

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКИХ ЧАСТИЦ ПОД
ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМА.Т. ИЛЬЧЕВ^{id}, А.С. САВИН^{id}*Посвящается 75-летию Василия Ивановича Васильева*

Abstract: A fluid layer of finite depth is described by Euler's equations governing the motions of the ideal fluid (water). The ice is assumed to be solid and it freely floats on the water surface. The ice cover is modeled by a geometrically non-linear elastic Kirchhoff-Love plate. The trajectories of liquid particles under the ice cover are found in the field of different nonlinear surface traveling waves of small, but finite amplitude. These waves are: the classical solitary wave of depression, existing on the water-ice interface when the initial stress in the ice cover is large enough, the generalized solitary wave, the envelope solitary wave and the so-called dark soliton. The last two waves indicate the focusing or defocusing of nonlinear carrier surface wave, the generalized solitary wave consists of solitary wave core and periodic asymptotic wave at spacial infinity, moreover for the algebraically small amplitude of the wave core the amplitude of the mentioned above periodic wave is exponentially small. The consideration is based on explicit asymptotic expressions for solutions describing the mentioned wave structures on the water-ice interface, as well as asymptotic solutions for the velocity field in the liquid column corresponding to these waves.

IL'ICHEV, A.T., SAVIN, A.S., MOTION OF LIQUID PARTICLES BENEATH AN ICE COVER.

© 2024 ИЛЬЧЕВ А.Т., САВИН А.С.

The work of A.T. Il'ichev was supported by the Russian Science Foundation under grant no 19-71-30012, <https://rscf.ru/project/19-71-30012/>, and performed at Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.

Поступила 1 февраля 2025 г., опубликована 17 сентября 2025 г.

Keywords: ice cover, classical solitary wave, generalized solitary wave, envelope solitary wave, dark soliton, bifurcation, center manifold, trajectories of liquid particles.

1 Введение

Для описания слоя воды конечной глубины под ледяным покровом используются двумерные уравнения Эйлера; сам ледяной покров моделируется геометрически нелинейной пластиной Кирхгофа-Лява. Такая модель ледяного покрова впервые была использована в [1, 2] для некоторой периодической задачи, описывающей распространение нелинейных изгибно-гравитационных волн.

Редукция основных уравнений на центральное многообразие (см., [3] и [4]) с последующим приближением потока на центральном многообразии дифференциальными уравнениями в квазинормальной форме (см. [5]) были впервые применены для уравнений, описывающих распространение волн на поверхности воды под ледяным покровом, где ледяной покров моделировался геометрически нелинейной пластиной Кирхгофа-Лява в напряженном состоянии, в [6]. Метод, разработанный в [6], был обобщен на случай нагрузки, распространяющейся по ледяному покрову в [7]. С тех пор появилось значительное количество работ, посвященных изучению изгибно-гравитационных волн на поверхности жидкости под ледяным покровом, моделировавшемся либо геометрически нелинейной пластиной Кирхгофа-Лява, либо оболочкой Коссера, для которой существует явное выражение для упругой энергии [8] (более или менее подробную библиографию см. в [9]).

Поле скоростей в жидкости определяет форму траектории движения жидких частиц. Движение частиц жидкости в поле поверхностной волны в линейной постановке описано, например, в монографиях [10, 11]. Частицы движутся по эллипсам в жидкости конечной глубины и по окружностям в жидкости бесконечной глубины. Если формально учитывать члены второго порядка по крутизне волны в разложении скорости частицы (что в линейной теории некорректно), то траектории частиц оказываются незамкнутыми и, следовательно, существует медленный дрейф частиц в направлении распространения волны. В работе [12] впервые показано, что для гравитационных волн в рамках модели идеальной жидкости, при распространении нелинейной волны по поверхности жидкости, жидкие частицы в ней медленно (по сравнению с фазовой и групповой скоростью) перемещаются в направлении распространения волны. С тех пор явление дрейфа частиц активно изучалось в большом количестве работ для разных моделей жидкости. Хороший обзор работ на эту тему содержится в [13].

