, t_1, t_2), \quad \delta = |t_1 - t_2|^{1/2}. \quad (91) \end{aligned}$$

Для $J_{21}(x, t_1, t_2)$ справедливы следующие оценки при $\mu_1 \in (1/2, 1)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |J_{21}(x, t_1, t_2)| \, dx &\leq \sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x, t)| \, dx \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} |D_x \rho_1(x, t)| \times \\ &\quad \times C \int_0^{t_2} \int_{O(0, \delta)} \frac{1}{|y|^{N+1-2\mu_1}} \left[\frac{1}{(t_1 - \tau)^{\mu_1}} + \frac{1}{(t_2 - \tau)^{\mu_1}} \right] dy \, d\tau = \\ &= C \frac{\delta^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} \left[\frac{(t_1 - t_1)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} + \frac{t_2^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \right] \leq C(t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1), \end{aligned} \quad (92)$$

и аналогичным образом получаем такую оценку:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |J_{21}(x, t_1, t_2)| \, dx &\leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} |\rho_0(x, t)| \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} |D_x \rho_1(x, t)| \times \\ &\quad \times C \int_0^{t_2} \int_{O(0, \delta)} \frac{1}{|y|^{N+1-2\mu_1}} \left[\frac{1}{(t_1 - \tau)^{\mu_1}} + \frac{1}{(t_2 - \tau)^{\mu_1}} \right] dy \, d\tau = \\ &= C \frac{\delta^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} \left[\frac{(t_1 - t_1)^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} + \frac{t_2^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \right] \leq C(t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1). \end{aligned} \quad (93)$$

Для того чтобы получить оценку величины $J_{22}(x, t_1, t_2)$ заметим, что имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} D_y \mathcal{E}_c(y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(y, t_2 - \tau) &= \int_0^1 d\sigma \frac{d}{d\sigma} D_y \mathcal{E}_c(y, \sigma t_1 + (1 - \sigma)t_2 - \tau) = \\ &= (t_1 - t_2) \int_0^1 d\sigma D_{t_\sigma} D_y \mathcal{E}_c(y, t_\sigma), \quad t_\sigma := \sigma t_1 + (1 - \sigma)t_2 - \tau, \end{aligned} \quad (94)$$

причем имеет место оценка:

$$|D_t D_x \mathcal{E}_c(x, t)| \leq C \frac{1}{t^{\mu_1} |x|^{N+3-2\mu_1}}, \quad \mu_1 \in (0, 1), \quad (95)$$

с учетом которой из (94) получим неравенство:

$$\begin{aligned} |D_y \mathcal{E}_c(y, t_1 - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(y, t_2 - \tau)| &\leq \\ &\leq C[t_1 - t_2] \frac{1}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \int_0^1 \frac{\theta(t_\sigma)}{t_\sigma^{\mu_1}} \leq C[t_1 - t_2] \frac{1}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \frac{1}{(t_2 - \tau)^{\mu_1}}. \end{aligned} \quad (96)$$

Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^N} |J_{22}(x, t_1, t_2)| \, dx &\leqslant \\
 &\leqslant C \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |D_x \rho_1(x, t)| \sup_{t \in [0,T]} \int_{\mathbb{R}^N} |\rho_0(x, t)| \, dx \times \\
 &\times [t_1 - t_2] \int_0^{t_2} \frac{d\tau}{(t_2 - \tau)^{\mu_1}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(0, \delta)} \frac{dy}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \leqslant C \frac{t_1 - t_2}{\delta^{3-2\mu_1}} = \\
 &= C(t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1). \quad (97)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем оценку:

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |J_{22}(x, t_1, t_2)| &\leqslant \\
 &\leqslant C \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |D_x \rho_1(x, t)| \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T]} |\rho_0(x, t)| \, dx \times \\
 &\times [t_1 - t_2] \int_0^{t_2} \frac{d\tau}{(t_2 - \tau)^{\mu_1}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(0, \delta)} \frac{dy}{|y|^{N+3-2\mu_1}} \leqslant C \frac{t_1 - t_2}{\delta^{3-2\mu_1}} = \\
 &= C(t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad \mu_1 \in (1/2, 1). \quad (98)
 \end{aligned}$$

Итак, из (91)–(98) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |J_2(x, t_1, t_2)| \, dx \leqslant (t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad (99)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |J_{22}(x, t_1, t_2)| \leqslant C(t_1 - t_2)^{(2\mu_1-1)/2}, \quad (100)$$

где $\mu_1 \in (1/2, 1)$. Следовательно, из (86) с учетом (89), (90) и (99), (100) получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U_0(x, t_1) - U_0(x, t_2)| \leqslant C(t_1 - t_2)^\theta, \quad (101)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |U_0(x, t_1) - U_0(x, t_2)| \leqslant C(t_1 - t_2)^\theta \quad (102)$$

для любого $\theta \in (0, 1/2)$ и всех $0 \leqslant t_2 < t_1 \leqslant T$. Наконец, очевидно, что для каждого $t \in [0, T]$ функция $U_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Шаг 2. Доказательство (83). Пусть

$$\rho_{01}, \rho_{02} \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)), \quad \rho_{11}, \rho_{12} \in C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)).$$

Тогда справедливо равенство:

$$\begin{aligned}
& U_0[\rho_{01}, \rho_{11}](x, t) - U_0[\rho_{02}, \rho_{12}](x, t) = \\
& = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} [\rho_{01}(y, \tau) - \rho_{02}(y, \tau)] (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_{11}(y, \tau)) dy d\tau + \\
& + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{02}(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y [\rho_{11}(y, \tau) - \rho_{12}(y, \tau)]) dy d\tau := \\
& := K_1 + K_2. \quad (103)
\end{aligned}$$

С учетом (87) и (88) для любых $R > 0$, $\mu_1 \in (1/2, 1)$ и $\mu_2 > 0$ имеют место оценки:

$$\begin{aligned}
\|K_1\|_{1,T} & \leq C \|\rho_{01} - \rho_{02}\|_{1,T} \|D_x \rho_{11}\|_{\infty,T} \times \\
& \times \left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} + \frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}} \frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1} \right], \quad (104)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|K_1\|_{\infty,T} & \leq C \|\rho_{01} - \rho_{02}\|_{\infty,T} \|D_x \rho_{11}\|_{\infty,T} \times \\
& \times \left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} + \frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}} \frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1} \right], \quad (105)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|K_2\|_{1,T} & \leq C \|\rho_{02}\|_{1,T} \|D_x \rho_{11} - D_x \rho_{12}\|_{\infty,T} \times \\
& \times \left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} + \frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}} \frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1} \right], \quad (106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|K_2\|_{\infty,T} & \leq C \|\rho_{02}\|_{\infty,T} \|D_x \rho_{11} - D_x \rho_{12}\|_{\infty,T} \times \\
& \times \left[\frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{R^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1} + \frac{1}{(N+2\mu_2)R^{N+2\mu_2}} \frac{T^{\mu_2+1}}{\mu_2+1} \right]. \quad (107)
\end{aligned}$$

Из (103) с учетом оценок (104)–(107) для любого $\theta \in (0, 1/2)$ получим оценку:

$$\begin{aligned}
\|U_0[\rho_{01}, \rho_{11}] - U_0[\rho_{02}, \rho_{12}]\|_T & \leq C(T, \theta) T^\theta \left[\|D_x \rho_{11}\|_{\infty,T} \|\rho_{01} - \rho_{02}\|_T + \right. \\
& \left. + \|\rho_{02}\|_T \|D_x \rho_{11} - D_x \rho_{12}\|_{\infty,T} \right], \quad (108)
\end{aligned}$$

где постоянная $C = C(\theta, T, N)$ является монотонно неубывающей функцией по $T > 0$.