Приведены результаты построения траекторий отдельных частиц жидкости для бегущих изгибно-гравитационных волн солитонной природы,

существование которых связано с определенными линейными резонансами. Как уже упоминалось, рассматривается двумерный слой жидкости с плавающим на его поверхности ледяным покровом; слой идеальной жидкости конечной глубины описывается уравнениями Эйлера, а ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгофа-Лява. В настоящей работе мы суммируем результаты работ [9], [14]-[16] с точки зрения единого подхода к рассматриваемой проблеме.

Волновые структуры на поверхности жидкости и соответствующее поле скоростей в толще жидкости определяются различными компонентами векторной функции, которая является решением уравнений в операторной формулировке. Чтобы определить рассматриваемые поверхностные волновые структуры, которые индуцируют соответствующее поле скорости в толще жидкости, необходимо решить, по крайней мере асимптотически, основные уравнения модели. Эти решения известны, и соответствующая процедура их получения, а также получение выражений для соответствующего поля скоростей кратко описаны в статье. Приводятся известные факты, связанные с формулировкой рассматриваемой модели, операторной формой локальных уравнений, бифуркациями из состояния покоя системы, теорией центрального многообразия, приведенными уравнениями и их аппроксимацией интегрируемыми уравнениями в квазинормальной форме.

В параграфе 2 кратко излагаются свойства упругой пластины Кирхгофа-Лява, моделирующей ледяной покров, а также приводятся уравнения для бегущих волн в равномерно движущейся системе отсчета, неподвижно связанной с волной. В параграфе 3 приводится локальная запись уравнений бегущей волны в операторной форме, а также дано краткое обсуждение бифуркаций из состояния покоя (и связанных с ними линейных резонансов), приводящих к образованию рассматриваемых нелинейных поверхностных волновых структур. В параграфе 4 изложены результаты теоремы о центральном многообразии, а также приведены виды уравнений в квазинормальной форме, приближающих потоки на центральном многообразии для трех рассматриваемых резонансов. В параграфе 5 кратко излагается процедура получения решений приведенных уравнений, описывающих классические, обобщенные уединенные волны, а также уединенные волновые пакеты и темные солитоны. Получены первые приближения выражений для формы этих волн по малому параметру μ , характеризующему их амплитуду. Параграф 6 посвящен определению форм траекторий жидких частиц в толще жидкости в поле рассматриваемых поверхностных солитоноподобных структур. В параграфе 7 приводятся выводы.

2 Формулировка задачи

2.1. Модель ледяного покрова. В [17] излагаются результаты экспериментов о том, что однородный ледяной покров демонстрирует стандартные упругие свойства пластины, которая плавает на поверхности жидкости. В связи с этим, рассмотрим ледяной покров в рамках модели упругой пластины с известными свойствами пластины Кирхгофа - Лява. Будем считать, что пластина находится в предварительно напряженном состоянии, которое характеризуется горизонтальным напряжением, приложенным к недеформируемой срединной поверхности (величина которого больше нуля если пластина находится в состоянии растяжения и меньше нуля, когда пластина сжата). Уравнение баланса сил, действующих со стороны пластины на жидкость, имеет вид (см., например, [18]; слой льда рассматривается как нейтральная поверхность пластины, поскольку внутренние уравнения баланса сил для упругого слоя подвергаются процедуре усреднения по толщине слоя)

$$p = p_0 + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M + \rho_s h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где p - давление в жидкости, p_0 - атмосферное давление, σ_0 - начальное напряжение в пластине, h - толщина пластины, ρ_s - плотность упругого материала пластины (льда), $z = \eta = \eta(x, t)$ - уравнение поверхности, являющейся границей жидкости и льда. Изгибающий момент M выражается через радиус кривизны R_m нейтральной поверхности пластины по формуле

$$M = \frac{J}{R_m}, \quad J = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)},$$

где E - модуль Юнга, а ν - коэффициент Пуассона пластины.

2.2. Система уравнений для бегущих волн на поверхности жидкости под ледяным покровом. Рассматриваются плоскопараллельные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости глубины H и плотности ρ с горизонтальным дном.