Шаг 3. Доказательство (84). Пусть $x \in O(x_0, R_0/2)$. Справедливо равенство:

$$U_0(x, t) = U_{01}(x, t) + U_{02}(x, t), \quad (109)$$

$$U_{01}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, R_0)} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau, \quad (110)$$

$$U_{02}(x, t) = \int_0^t \int_{O(x_0, R_0)} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau. \quad (111)$$

Совершенно понятно, что $U_{01}(x, t) \in C_{x,t}^{(1,0)}(\overline{O(x_0, R_0/2)} \times [0, T])$, причем

$$D_{x_j} U_{01}(x, t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x_0, R_0)} \rho_0(y, \tau) (D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau. \quad (112)$$

Для U_{02} воспользуемся стандартной схемой. Введем функцию:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq s \leq 1, \\ 1, & \text{если } s \geq 2, \end{cases} \quad \eta(s) \in C^{(1)}[0, +\infty), \quad 0 \leq \eta'(s) \leq 2. \quad (113)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию:

$$U_{02\varepsilon}(x, t) = \int_0^t \int_{O(x_0, R_0)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon}\right) \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau. \quad (114)$$

Очевидно, что $U_{02\varepsilon} \in C_{x,t}^{(1,0)}(\overline{O(x_0, R_0/2)} \times [0, T])$ при $\varepsilon > 0$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{(x,t) \in \overline{O(x_0, R_0/2)} \times [0, T]} |U_{02\varepsilon}(x, t) - U_{02}(x, t)| = 0. \quad (115)$$

Введем функцию:

$$\begin{aligned} U_{02j}(x, t) := & \int_0^t \int_{O(x_0, R_0)} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau) - \right. \\ & \left. - \rho_0(y, \tau) D_y \rho_1(y, \tau) \right) dy d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial O(x_0, R_0)} (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau)) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j) dS_y d\tau, \end{aligned} \quad (116)$$

где $\mathbf{n}_y$ — внешняя нормаль по отношению к шару $O(x_0, R_0)$. Несложно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{(x,t) \in \overline{O(x_0, R_0/2)} \times [0, T]} |D_{x_j} U_{02\varepsilon}(x, t) - U_{02j}(x, t)| = 0. \quad (117)$$

Из (115) и (117) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 D_{x_j} U_{02}(x, t) &= \int_0^t \int_{O(x_0, R_0)} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau) - \right. \\
 &\quad \left. - \rho_0(y, \tau) D_y \rho_1(y, \tau) \right) dy d\tau - \\
 &\quad - \int_0^t \int_{\partial O(x_0, R_0)} (D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau)) \cos(\mathbf{n}_y, \mathbf{e}_j) dS_y d\tau,
 \end{aligned} \tag{118}$$

Теперь заметим, что в силу оценки (88) в пределе при $R_0 \rightarrow +\infty$ из (112) и (118) получим, что

$$\begin{aligned}
 D_{x_j} U_0(x, t) &= D_{x_j} U_{01}(x, t) + D_{x_j} U_{02}(x, t) \rightarrow \\
 &\rightarrow \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau) - \rho_0(y, \tau) D_y \rho_1(y, \tau) \right) dy d\tau.
 \end{aligned} \tag{119}$$

Стало быть, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
 D_{x_j} U_0(x, t) &= \\
 &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau), \rho_0(x, \tau) D_x \rho_1(x, \tau) - \rho_0(y, \tau) D_y \rho_1(y, \tau) \right) dy d\tau.
 \end{aligned} \tag{120}$$

Шаг 4. Доказательство (85). Пусть $\delta := |x^1 - x^2| \in (0, 1)$, $x^0 = (x^1 + x^2)/2$. Тогда справедливо равенство:

$$U_0(x^1, t) - U_0(x^2, t) = I_1 + I_2 + I_3, \tag{121}$$

$$I_1 := \int_0^t \int_{O(x^0, \delta)} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x^1 - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau, \tag{122}$$

$$I_2 := - \int_0^t \int_{O(x^0, \delta)} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x^2 - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau, \tag{123}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)} \rho_0(y, \tau) (D_y \mathcal{E}_c(x^1 - y, t - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(x^2 - y, t - \tau), D_y \rho_1(y, \tau)) dy d\tau.
 \end{aligned} \tag{124}$$

Для I_1 и I_2 справедливы оценки при $\mu_1 \in (1/2, 1)$:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}} \int_{O(x^1, 3\delta/2)} \frac{dy}{|x^1 - y|^{N+1-2\mu_1}} \leq \\ &\leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{|x^1 - x^2|^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}, \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}} \int_{O(x^2, 3\delta/2)} \frac{dy}{|x^2 - y|^{N+1-2\mu_1}} \leq \\ &\leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{|x^1 - x^2|^{2\mu_1-1}}{2\mu_1-1}. \end{aligned} \quad (126)$$

Для оценивания I_3 заметим, что при $y \in \mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)$ справедлива оценка при $\mu_1 \in (1/2, 1)$:

$$\begin{aligned} |D_y \mathcal{E}_c(x^1 - y, t - \tau) - D_y \mathcal{E}_c(x^2 - y, t - \tau)| &\leq \\ &\leq C(N) |x^1 - x^2| \frac{1}{(t-\tau)^{\mu_1}} \frac{1}{|x^0 - y|^{N+2-2\mu_1}}. \end{aligned} \quad (127)$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} |x^1 - x^2| \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_1}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x^0, \delta)} \frac{dy}{|x^0 - y|^{N+2-2\mu_1}} \leq C(N) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} \frac{T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1} \frac{|x^1 - x^2|^{2\mu_1-1}}{1-\mu_1}. \end{aligned} \quad (128)$$

Таким образом, из (121) с учетом (125)–(128) получим оценку:

$$|U_0(x^1, t) - U_0(x^2, t)| \leq C(N, \alpha) \|\rho_0\|_{\infty, T} \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} T^{(1-\alpha)/2} |x^1 - x^2|^\alpha \quad (129)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$ и $|x^1 - x^2| \in (0, 1)$. Если $|x^1 - x^2| \geq 1$, то стандартным образом получаем оценку:

$$|U_0(x^1, t) - U_0(x^2, t)| \leq C(N, \alpha) \|\rho_0\|_T \|D_x \rho_1\|_{\infty, T} T^{(1-\alpha)/2} |x^1 - x^2|^\alpha \quad (130)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$. Таким образом, из (129) и (130) приходим к оценке (85).

Лемма доказана полностью. $\square$

Рассмотрим классический объемный тепловой потенциал:

$$U(x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau. \quad (131)$$

Для потенциала U_0 справедлив набор классических результатов, которые мы собрали в следующей:

Лемма 6. Если $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, T))$, то $U \in C_{x,t,b}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и имеет место равенство:

$$D_{x_j} U(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_{x_j} \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad j = \overline{1, N}. \quad (132)$$

Кроме того, для любых $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$ и $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^N$, $t^1, t^2 \in [0, T]$ имеет место неравенство:

$$\begin{aligned} & |D_{x_j} U(x^1, t^1) - D_{x_j} U(x^2, t^2)| \leq \\ & \leq C(N, \theta_1, \theta_2, T) \|\rho\|_{\infty, T} \left[|x^1 - x^2|^{\theta_1} + |t^1 - t^2|^{\theta_2/2} \right], \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (133)$$

Если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и $\rho \in C_{x,loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, то $U \in C_{x,t,b}^{(2,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и справедливо равенство:

$$D_{x_j x_k}^2 U(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_{y_j y_k}^2 \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau) (\rho(y, \tau) - \rho(x, \tau)) dy d\tau. \quad (134)$$

Если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и $\rho \in C_{x,loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, то $U \in C_{x,t,b}^{(0,1)}(\mathbb{R}^N \times (0, T])$ и справедливо равенство:

$$D_t U(x, t) = \rho(x, t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_t \mathcal{E}_c(x - y, t - \tau) (\rho(y, \tau) - \rho(x, \tau)) dy d\tau. \quad (135)$$

Наконец, если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и $\rho \in C_{x,loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, то справедливо равенство:

$$D_t U(x, t) - c^2 \Delta_x U(x, t) = \rho(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T]. \quad (136)$$

Имеет место предельное свойство:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |U(x, t)| = 0. \quad (137)$$

Наконец, из леммы 6 вытекает следующая:

Лемма 7. если $\rho \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и $\rho \in C_{x,loc}^\alpha(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ равномерно по $t \in [0, T]$, то для любой функции $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times (-\infty, T))$ справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} U(x, t) \mathfrak{M}_{x,t}^T \psi(x, t) dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x, t) \psi(x, t) dx dt, \\ \mathfrak{M}_{x,t}^T &:= -\frac{\partial}{\partial t} - c^2 \Delta_x. \end{aligned} \quad (138)$$

6 Система интегральных уравнений

Рассмотрим следующую вспомогательную систему интегральных уравнений:

$$n(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t) n_0(y) dy - \\ - a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau), |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \quad (139)$$

$$p(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t) p_0(y) dy + \\ + b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau), |p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \quad (140)$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{n(y, t) - p(y, t)}{|x - y|^{N-2}} dy. \quad (141)$$

Справедлива следующая:

Лемма 8. Для любых $n_0, p_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ при $m \geq 1$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(n_0, p_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение $\{n, p, \phi\} \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N))$ системы интегральных уравнений (139)–(141), причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в этом последнем случае имеем:

$$\lim_{T \uparrow T_0} (\|n\|_T + \|p\|_T) = +\infty. \quad (142)$$

Доказательство. Является следствием метода сжимающих отображений и стандартного алгоритма продолжения решения вольтеровских интегральных уравнений во времени, а также лемм 3–5. □

Справедлива следующая:

Лемма 9. При выполнении условий леммы 8 для любого $T \in (0, T_0)$ справедливы оценки:

$$\sup_{t \in [0, T]} [n(x, t)]_\alpha \leq C(N, \alpha) \left[\|D_x n_0\|_\infty + T^{(1-\alpha)/2} \|n\|_T^m (\|n\|_T + \|p\|_T) \right], \quad (143)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} [p(x, t)]_\alpha \leq C(N, \alpha) \left[\|D_x p_0\|_\infty + T^{(1-\alpha)/2} \|p\|_T^m (\|n\|_T + \|p\|_T) \right], \quad (144)$$

$$\sup_{t \in [0, T]} [D_{x_j} \phi(x, t)]_\alpha \leq C(N, \alpha) (\|n\|_T + \|p\|_T), \quad j = \overline{1, N} \quad (145)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \neq y} \frac{|n(x, t)|^{m-1} n(x, t) D_x \phi(x, t) - |n(y, t)|^{m-1} n(y, t) D_y \phi(y, t)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \\ &\leq K(n_0, n, p, T, m, \alpha) < +\infty, \end{aligned} \quad (146)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \sup_{x \neq y} \frac{|p(x, t)|^{m-1} p(x, t) D_x \phi(x, t) - |p(y, t)|^{m-1} p(y, t) D_y \phi(y, t)|}{|x - y|^\alpha} &\leq \\ &\leq K(p_0, p, n, T, m, \alpha) < +\infty \end{aligned} \quad (147)$$

для любого $\alpha \in (0, 1)$, поэтому $n, p \in C_{x, t, b}^{(1, 0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ и имеют место равенства:

$$\begin{aligned} D_{x_j} n(x, t) &= \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) D_{x_j} n_0(x + 2a\sqrt{t}z) dz - \\ &- a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau), |n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau) \right) dy d\tau, \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} D_{x_j} p(x, t) &= \frac{1}{\pi^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-|z|^2) D_{x_j} p_0(x + 2b\sqrt{t}z) dz + \\ &+ b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau), |p(x, \tau)|^{m-1} p(x, \tau) D_x \phi(x, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - |p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau) \right) dy d\tau, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\Delta_x \phi(x, t) = p(x, t) - n(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad (150)$$

Доказательство. Оценки (143), (144) и (145) являются следствиями неравенств (51), (85) и (64). С учетом (143)–(145) получаем оценки (151) и (152). При этом в силу оценок (151) и (152) и (84), (66) получаем равенства (148), (149) и (150), причем $n, p \in C_{x, t}^{(1, 0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$. Введем обозначение:

$$\begin{aligned} J(x, t) &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau), |n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau) \right) dy d\tau = J_1(x, t) + J_2(x, t), \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned}
J_1(x, t) &:= \\
&:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x, 1)} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau), |n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau) \right) dy d\tau, \quad (152)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(x, t) &:= \\
&:= \int_0^t \int_{O(x, 1)} \left(D_{y_j} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau), |n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau) \right) dy d\tau. \quad (153)
\end{aligned}$$

Для J_1 имеет место такая оценка:

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{\infty, T} &\leq C(N)T \|n\|_{\infty, T}^m [\|n\|_T + \|p\|_T] \int_{\mathbb{R}^N \setminus O(x, 1)} \frac{dy}{|x - y|^{N+2}} = \\
&= C(N)T \|n\|_{\infty, T}^m [\|n\|_T + \|p\|_T]. \quad (154)
\end{aligned}$$

Для J_2 имеет место такая оценка:

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_{\infty, T} &\leq C(N)K(n_0, n, p, T, m, \alpha) \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]} \int_0^t \frac{d\tau}{(t - \tau)^{\mu_1}} \times \\
&\times \int_{O(x, 1)} \frac{dy}{|x - y|^{N+2-2\mu_1-\alpha}} \leq C(N, \alpha, \mu_1)K(n_0, n, p, T, m, \alpha)T^{1-\mu_1} \quad (155)
\end{aligned}$$

для любого $\mu_1 \in (1 - \alpha/2, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$. С учетом (151)–(155) из равенства (148) получим оценку:

$$\begin{aligned}
\|D_x n\|_{\infty, T} &\leq C(N) \|D_x n_0\|_{\infty} + C(N)T \|n\|_{\infty, T}^m [\|n\|_T + \|p\|_T] + \\
&+ C(N, \alpha, \mu_1)K(n_0, n, p, T, m, \alpha)T^{1-\mu_1}. \quad (156)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом из равенства (149) получим такую оценку:

$$\begin{aligned}
\|D_x p\|_{\infty, T} &\leq C(N) \|D_x p_0\|_{\infty} + C(N)T \|p\|_{\infty, T}^m [\|n\|_T + \|p\|_T] + \\
&+ C(N, \alpha, \mu_1)K(p_0, p, n, T, m, \alpha)T^{1-\mu_1}. \quad (157)
\end{aligned}$$

Из равенств (156) и (157) получаем, что, в частности, $n, p \in C_{x, t, b}^{(1, 0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$.

□

Имеет место следующая:

Лемма 10. В классе $n, p \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \cap C_{x,t,b}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, $n_0, p_0 \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ система интегральных уравнений (139)–(141) эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned} n(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t) n_0(y) dy + \\ & + a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau) \operatorname{div} (|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t) p_0(y) dy - \\ & - b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau) \operatorname{div} (|p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \end{aligned} \quad (159)$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{n(y, t) - p(y, t)}{|x - y|^{N-2}} dy \quad (160)$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$.

Доказательство. Является следствием лемм 8, 9 и лемм 3–5. □

Справедлива следующая:

Лемма 11. Если $n_0, p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$, то существует такое максимальное $T_0 = T_0(n_0, p_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ система уравнений (158)–(160) имеет единственное решение в классе:

$$\begin{aligned} \{n, p, \phi\} \in & C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times \\ & \times C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)), \end{aligned} \quad (161)$$

$n, p \in C_{x,t,b}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$, причем $D_{x_j} n, D_{x_j} p, D_{x_j} \phi \in C_{x,loc}^\beta(\mathbb{R}^N)$ при $\beta \in (0, 1)$, $j = \overline{1, N}$ равномерно по $t \in [0, T]$. Более того,

$$\operatorname{div}(|n(x, t)|^{m-1} n(x, t) D_x \phi(x, t)) \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \cap C_{x,loc}^\beta(\mathbb{R}^N), \quad (162)$$

$$\operatorname{div}(|p(x, t)|^{m-1} p(x, t) D_x \phi(x, t)) \in C_b(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \cap C_{x,loc}^\beta(\mathbb{R}^N) \quad (163)$$

равномерно по $t \in [0, T]$.

Доказательство. Является следствием лемм 8 и 10, а также свойств (52), (64) и (133). □

Справедлива следующая основная:

Теорема 1. Для любых $n_0, p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $m \geq 1$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(n_0, p_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное в классе

$$\{n, p, \phi\} \in C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times \\ \times C([0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)) \times C([0, T]; C_b^{(1)}(\mathbb{R}^N)), \quad (164)$$

$n, p \in C_{x,t,b}^{(1,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ слабое локальное во времени решение задачи Коши в смысле определения 1, причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в этом последнем случае имеет место предельное свойство:

$$\lim_{T \uparrow T_0} (\|n\|_T + \|p\|_T) = +\infty. \quad (165)$$

Кроме того, при этом $n, p \in C_{x,t,b}^{(2,0)}(\mathbb{R}^N \times [0, T]) \cap C_{x,t,b}^{(0,1)}(\mathbb{R}^N \times (0, T])$, $\phi \in C_{x,b}^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ для каждого $t \in [0, T]$, причем справедливы поточечные равенства:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 (\Delta_x n + \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad (166)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = b^2 (\Delta_x p - \operatorname{div}(|p|^{m-1} p D_x \phi)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T], \quad (167)$$

$$\Delta_x \phi = p - n, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T], \quad (168)$$

$$n(x, 0) = n_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^N. \quad (169)$$

Доказательство. Теорема является следствием лемм 3–7 9–11, а также леммы 2. □

7 Априорные оценки

Прежде всего заметим, что справедливы оценки при $t > 0$:

$$\|\mathcal{E}_c\|_r \leq C(N, r) t^{-(N/2)(1-1/r)}, \quad r \in [1, +\infty], \quad (170)$$

$$\|D_x \mathcal{E}_c\|_r \leq C(N, r) t^{-N/2(1-1/r)-1/2}, \quad r \in [1, +\infty]. \quad (171)$$

Из интегральных уравнений (158) и (159) вытекают следующие равенства:

$$D_x n(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t) D_y n_0(y) dy - \\ - a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau) \operatorname{div}(|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \quad (172)$$

$$\begin{aligned}
D_x p(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t) D_y p_0(y) dy + \\
&+ b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_y \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau) \operatorname{div} (|p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau.
\end{aligned} \tag{173}$$

Используя неравенство Юнга для свертки и оценку 63 с учетом (170) и (171) из интегральных уравнений (172) и (173) получим следующие интегральные неравенства при $t \in [0, T]$ для любого фиксированного $T \in (0, T_0)$ и $r \in [1, +\infty]$:

$$\begin{aligned}
&\|D_x n\|_r \leq \|D_x n_0\|_r + \\
&+ C(N) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} [\| |n|^{m-1} n(n-p) \|_r(s) + \|D_x(|n|^{m-1} n) \|_r(s)] ds,
\end{aligned} \tag{174}$$

$$\begin{aligned}
&\|D_x p\|_r \leq \|D_x p_0\|_r + \\
&+ C(N) \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} [\| |p|^{m-1} p(n-p) \|_r(s) + \|D_x(|p|^{m-1} p) \|_r(s)] ds,
\end{aligned} \tag{175}$$

причем имеем:

$$\| |n|^{m-1} n(n-p) \|_r \leq (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1}, \quad \| |p|^{m-1} p(n-p) \|_r \leq (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1}, \tag{176}$$

$$\|D_x(|n|^{m-1} n) \|_r \leq C(N, m) \|D_x n\|_r (\|n\|_T + \|p\|_T)^m, \tag{177}$$

$$\|D_x(|p|^{m-1} p) \|_r \leq C(N, m) \|D_x p\|_r (\|n\|_T + \|p\|_T)^m. \tag{178}$$

Таким образом, из (174) и (175) с учетом (176)–(178) получим неравенства:

$$\begin{aligned}
&\|D_x n\|_r \leq \|D_x n_0\|_r + C(N) T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1} + \\
&+ C(N, m) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_x n\|_r(s) ds,
\end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned}
&\|D_x p\|_r \leq \|D_x p_0\|_r + C(N) T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1} + \\
&+ C(N, m) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_x p\|_r(s) ds.
\end{aligned} \tag{180}$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана–Бихари [10] из (179) и (180) получим оценки для всех $t \in [0, T]$ и $r \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|D_x n\|_r(t) &\leq \left(\|D_x n_0\|_r + C(N)T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(C(N, m)T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^m \right), \end{aligned} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} \|D_x p\|_r(t) &\leq \left(\|D_x p_0\|_r + C(N)T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^{m+1} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(C(N, m)T^{1/2} (\|n\|_T + \|p\|_T)^m \right). \end{aligned} \quad (182)$$

Значит,

$$n, p \in L^\infty(0, T; W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{при } r \in [1, +\infty]. \quad (183)$$

Из оценок (181), (182) несложно получить, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|n|^{m-1}n D_x \phi), \operatorname{div}(|p|^{m-1}p D_x \phi) &\in L^\infty(0, T; L^r(\mathbb{R}^N)) \\ &\text{для всех } r \in [1, +\infty]. \end{aligned} \quad (184)$$

Кроме того,

$$\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)). \quad (185)$$

С учетом (183) из интегральных уравнений (172), (173) точно также как при доказательстве леммы 5 (см. шаг 1) получим, что

$$D_{x_j} n, D_{x_j} p \in C((0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)). \quad (186)$$

Отсюда и из результата теоремы 1 получим, что

$$n, p \in C((0, T]; W^{1,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех } r \in [1, +\infty]. \quad (187)$$

Используя очевидные свойства свертки из (158) и (159) можно получить при $m \geq 2$ и при $m = 1$ равенства:

$$\begin{aligned} D_{x_j} D_x n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x - y, t) D_{y_j} D_y n_0(y) dy + \\ &+ a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_y \mathcal{E}_a(x - y, t - \tau) \left((D_{y_j} D_y (|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau)), D_y \phi(y, \tau)) + \right. \\ &\quad \left. + (D_y (|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau)), D_{y_j} D_y \phi) + \right. \\ &\quad \left. + D_{y_j} (|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) (n(y, \tau) - p(y, \tau))) \right) dy d\tau, \end{aligned} \quad (188)$$

$$\begin{aligned}
D_{x_j} D_x p(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x - y, t) D_{y_j} D_y p_0(y) dy - \\
&- b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_y \mathcal{E}_b(x - y, t - \tau) \left((D_{y_j} D_y |p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau), D_y \phi(y, \tau)) + \right. \\
&\quad \left. + (D_y (|p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau)), D_{y_j} D_y \phi) + \right. \\
&\quad \left. + D_{y_j} (|p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) (n(y, \tau) - p(y, \tau))) \right) dy d\tau. \quad (189)
\end{aligned}$$

Заметим, что справедливы равенства:

$$D_{x_j} D_x (|n|^{m-1} n) = m |n|^{m-1} D_{x_j} D_x n + m(m-1) |n|^{m-3} n D_{x_j} n D_x n, \quad (190)$$

$$D_{x_j} D_x (|p|^{m-1} p) = m |p|^{m-1} D_{x_j} D_x p + m(m-1) |p|^{m-3} p D_{x_j} p D_x p. \quad (191)$$

Из (188) и (189) с помощью неравенства Юнга для сверток можно получить оценки для любого $r \in [1, +\infty]$:

$$\begin{aligned}
\|D_{x_j} D_x n\|_r(t) &\leq C(N) \|D_{x_j} D_x n_0\|_r + \\
&+ C(N, m) T^{1/2} \|D_{x_j} D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-1} \|D_x n\|_{r, T} + \\
&+ C(N, m) T^{1/2} (\|D_x n\|_{r, T} + \|D_x p\|_{r, T}) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m + \\
&+ C(N, m)(m-1) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-2} \|D_{x_j} n\|_{\infty, T} \|D_x n\|_{r, T} + \\
&+ C(N, m) \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-1} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_{x_j} D_x n\|_r(s) ds, \quad (192)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|D_{x_j} D_x p\|_r(t) &\leq C(N) \|D_{x_j} D_x p_0\|_r + \\
&+ C(N, m) T^{1/2} \|D_{x_j} D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-1} \|D_x p\|_{r, T} + \\
&+ C(N, m) T^{1/2} (\|D_x n\|_{r, T} + \|D_x p\|_{r, T}) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m + \\
&+ C(N, m)(m-1) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-2} \|D_{x_j} p\|_{\infty, T} \|D_x p\|_{r, T} + \\
&+ C(N, m) \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-1} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|D_{x_j} D_x p\|_r(s) ds, \quad (193)
\end{aligned}$$