Пусть бегущая волна, распространяется влево вдоль оси x со скоростью $V > 0$ (заметим, что в неподвижной лабораторной системе отсчета все величины, характеризующие волну, зависят от автомодельной комбинации $x - Vt$).

Произведем, далее, масштабные преобразования:

$$(x, z) \rightarrow \left(\frac{x}{H}, \frac{z}{H} \right), \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

Из (1) следует, что в новых безразмерных переменных, для которых мы будем использовать прежние обозначения, система уравнений Эйлера

для бегущих волн имеет вид (см., например, [18])

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq z \leq \eta; \\ \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \lambda\eta - b\kappa_1 + \gamma\kappa_2 + c\partial_{xx}\eta &= \text{const}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad z = \eta; \\ \partial_x\eta u - v &= 0, \quad v = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad z = 0. \\ \mathbf{v} &\rightarrow (1, 0), \quad \eta(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Константы λ , b , γ и c задаются соотношениями

$$\lambda = gH/V^2, \quad b = \frac{h\sigma_0}{\rho HV^2}, \quad \gamma = \frac{J}{\rho V^2 H^3}, \quad c = \frac{\rho_s h}{\rho H}. \quad (3)$$

(параметр λ , очевидно, равен квадрату обратного числа Фруда, параметр b является аналогом числа Бонда для гравитационно-капиллярных волн, параметр γ – безразмерная жесткость при изгибе, а параметр c – коэффициент отношения инерции упругой пластины и инерция слоя жидкости).

Функции κ_j , $j = 1, 2$, выражаются формулами [1]

$$\kappa_1 = \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa\partial_{xx}\eta}, \quad \kappa_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa\partial_{xx}\eta}, \quad \kappa = \frac{h}{H}.$$

Далее, для простоты, будем использовать приближение $\kappa = c = 0$, т.е. предположим, что инерция ледяной пластины пренебрежимо мала по сравнению с инерцией слоя жидкости.

3 Операторная форма уравнений (2), бифуркации из состояния покоя и линейные резонансы

Определите новые “полулагранжевы” координаты $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ по формуле $y = \psi(x, z) = z + \Psi$, где $\psi(x, z)$ – функция тока, деленная на средний расход $Q = VH$. Кроме того, отобразим поле скоростей $\mathbf{v} = (u, v)$ на векторное поля $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ [4]:

$$w_1 = \frac{1}{2}\{u^2 + v^2 - 1\}, \quad w_2 = \frac{v}{u}, \quad (4)$$

где $u - 1$, v предполагаются малыми, а $\partial_z\Psi = u - 1$, $\partial_x\Psi = -v$. Легко видеть, что отклонение поверхности η задается формулой

$$\eta = 1 - [w_1] + \dots, \quad [f] = \int_0^1 f dy.$$

Можно показать (см., например, монографию [18]), что уравнения (2) для волн малой амплитуды могут быть записаны в операторной форме

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u}), \quad \partial_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(0, 0) = 0, \quad (5)$$

где верхняя точка обозначает дифференцирование по неограниченной координате x ; μ – малый безразмерный параметр. Неограниченный замкнутый оператор $\mathbf{A}$ действует на векторную функцию $\mathbf{u} \in D(\mathbf{A})$, $\mathbf{u} =$

$$\{\delta, \delta_1, \delta_2, w_1(y), w_2(y)\}^\top, \\ D(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{w_2(0) = 0, w_2(1) = \delta\}.$$

Здесь

$$\mathbb{H}^1(0, 1) = H^1(0, 1) \times H^1(0, 1),$$

$H^1(0, 1)$ – пространство функций квадратично интегрируемых с их первыми производными на интервале $(0, 1)$.