Используя неравенство Гронуолла–Беллмана–Бихари [10] получим оценки для любого $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|D_{x_j} D_x n\|_r(t) \leq & \left(C(N) \|D_{x_j} D_x n_0\|_r + \right. \\ & + C(N, m) T^{1/2} \|D_{x_j} D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-1} \|D_x n\|_{r, T} + \\ & + C(N, m) T^{1/2} (\|D_x n\|_{r, T} + \|D_x p\|_{r, T}) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m + \\ & + C(N, m) (m-1) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-2} \|D_{x_j} n\|_{\infty, T} \|D_x n\|_{r, T} \Big) \times \\ & \times \exp \left(C(N, m) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|n\|_{\infty, T}^{m-1} \right), \quad (194) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D_{x_j} D_x p\|_r(t) \leq & \left(C(N) \|D_{x_j} D_x p_0\|_r + \right. \\ & + C(N, m) T^{1/2} \|D_{x_j} D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-1} \|D_x p\|_{r, T} + \\ & + C(N, m) T^{1/2} (\|D_x n\|_{r, T} + \|D_x p\|_{r, T}) (\|n\|_T + \|p\|_T)^m + \\ & + C(N, m) (m-1) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-2} \|D_{x_j} p\|_{\infty, T} \|D_x p\|_{r, T} \Big) \times \\ & \times \exp \left(C(N, m) T^{1/2} \|D_x \phi\|_{\infty, T} \|p\|_{\infty, T}^{m-1} \right). \quad (195) \end{aligned}$$

Значит, $n, p \in L^\infty(0, T; W^{2,r}(\mathbb{R}^N))$ при $r \in [1, +\infty]$. Аналогично доказательству соотношений (187) и с учетом (187) получим из (188), (189), что

$$D_{x_j x_k}^2 n, D_{x_j x_k}^2 p \in C((0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)). \quad (196)$$

Отсюда и с учетом (187) получим, что

$$n, p \in C((0, T]; W^{2,r}(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех} \quad r \in [1, +\infty]. \quad (197)$$

Наконец при $t \in (0, T)$ с учетом (135) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}
D_t n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} D_t \mathcal{E}_a(x-y, t) n_0(y) dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x, t)|^{m-1} n(x, t) D_x \phi(x, t)) + \\
&+ a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} D_t \mathcal{E}_a(x-y, t-\tau) \left(\operatorname{div}(|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{div}(|n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau)) \right) dy d\tau = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \Delta_y \mathcal{E}_a(x-y, t) n_0(y) dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x, t)|^{m-1} n(x, t) D_x \phi(x, t)) + \\
&+ a^4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Delta_y \mathcal{E}_a(x-y, t-\tau) \left(\operatorname{div}(|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) - \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{div}(|n(x, \tau)|^{m-1} n(x, \tau) D_x \phi(x, \tau)) \right) dy d\tau = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x-y, t) \Delta_y n_0(y) dy + a^2 \operatorname{div}(|n(x, t)|^{m-1} n(x, t) D_x \phi(x, t)) - \\
&- a^4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_a(x-y, t-\tau), D_y \operatorname{div}(|n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau))) dy d\tau,
\end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned}
D_t p(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x-y, t) \Delta_y p_0(y) dy - b^2 \operatorname{div}(|p(x, t)|^{m-1} p(x, t) D_x \phi(x, t)) + \\
&+ b^4 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_b(x-y, t-\tau), D_y \operatorname{div}(|p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau))) dy d\tau.
\end{aligned} \tag{199}$$

Из равенств (198), (199) с учетом полученных ранее оценок вытекает, что $D_t n, D_t p \in L^\infty(0, T; L^r(\mathbb{R}^N))$ для всех $r \in [1, +\infty]$. Снова, как и при доказательстве (196) из интегральных уравнений (198) и (199) получим, что

$$D_t n, D_t p \in C((0, T]; L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{200}$$

Таким образом, получаем, что

$$n, p \in C^{(1)}((0, T]; L^r(\mathbb{R}^N)) \quad \text{для всех } r \in [1, +\infty]. \tag{201}$$

Таким образом, доказана следующая основная:

Теорема 2. Если либо $m = 1$ либо $m \geq 2$, $n_0, p_0 \in C^{1+\alpha}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и, кроме того, $n_0, p_0 \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ для любого $r \in [1, +\infty]$, то слабое локальное во времени решение $\{n, p, \phi\}$ задачи Коши в смысле определения 1 обладает такой гладкостью: $n, p \in C((0, T]; W^{2,r}(\mathbb{R}^N)) \cap C^{(1)}((0, T]; L^r(\mathbb{R}^N))$, $\phi \in L^\infty(0, T; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ для всех $r \in [1, +\infty]$ и для любого $T \in (0, T_0)$, где $T_0 = T_0(n_0, p_0) > 0$ определено в теореме 1.

Справедлива следующая:

Лемма 12. Если $u \in C((0, T]; W^{2,r}(\mathbb{R}^N))$ для $r \in [1, +\infty]$ и $\phi(t) \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^N)$ для каждого $t \in [0, T]$, $m \geq 1$, то справедливы соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x, t) f(u(x, t)) dx \leq 0 \quad \text{для всех } t \in (0, T], \quad (202)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(u(x, t)) \operatorname{div}(|u(x, t)|^{m-1} u(x, t) D_x \phi(x, t)) dx = 0 \quad \text{для всех } t \in (0, T], \quad (203)$$

где $f = \operatorname{sign}(s)$, $f = \operatorname{sign}(s^+)$, $f = \operatorname{sign}(s^-)$, $f = \operatorname{sign}((s - h)^+)$.

Доказательство. Шаг 1. Доказательство (202). Пусть сначала $f_\varepsilon \in C_b^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и является монотонно неубывающей. Тогда для $t \in (0, T]$ справедливы соотношения:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x, t) f_\varepsilon(u(x, t)) dx = - \int_{\mathbb{R}^N} f'_\varepsilon(u(x, t)) |D_x u(x, t)|^2 dx \leq 0. \quad (204)$$

Рассмотрим теперь, например, случай функции $f = \operatorname{sign}(s)$. Тогда в качестве функции f_ε при $\varepsilon > 0$ возьмем функцию:

$$f_\varepsilon := \begin{cases} 1, & \text{если } s \geq \varepsilon, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}s\right), & \text{если } s \in [-\varepsilon, \varepsilon], \\ -1, & \text{если } s \leq -\varepsilon. \end{cases} \quad (205)$$

Несложно убедиться в том, что $f_\varepsilon \in C_b^{(1)}(-\infty, +\infty)$, причем для каждого $s \in \mathbb{R}$ имеем:

$$f_\varepsilon(s) \rightarrow f(s) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0, \quad |f_\varepsilon(s)| \leq 1, \quad (206)$$

$$0 \leq f'_\varepsilon(s) \leq \frac{\pi}{2\varepsilon}. \quad (207)$$

С учетом (207) из (204) получим неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x, t) f_\varepsilon(u(x, t)) dx \leq 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (208)$$

С учетом (206) в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ из (208) получим неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x, t) \operatorname{sign}(u(x, t)) dx \leq 0 \quad \text{для любого } t \in (0, T]. \quad (209)$$

Шаг 2. Доказательство (203). Рассмотрим функцию $f = \operatorname{sign}(s)$. При $t \in (0, T]$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u(x, t)) \operatorname{div}(|u(x, t)|^{m-1} u(x, t) D_x \phi(x, t)) dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{sign}(u(x, t)) (D_x(|u(x, t)|^{m-1} u(x, t)), D_x \phi(x, t)) dx + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t)|^m \Delta_x \phi(x, t) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (D_x |u(x, t)|^m, D_x \phi(x, t)) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t)|^m \Delta_x \phi(x, t) dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t)|^m \Delta_x \phi(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t)|^m \Delta_x \phi(x, t) dx = 0. \end{aligned} \quad (210)$$