Малый параметр μ определяется из равенства

$$\mu = \lambda - \lambda_0. \quad (6)$$

Рассмотрим далее семейство операторов $\mathbf{A}(\mu)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(0)$. Оператор $\mathbf{A}(\mu)$ определяется по действию на вектор функцию $\mathbf{u}$ равенством [18]):

$$\mathbf{A}(\mu)\mathbf{u} = \{\delta_1, \delta_2, \gamma^{-1}(b\delta_1 - w_1(1) + \lambda[w_1]), -\partial_y w_2(y), \partial_y w_1(y)\}.$$

Параметром бифуркации является скорость V . Из (3), (6), имеем $V_0^2 = gH/\lambda_0$,

$$V^{-2} = V_0^{-2} + \frac{\mu}{gH} \quad \text{или} \quad V = V_0 \left(1 - \frac{V_0^2 \mu}{2gH}\right) + O(\mu^2),$$

и в низшей аппроксимации по μ

$$b = b_0 + \omega_1 \mu, \quad \gamma = \gamma_0 + \omega_2 \mu, \quad \mu \ll 1, \quad \omega_1 = \frac{h\sigma_0}{\rho g H^2}, \quad \omega_2 = \frac{J}{\rho g H^4}.$$

Параметры λ_0 , b_0 и γ_0 определены формулами (3) с $V = V_0$.

Вековое уравнение для уравнения (2) имеет вид

$$q \coth q = \lambda + bq^2 + \gamma q^4, \quad (7)$$

где q безразмерное волновое число k/H .

Для нахождения значений $(\lambda_0, b_0, \gamma_0)$ в пространстве параметров $(\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, при которых происходят бифуркации из состояния покоя, необходимо определить те значения, при которых (7) имеет действительные корни ($\sigma = iq$ являются собственными значениями оператора $\mathbf{A}$ – центральным спектром), кратности два, иными словами происходят линейные резонансы: простой резонанс, резонанс длинной и короткой волн и 1:1 резонанс (подробности см. в [18])).

• Простой резонанс. Единственным собственным значением оператора $\mathbf{A}$, лежащем на мнимой оси является собственное значение $\sigma = 0$, кратности два. При изменении μ от положительных малых значений до отрицательных эти собственные значения приходят с действительной оси и расходятся по мнимой (см. Рис. 1а). Такое происходит в окрестности $\lambda_0 = 1$, $b_0 > 1/3$ и при произвольных значениях $\gamma_0 > 0$.

• Резонанс длинной и короткой волн. Этот резонанс отвечает равенству фазовых скоростей линейных гармонических волн с нулевым и ненулевым волновыми числами. Центральный спектр оператора $\mathbf{A}$ при этом состоит из двукратного нулевого собственного значения $\sigma = 0$ и пары

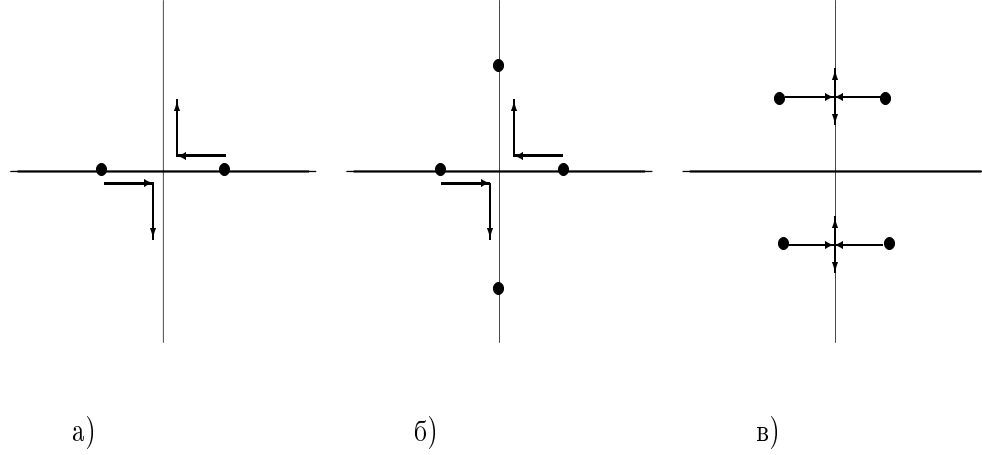


Рис. 1. Движение собственных значений оператора $\mathbf{A}(\mu)$, приходящих на мнимую ось при $\mu = 0$ для бифуркаций простого резонанса (а), резонанса длинной и короткой волн (б) и 1:1 резонанса (в).

мнимых собственных значений $\pm iq$. При изменении μ от отрицательных малых значений до положительных, нулевые собственные значения также приходят с действительной оси на мнимую ось и расходятся по ней (см. Рис. 1б). Такое происходит в окрестности $\lambda_0 = 1$, $b_0 < 1/3$ и при произвольных значениях $\gamma_0 > 0$.

• 1:1 резонанс. 1:1 резонанс является резонансом, характеризующимся совпадением фазовой и групповой скоростей линейной гармонической волны с ненулевым волновым числом. В этом случае центральный спектр оператора $\mathbf{A}$ состоит из двух ненулевых мнимых собственных значений, симметричных относительно начала координат, каждое кратности два. При изменении μ от положительных малых значений до отрицательных эти собственные значения попарно приходят из комплексной плоскости на мнимую ось, а затем по ней расходятся (см. Рис. 1в). Такое происходит в окрестности λ_0 и b_0 удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \gamma_0 q^4 + \frac{q \coth q}{2} + \frac{q^2 \sinh^{-2} q}{2}, \\ b_0 &= -2\gamma_0 q^2 + \frac{\coth q}{2q} - \frac{\sinh^{-2} q}{2}.\end{aligned}\tag{8}$$

4 Поток на центральном многообразии и интегрируемые уравнения в квазинормальной форме

Можно показать (см., например, [3, 4, 19]), что бесконечномерная система дифференциальных уравнений (5) для малых значений отклонений μ эквивалентна конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Формально такое понижение порядка системы осуществляется при помощи разбиения компонент неизвестной вектор-функции на сумму двух вектор-функций. Одно из этих слагаемых представляет собой линейную комбинацию собственных и присоединенных векторов, соответствующих центральному спектру, а другое представляет собой небольшую величину следующего порядка по амплитуде и является определяемой функцией первого слагаемого. Уравнения для коэффициентов упомянутой линейной комбинации представляют собой конечномерную систему дифференциальных уравнений (приведенную систему).

Конечномерная система, эквивалентная полной системе (5), имеет вид

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_0(\mu, \mathbf{u}_0), \quad \partial_{\mathbf{u}_0} \mathbf{f}_0(0, 0) = 0, \quad (9)$$

где $\mathbf{A}_0$ – матрица, размерность которой равна числу собственных значений, принадлежащих центральному спектру оператора $\mathbf{A}$.

Теорема о центральном многообразии [4] утверждает, что до тех пор, пока сохраняется неравенство $\|\mathbf{u}_0\| < \varepsilon$, решение системы уравнений (5) $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \oplus \mathbf{u}_1$ и полностью определяется своей конечномерной частью $\mathbf{u}_0$, которая принадлежит ограниченному множеству (центральному многообразию) $\mathbb{M}_\mu = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 = \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)\} \subset \mathbb{X}$ (в рассматриваемом случае гильбертово пространство $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1)$). Центральное многообразие, таким образом, является конечномерным локальным подмногообразием бесконечномерного фазового пространства системы уравнений (5), где находятся ограниченные решения (5). Правая часть приведенной системы (9) задает поток на центральном многообразии.

•Простой резонанс. В этом случае [5]

$$\mathbf{u}_0 = a_0 \phi_1 + a_1 \phi_2, \quad \mathbf{A} \phi_0 = 0, \quad \mathbf{A} \phi_1 = \phi_0,$$

где (см. [18])

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Приведенные уравнения (9) имеют вид двумерной динамической системы [5]

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{a} + \mathbf{g}_0(\mu, \mathbf{a}), \quad \mathbf{g}_0 = O(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2), \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1)^\top$$

или

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + O(\mu^2|\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^3), \\ \dot{a}_1 &= \delta(\mu a_0 - \frac{3}{2}a_0^2 + \frac{a_1^2}{4}) + O(\mu^2|\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^3). \end{aligned} \quad (11)$$

где $\delta = (b_0 - 1/3)^{-1}$.