Аналогичным образом, рассматриваются функции $f = \operatorname{sign}(s^+)$, $f = \operatorname{sign}(s^-)$. Рассмотрим функцию $f = \operatorname{sign}((s - m)^+)$. Заметим, что если $|u|^{m-1} u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$, то функция

$$u_h := \operatorname{sign}((u-h)^+) |u|^{m-1} u = \begin{cases} |u|^{m-1} u, & \text{при } u \geq h, \\ 0, & \text{при } u < h, \end{cases} \quad u_h \in W^{1,r}(\mathbb{R}^N),$$

$$D_x u_h := \begin{cases} D_x |u|^{m-1} u, & \text{если } u \geq h, \\ 0, & \text{если } u < h. \end{cases}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны (210). Лемма доказана полностью. $\square$

Теперь умножим обе части уравнения (166) на функцию $\operatorname{sign}(n)$ при $t \in (0, T]$ и с учетом теоремы 2 и леммы 12 получим цепочку соотношений:

$$\int_{\mathbb{R}^N} n_t(x, t) \operatorname{sign}(n(x, t)) dx \leq 0, \quad (211)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} n_t(x, t) \operatorname{sign}(n(x, t)) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |n(x, t)| dx, \quad (212)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |n(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |n(x, \varepsilon)| dx \quad \text{для всех } t \in [\varepsilon, T], \quad \varepsilon \in (0, T). \quad (213)$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ и из теоремы 2 получим неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |n(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |n_0(x)| dx \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (214)$$

Аналогичным образом из уравнения (166) получим оценку:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |p(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |p_0(x)| dx \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (215)$$

Пусть теперь $h := \|n_0\|_\infty$. Тогда из умножив уравнение (166) на $\text{sign}((n - h)^+)$ с учетом теоремы 2 и леммы 12 получим неравенство:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} (n(x, t) - h)^+(x, t) dx \leq 0 \quad \text{при } t \in (0, T], \quad (216)$$

из которого, как и ранее, получаем оценку:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (n(x, t) - h)^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} (n_0(x) - h)^+ dx = 0 \quad \text{при } t \in [0, T]. \quad (217)$$

Отсюда получаем, что

$$n(x, t) \leq \|n_0\|_\infty \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad (218)$$

Из уравнения (167) аналогичным образом получаем, что

$$p(x, t) \leq \|p_0\|_\infty \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \quad (219)$$

Если умножит уравнение (166) на $\text{sign}(n^+)$, а уравнение (167) на $\text{sign}(p^+)$, то с учетом теоремы 2 и леммы 12 получим неравенства для всех $t \in [0, T]$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} n^+(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} p^+(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} p_0^+(x) dx. \quad (220)$$

Если умножит уравнение (166) на $\text{sign}(n^-)$, а уравнение (167) на $\text{sign}(p^-)$, то с учетом теоремы 2 и леммы 12 получим неравенства для всех $t \in [0, T]$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} n^-(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} p^-(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x) dx. \quad (221)$$

Наконец, если проинтегрировать уравнения (166) и (167), то получим равенства для всех $t \in [0, T]$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} n(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} p(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} p_0(x) dx. \quad (222)$$

С учетом (220) и (222) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} n^+(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^N} n^-(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x) dx \geq \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N} n^+(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x) dx, \end{aligned} \quad (223)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} n^-(x, t) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x) dx. \quad (224)$$

Также получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} p^-(x, t) dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x) dx. \quad (225)$$

Из (221) и (224), (225) получим равенства:

$$\int_{\mathbb{R}^N} n^-(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} n_0^-(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} p^-(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} p_0^-(x) dx. \quad (226)$$

Из (222) и (226) получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^N} n^+(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} n_0^+(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} p^+(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^N} p_0^+(x) dx. \quad (227)$$

Если $n_0, p_0 \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$, то из (226) получаем, что $n, p \geq 0$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]$. Таким образом, справедлива следующая вспомогательная:

Лемма 13. *Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $n_0, p_0 \geq 0$, то для локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 1 справедливы следующие априорные оценки:*

$$\begin{aligned} 0 \leq n(x, t) \leq \|n_0\|_\infty, \quad 0 \leq p(x, t) \leq \|p_0\|_\infty, \quad \|n\|_{1,T} \leq \|n_0\|_1, \\ \|p\|_{1,T} \leq \|p_0\|_1 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T]. \end{aligned} \quad (228)$$

Из теоремы 1 и леммы 13 приходим к следующей:

Лемма 14. *Если выполнены условия теоремы 2 и, кроме того, $n_0, p_0 \geq 0$, то в теореме 1 время $T_0(n_0, p_0) = +\infty$.*

8 Асимптотическое поведение слабого решения при больших временах

Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда умножим обе части уравнения (166) на $|n|^{q-2}n$ при $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, T]$ и $q \geq 2$. Справедлива

следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |n|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} n \Delta_x n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} n \operatorname{div}(|n|^{m-1} n D_x \phi) dx = \\
&= -(q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} |D_x n|^2 dx + m \int_{\mathbb{R}^N} (D_x n, D_x \phi) |n|^{m+q-3} n dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{m+q-1} \Delta_x \phi dx = \\
&= -(q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} |D_x n|^2 dx + \frac{1}{m+q-1} \int_{\mathbb{R}^N} (D_x |n|^{m+q-1}, D_x \phi) dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{m+q-1} \Delta_x \phi dx = \\
&= -(q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} |D_x n|^2 dx + \frac{m+q-2}{m+q-1} \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{m+q-1} \Delta_x \phi dx = \\
&= -(q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} |D_x n|^2 dx + \frac{m+q-2}{m+q-1} \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{m+q-1} (p-n) dx. \quad (229)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, умножая уравнение (167) на $|p|^{q-2} p$ и интегрируя по частям, получим равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b^2} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^N} |p|^q dx &= -(q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |p|^{q-2} |D_x p|^2 dx - \\
&\quad - \frac{m+q-2}{m+q-1} \int_{\mathbb{R}^N} |p|^{m+q-1} (p-n) dx. \quad (230)
\end{aligned}$$

Складывая равенства (229) и (230), получим равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a^2} \|n\|_q^q + \frac{1}{b^2} \|p\|_q^q \right] &+ (q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |n|^{q-2} |D_x n|^2 dx + (q-1) \int_{\mathbb{R}^N} |p|^{q-2} |D_x p|^2 dx = \\
&= \frac{m+q-2}{m+q-1} \int_{\mathbb{R}^N} (|n|^{m+q-1} - |p|^{m+q-1}) (p-n) dx. \quad (231)
\end{aligned}$$

Если дополнительно мы потребуем, чтобы $n_0, p_0 \geq 0$, то $n, p \geq 0$ и поэтому для правой часть равенства (231) будет выполнено неравенство:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (n^{m+q-1} - p^{m+q-1}) (p-n) dx \leq 0. \quad (232)$$

После элементарных преобразований из (231) с учетом (232) получим неравенство:

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a^2} \|n\|_q^q + \frac{1}{b^2} \|p\|_q^q \right] + \frac{4(q-1)}{q^2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left| D_x(|n|^{q/2}) \right|^2 + \left| D_x(|p|^{q/2}) \right|^2 \right] dx \leq 0. \quad (233)$$

Заметим, что в работе [3] доказана лемма 1 такого содержания:

Лемма 15. Если $v \in W^{2,r}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$ при $r \in [2, +\infty)$, то существует такая постоянная $C = C(r, N) > 0$, что выполнено неравенство:

$$\|v\|_r^{(N(r-1)+2)r/(N(r-1))} \leq C \|v\|_1^{2r/(N(r-1))} \left\| \left| D_x(|v|^{r/2}) \right| \right\|_2^2. \quad (234)$$