Теорема 1. [5]. *Приведенные уравнения (11) приближаются до любого алгебраического порядка по малому параметру системой уравнений в квази-нормальной форме*

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \Phi(\mu, \alpha_0), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\Phi(\mu, \alpha_0) = \sum_{j=1}^2 c_j(\mu) \alpha_0^j + O(|\alpha_0|^3),$$

$$c_1(\mu) = c_1\mu + o(\mu), \quad c_2(\mu) = c_2 + o(\mu),$$

а коэффициенты c_j вычисляются по формулам, приведенным, например, в [18]. Система уравнений (12) имеет первый интеграл

$$\alpha_1^2 - \widehat{\Phi}(\mu, \alpha_0) = H_0, \quad 2\Phi = \partial_{\alpha_0} \widehat{\Phi}$$

и, следовательно, является интегрируемой.

- Резонанс длинной и короткой волн. В этом случае [5]

$$\mathbf{u}_0 = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_+\phi_+ + a_-\phi_-, \quad a_+ = a_-^*, \quad \phi_+ = \phi_-^*$$

где знак * обозначает комплексное сопряжение,

$$\mathbf{A}\phi_0 = 0, \quad \mathbf{A}\phi_1 = \phi_0, \quad \mathbf{A}\phi_+ = iq\phi_+.$$

где (см. [18])

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \phi_+ = \begin{pmatrix} i \operatorname{sh} q \\ -q \operatorname{sh} q \\ -iq^2 \operatorname{sh} q \\ -\operatorname{ch} qy \\ i \operatorname{sh} qy \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Приведенная система (9) в данном случае эквивалентна системе уравнений

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{a} + \mathbf{g}_0(\mu, \mathbf{a}), \quad \mathbf{g}_0 = O(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2), \quad \mathbf{a} = (a, a_1, a_+, a_-)^\top, \quad (14)$$

где (см., например, [5])

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. [5] Приведенные уравнения (14) приближаются до любого алгебраического порядка по малому параметру μ системой уравнений в квази-нормальной форме

$$\begin{aligned}\partial_x \alpha_0 &= \alpha_1, \\ \partial_x \alpha_1 &= \Phi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \\ \partial_x z &= izq + iz\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \\ \partial_x z^* &= -iz^*q - iz^*\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2),\end{aligned}\quad (15)$$

где Φ и Ψ – вещественные полиномы данного порядка:

$$\Phi = \sum_i^k c_i(\mu) \alpha_0^i + d(\mu) |z|^2 + \dots, \quad \Psi = \gamma_0(\mu) + \gamma_1(\mu) \alpha_0 + \gamma_1 |z|^2 \dots,$$

при этом, постоянные c_i , d , $\gamma_{0,1,2}$ вычисляются. Система уравнений (15) имеет два первых интеграла $|z|^2 = K_0$ и $\alpha_1^2 - \widehat{\Phi} = H_0$, $\partial_{\alpha_0} \widehat{\Phi} = 2\Phi$ и, следовательно, является интегрируемой.

- 1:1 резонанс. В этом случае [20]

$$\mathbf{u}_0 = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^*,$$

$$\mathbf{A}\phi_0 = iq\phi_0, \quad \mathbf{A}\phi_1 = iq\phi_1 + \phi_0,$$

где (см. [18])

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -\operatorname{th} q \\ -iq \operatorname{th} q \\ -\operatorname{ch} qy/(q \operatorname{ch} q) \\ i \operatorname{sh} qy/(q \operatorname{ch} q), \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ i + iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -q - 2 \operatorname{th} q \\ iy \operatorname{sh} qy/(q \operatorname{ch} q) \\ y \operatorname{ch} qy/(q \operatorname{ch} q), \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Приведенная система (9) в данном случае эквивалентна системе

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_0 \mathbf{a} + \mathbf{g}_0(\mu, \mathbf{a}), \quad \mathbf{g} = O(\mu|\mathbf{a}| + |\mathbf{a}|^2), \quad \mathbf{a} = (A, B, A^*, B^*)^\top. \quad (17)$$

Имеем также [20]

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} iq & 1 & 0 & 0 \\ 0 & iq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. [5] Приведенные уравнения (17) приближаются системой в квази-нормальной форме

$$\begin{aligned}\partial_x A &= iqA + B + iAR\left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B)\right), \\ \partial_x B &= iqB + AQ\left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B)\right) + iBR\left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B)\right)\end{aligned}\quad (18)$$

вплоть до произвольного алгебраического порядка по μ . Здесь R и Q – полиномы с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} R(\mu, u, K_0) &= p_1\mu + p_2u + p_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2), \\ Q(\mu, u, K_0) &= q_1\mu - q_2u + q_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2). \end{aligned}$$

Система уравнений (18) имеет два первых интеграла

$$K_0 = \frac{i}{2}(AB^* - A^*B), \quad H_0 = |B|^2 - S(\mu, |A|^2, K_0), \quad S = \int_0^{|A|^2} Q(\mu, u, K_0) du,$$

и, следовательно, интегрируема.

5 Солитоноподобные волны

5.1. Простой резонанс. Классические уединенные волны. Первые два коэффициента полинома Φ имеют вид [18]

$$c_1(\mu) = \mu\delta + O(\mu^2), \quad c_2(\mu) = -\frac{3}{2}\delta + O(\mu). \quad (19)$$

Заметим, что в случае простого резонанса $\delta > 0$.

Производя замену

$$\alpha_0 = \mu\beta_0(\varsigma), \quad \alpha_1 = \mu\nu_0\beta_1(\varsigma), \quad \varsigma = \nu_0x, \quad \nu_0 = \mu^{1/2}\delta^{1/2}, \quad (20)$$

получим из (12) в нулевом порядке по μ

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma\beta_0 &= \beta_1, \\ \partial_\varsigma\beta_1 &= \text{sign } \mu(\beta_0 - \frac{3}{2}\beta_0^2). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнения (21) обладают первым интегралом

$$\text{sign } \mu \beta_1^2 - (\beta_0^2 - \beta_0^3) = H_0.$$

Для $\mu > 0$, $H_0 = 0$ имеет место солитоноподобное решение (21):

$$\beta_0 = \text{ch}^{-2}\varsigma/2.$$

Это решение описывает классическую уединенную волну.

Производя замену обратную (20), получим в низшем порядке по μ

$$\alpha_0 = \mu\beta_0 = \mu\text{ch}^{-2}\nu_0x/2.$$

Форма свободной поверхности задается формулой [18]

$$\eta = 1 - \mu\text{ch}^{-2}\nu_0x/2 + O(\mu^2), \quad (22)$$

Легко видеть, что волна, описываемая (22) есть волна понижения уровня.

На Рис. 2 изображена форма изгибной поверхностной волны – классической уединенной волны – для конкретных значений физических параметров бассейна и ледяного покрова.

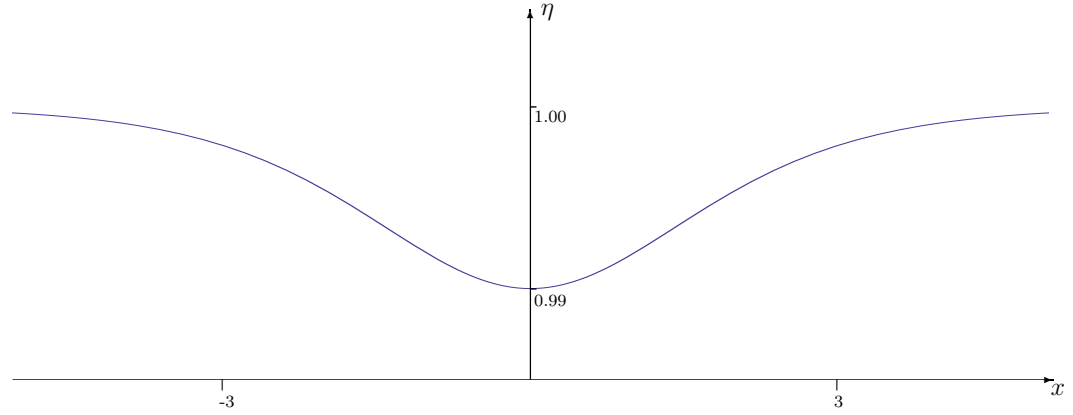


Рис. 2. Форма поверхностной изгибно-гравитационной классической уединенной волны; $H = 3$ м, $h = 0.31$ м, предварительное напряжение $\sigma_0 = 10^5$ н м⁻², $\mu = 0.01$

5.2. Резонанс длинной и короткой волн. Обобщенные уединенные волны. Заметим, что в случае резонанса длинной и короткой волн $\delta < 0$.