Из леммы 15 при условиях $n_0, p_0 \geq 0$ с учетом оценок (228) получим оценки снизу:

$$\left\| \left| D_x(|n|^{q/2}) \right| \right\|_2^2 \geq \frac{C}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}} \|n\|_q^{(N(q-1)+2)q/(N(q-1))}, \quad (235)$$

$$\left\| \left| D_x(|p|^{q/2}) \right| \right\|_2^2 \geq \frac{C}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}} \|p\|_q^{(N(q-1)+2)q/(N(q-1))}. \quad (236)$$

Из неравенства (233) с учетом (235) и (236) получим оценку:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{a^2} \|n\|_q^q + \frac{1}{b^2} \|p\|_q^q \right] + \\ & + C(q, N) \left[\frac{a^{2\alpha}}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}} \left(\frac{\|n\|_q^q}{a^2} \right)^\alpha + \frac{b^{2\alpha}}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}} \left(\frac{\|p\|_q^q}{b^2} \right)^\alpha \right] \leq 0, \end{aligned} \quad (237)$$

$$\alpha := \frac{N(q-1)+2}{N(q-1)}.$$

Из (237) получим такую оценку:

$$\frac{d}{dt} (f_1(t) + f_2(t)) + A(f_1^\alpha(t) + f_2^\alpha(t)) \leq 0, \quad (238)$$

$$f_1 := \frac{\|n\|_q^q}{a^2}, \quad f_2 := \frac{\|p\|_q^q}{b^2}. \quad (239)$$

$$A = \min \{A_1, A_2\}, \quad (240)$$

$$A_1 := C(q, N) \frac{a^{2\alpha}}{\|n_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}, \quad A_2 := C(q, N) \frac{b^{2\alpha}}{\|p_0\|_1^{2q/(N(q-1))}}. \quad (241)$$

В силу выпуклости вниз функции x^β при $\beta \in (1, +\infty)$, $x > 0$, то приходим к такой оценке:

$$\frac{dz}{dt} + Bz^\alpha \leq 0, \quad z := f_1 + f_2, \quad B := \frac{A}{2^{\alpha-1}}, \quad (242)$$

из которого получаем:

$$z(t) \leq \frac{1}{(z_0^{1-\alpha} + Bt)^{1/(\alpha-1)}}. \quad (243)$$

Отсюда получаем оценки:

$$\|n\|_q \leq \frac{C_1}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad \|p\|_q \leq \frac{C_2}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad q \in [2, +\infty), \quad (244)$$

$$C_1 := a^{2/q}, \quad C_2 := b^{2/q}, \quad C_3 := \left(\frac{\|n_0\|_q^q}{a^2} + \frac{\|p_0\|_q^q}{b^2} \right)^{-2/(N(q-1))}. \quad (245)$$

Теперь заметим, что справедливо следующее интерполяционное неравенство для пространств Лебега:

$$\|u\|_q \leq \|u\|_s^\theta \|u\|_t^{1-\theta}, \quad (246)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}, \quad \theta \in [0, 1], \quad 1 \leq t \leq q \leq s \leq +\infty. \quad (247)$$

Теперь заметим, что имеют место неравенства

$$\|n\|_2 \leq \frac{C_1}{(C_3 + Bt)^{N/4}}, \quad \|p\|_2 \leq \frac{C_2}{(C_3 + Bt)^{N/4}}, \quad (248)$$

$$\|n\|_1 \leq \|n_0\|_1, \quad \|p\|_1 \leq \|p_0\|_1. \quad (249)$$

Положим в (246) и (247) $s = 2$, $t = 1$. Тогда с учетом (248) и (249) получим оценки:

$$\|n\|_q \leq \frac{C_4}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad C_4 = C_1^{2(1-1/q)} \|n_0\|_1^{(2-q)/q}, \quad q \in [1, 2], \quad (250)$$

$$\|p\|_q \leq \frac{C_5}{(C_3 + Bt)^{N(1-1/q)/2}}, \quad C_5 = C_2^{2(1-1/q)} \|p_0\|_1^{(2-q)/q}, \quad q \in [1, 2]. \quad (251)$$

Таким образом, оценки (244) при $q \in [2, +\infty)$ для $\|n\|_q$ и $\|p\|_q$ мы распространили на аналогичные оценки (250) и (251), но уже при $q \in [1, 2]$.

В работе [3] доказана следующая лемма (см. лемма 3 работы [3]):

Лемма 16. Для любого $r \in [1, +\infty]$ существует такая постоянная $C = C(r, N) > 0$, что

$$\|G(t) * \phi - MG(t)\|_r \leq C \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)} t^{-(N/2)(1-1/r)-1/2} \quad \text{для любого } t > 0 \quad (252)$$

и для любого $\phi \in L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)$, причем

$$M := \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) dx, \quad G(t) := \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp(-|x|^2/(4t)).$$

Справедлива следующая основная:

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и дополнительно $n_0, p_0 \in L^1(\mathbb{R}^N; 1 + |x|)$, тогда для любого $q \in (1, +\infty)$ найдутся такие постоянные $C_1(q, N, m) > 0$ и $C_2(q, N, m) > 0$, что при $t > 0$ справедливы неравенства:

$$\|n(t) - M_n \mathcal{E}_a(t)\|_q \leq \frac{C_1}{t^{\beta(q)}}, \quad \|p(t) - M_p \mathcal{E}_b(t)\|_q \leq \frac{C_2}{t^{\beta(q)}}, \quad (253)$$

$$\beta(q) := \begin{cases} N(1 - 1/q)/2 + 1/2, & \text{если } N > 3/m, \\ 3(1 - 1/q)/2 + 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3, m = 1 \end{cases} \quad (254)$$

для любого $\varepsilon > 0$, где

$$M_n := \int_{\mathbb{R}^N} n_0(x) dx, \quad M_p := \int_{\mathbb{R}^N} p_0(x) dx. \quad (255)$$

Кроме того, существует такая постоянная $C_3(q, N, m) > 0$, что при $t > 0$ справедливо неравенство:

$$\|D_x \phi(t) - D_x \Phi(t)\|_q \leq \frac{C_3}{t^{\sigma(q)}}, \quad q > \frac{N}{N-1}, \quad (256)$$

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} (M_n \mathcal{E}_a(y, t) - M_p \mathcal{E}_b(y, t)) dy, \quad (257)$$

$$\sigma(q) := \begin{cases} N(1 - 1/q)/2 - 1/2, & \text{если } N > 3/m, \\ 3(1 - 1/q)/2 - 1/2 - \varepsilon, & \text{если } N = 3, m = 1 \end{cases} \quad (258)$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Доказательство. В силу результата лемм 2 и 10 всякое слабое решение задачи Коши в смысле определения 1 и только оно является решением соответствующей гладкости уравнений

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_a(x-y, t) n_0(y) dy - \\ &- a^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_a(x-y, t-\tau), |n(y, \tau)|^{m-1} n(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \end{aligned} \quad (259)$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}_b(x-y, t) p_0(y) dy + \\ &+ b^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} (D_y \mathcal{E}_b(x-y, t-\tau), |p(y, \tau)|^{m-1} p(y, \tau) D_y \phi(y, \tau)) dy d\tau, \end{aligned} \quad (260)$$

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{n(y, t) - p(y, t)}{|x-y|^{N-2}} dy. \quad (261)$$

С учетом леммы 16 справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|n(t) - M_n \mathcal{E}_a(t)\|_q &\leq C_{1q} \|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)} t^{-N(1-1/q)/2-1/2} + \\ &+ a^2 \left\| \int_0^t ds (D_x \mathcal{E}_a(t-s) * |n(s)|^{m-1} n(s) D_x \phi(s)) \right\|_q, \end{aligned} \quad (262)$$

$$\begin{aligned} \|p(t) - M_p \mathcal{E}_b(t)\|_q &\leq C_{2q} \|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N; 1+|x|)} t^{-N(1-1/q)/2-1/2} + \\ &+ b^2 \left\| \int_0^t ds (D_x \mathcal{E}_b(t-s) * |p(s)|^{m-1} p(s) D_x \phi(s)) \right\|_q. \end{aligned} \quad (263)$$

Дальнейшие рассуждения будем проводить для неравенства (262), поскольку для неравенства (263) рассуждения те же самые. Итак, справедливо равенство:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t ds (D_x \mathcal{E}_a(t-s) * |n(s)|^{m-1} n(s) D_x \phi(s)) \right\|_q &\leq \\ &\leq \left\| \int_0^{t/2} ds (D_x \mathcal{E}_a(t-s) * |n(s)|^{m-1} n(s) D_x \phi(s)) \right\|_q + \\ &+ \left\| \int_{t/2}^t ds (D_x \mathcal{E}_a(t-s) * |n(s)|^{m-1} n(s) D_x \phi(s)) \right\|_q := K_1 + K_2. \end{aligned} \quad (264)$$

Для K_2 справедлива такая оценка:

$$\begin{aligned} K_2 &\leq \int_{t/2}^t \|D_x \mathcal{E}_a(t-s)\|_1 \| |n(s)|^{m-1} n(s) D_x \phi(s) \|_q ds \leq \\ &\leq C \int_{t/2}^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \|n(s)\|_{mq_1}^m \|D_x \phi(s)\|_{qq_2} ds, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1. \end{aligned} \quad (265)$$

Из уравнения (261) с учетом теоремы 1 работы [11] получим оценку:

$$\|D_x \phi\|_{r_1} \leq C (\|n\|_{r_2} + \|p\|_{r_2}), \quad \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{N}, \quad r_2 > 1, \quad r_1 = qq_2. \quad (266)$$

Заметим, что требование $r_2 > 1$ приводит нас к необременительному условию:

$$q_2 > \frac{1}{q} \frac{N}{N-1}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1.$$

Таким образом, из (265) с учетом (266), а также оценок (244), (250) и (251) получим оценку:

$$K_2 \leq C \int_{t/2}^t \frac{1}{(t-s)^{1/2}} \frac{1}{s^{mN(1-1/(mq_1))/2}} \frac{1}{s^{N(1-1/r_2)/2}} ds, \quad (267)$$

причем справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{mN}{2} \left(1 - \frac{1}{mq_1}\right) + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{r_2}\right) &= \frac{N}{2}(m+1) - \frac{N}{2} \left(\frac{1}{qq_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \\ &= \frac{N}{2}(m+1) - \frac{N}{2} \left(\frac{1}{qq_1} + \frac{1}{qq_2} + \frac{1}{N}\right) = \frac{N}{2}(m+1) - \frac{N}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{N}\right) = \\ &= \frac{N}{2} \left(m+1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (268)$$

с учетом которой из (267) получим такую оценку:

$$K_2 \leq \frac{C}{t^{N(m+1-1/q)/2-1}}, \quad t > 0. \quad (269)$$

Теперь получим оценку для K_1 . Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} K_1 &\leq \int_0^{t/2} \| \|D_x \mathcal{E}_a(t-s)\| \|_q \| |n(s)|^m D_x \phi(s) \|_1 ds \leq \\ &\leq C \int_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}} \|n(s)\|_{mr_1}^m \|D_x \phi(s)\|_{r_2} ds, \end{aligned} \quad (270)$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1, \quad \| \|D_x \mathcal{E}_a(t)\| \|_q \leq \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}}, \quad (271)$$

причем в силу теоремы 1 работы [11] имеем:

$$\| \|D_x \phi\| \|_{r_2} \leq C (\|n\|_{r_3} + \|p\|_{r_3}), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_3} - \frac{1}{N}, \quad r_3 > 1. \quad (272)$$

Причем требование $r_3 > 1$ приводит нас к необременительному условию:

$$r_2 > \frac{N}{N-1}, \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1.$$

Из (270) с учетом (272) получим оценку:

$$K_1 \leq C \int_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}} \frac{1}{(A_1 + A_2 s)^{mN(1-1/(mr_1))/2+N(1-1/r_3)/2}} ds, \quad (273)$$

причем $A_1, A_2 > 0$ и справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \frac{mN}{2} \left(1 - \frac{1}{mr_1}\right) + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{r_3}\right) &= \\ &= \frac{N}{2}(m+1) - \frac{N}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{N}\right) = \frac{N}{2} \left(m - \frac{1}{N}\right) = \frac{mN-1}{2}. \end{aligned} \quad (274)$$

Из (273) с учетом (274) получим оценку:

$$\begin{aligned} K_1 &\leq C \int_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^{N(1-1/q)/2+1/2}} \frac{1}{(A_1 + A_2 s)^{(mN-1)/2}} ds \leq \\ &\leq \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}} \int_0^{t/2} \frac{ds}{(A_1 + A_2 s)^{(mN-1)/2}} = \\ &= \frac{C}{t^{N(1-1/q)/2+1/2}} \begin{cases} 1, & \text{если } N > 3/m, \\ \frac{1}{A_2} \ln \left(\frac{A_2}{2A_1} t + 1 \right), & \text{если } N = 3, m = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (275)$$

Таким образом, из (262) с учетом (264), (269), (275) получим первую оценку из (253). Аналогичным образом приходим ко второй оценке из (253).

Для доказательства оценки (256) заметим, что в силу (253) справедливости оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^N} \left(D_x \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) (n(y, t) - M_n \mathcal{E}_a(y, t)) dy \right\|_q &\leq \\ &\leq C(N, q) \|n(t) - M_n \mathcal{E}_a(t)\|_r \leq \frac{C}{t^{\beta(r)}}, \end{aligned} \quad (276)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1}{N}, \quad r > 1. \quad (277)$$

Заметим, что неравенство $r > 1$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$q > \frac{N}{N-1}. \quad (278)$$

Кроме того, несложным вычислениями получаем, что

$$\beta(r) = \beta(q) - 1. \quad (279)$$

Из (276), (278) и (279) получаем оценку (256). Теорема доказана полностью. $\square$

References

- [1] Hao Wu, P.A. Markowich, Sogmu Zheng, *Global existence and asymptotic behavior for a semiconductor drift-diffusion-Poisson model*, Math. Models Methods Appl. Sci., **18**:3 (2008), 443–487. Zbl 1157.35013
- [2] A. Arnold, P.A. Markowich, G. Toscani, *On large time asymptotics for drift-diffusion-Poisson systems*, Transp. Theory Stat. Phys., **29**:3-5 (2000), 571–581. Zbl 1017.82041
- [3] M. Escobedo, E. Zuazua, *Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^N$* , J. Funct. Anal., **100**:1 (1991), 119–161. Zbl 0762.35011
- [4] P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev, *Nonlinear nonlocal equations in the theory of waves*, Translations of Mathematical Monographs, **133**, AMS, Providence, 1994. Zbl 0802.35002
- [5] N. Hayashi, E.I. Kaikina, P.I. Naumkin, I.A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Mathematics, **1884**, Springer, Berlin, 2006. Zbl 1130.35001
- [6] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Physical kinetics*, FIZMATLIT, Moscow, 2001. (Zbl 0997.76502, 1922)
- [7] V.A. Sergeev, A.M. Hodakov, *Nonlinear thermal models of semiconductor devices*, Ulgtu, Ulyanovsk, 2012.
- [8] N.V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in H older spaces*, Nauchyaya kniga, Novosibirsk, 1998. Zbl 0921.35002
- [9] D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of the second order*, Nauka, Moscow, 1989. Zbl 0691.35001
- [10] B.P. Demidovich, *Lectures on mathematical stability theory*, Nauka, Moscow, 1967. Zbl 0155.41601
- [11] E. Stein, *Singular integrals and differential properties of functions*, Mir, Moscow, 1973. Zbl 0281.44003

MAXIM OLEGOVICH KORPUKOV

MOSCOW STATE UNIVERSITY, PHYSICS DEPARTMENT, DIVISION OF MATHEMATICS;
 RUDN, MATHEMATICAL INSTITUTE OF S.M. NIKOL'SKII
 LENINSKIE GORY, GSP-1; MIKLUKHO-MAKLAYA ST., 6
 119991, MOSCOW, RUSSIA; 117198, MOSCOW, RUSSIA
 Email address: korpukov@gmail.com