Для обобщенной уединенной волны $\mu < 0$, $z = 0$, $K_0 = 0$, $H_0 = 0$ при помощи масштабного преобразования

$$\alpha_0 = \mu\beta_0(\zeta), \quad \alpha_1 = \mu\beta_1(\zeta), \quad \zeta = \nu_0 x, \quad \nu_0 = |\mu\hat{\sigma}|^{1/2} \quad (23)$$

из (15) и (19) для обобщенной уединенной волны имеем

$$\partial_\zeta^2 \beta_0 + \text{sign } \mu (\beta_0 - \frac{3}{2}\beta_0^2) = O(\mu), \quad (24)$$

Из (23) и (24) в низшем приближении по μ получим выражение для формы обобщенной уединенной волны

$$\alpha_0^s = a_0^s = \mu \text{sech}^2(\nu_0 x/2), \quad a_1^s = \partial_x a_0^s. \quad (25)$$

При переходе от системы (15) в квази-нормальной форме к полной приведенной системе (14) в асимптотике обобщенной уединенной волны возникает экспоненциально малый член по μ , вида [18]

$$\eta \rightarrow \pm C \exp\left(-\frac{\pi}{\sqrt{|\delta|}\sqrt{|\mu|}}\right) \sin qx, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где C – некоторая постоянная. Возникновение подобной периодической асимптотики в обобщенной уединенной волне при переходе от системы в квази-нормальной форме (15) (которая учитывает только алгебраически малые члены по μ) к приведенной системе является общим свойством рассматриваемого резонанса длинной и короткой волн [21].

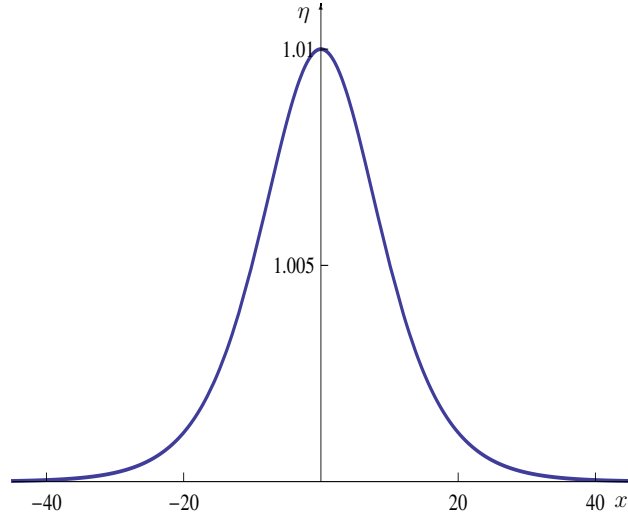


Рис. 3. Характерная форма поверхности вода-лед для первого приближения обобщенной уединенной волны; $h = 0.3$ м, $H = 20$ м, $\sigma_0 = 10^5$ н м $^{-2}$, $\rho = 10^3$ кг м $^{-3}$, $\mu = -0.01$, $b_0 = 0.0075$.

Форма поверхности для обобщенных уединенных волн имеет вид

$$\eta = 1 + |\mu| \operatorname{ch}^{-2}(\nu_0 x/2) + O(\mu^2). \quad (26)$$

В низшем (и в любом алгебраическом) порядке приближения по μ описывается уединенной волной возвышения (см. Рис. 3).

5.3. 1:1 резонанс. Уединенные волновые пакеты и темные солитоны.

Сделаем замену переменных в (18)

$$A = \rho_0 \exp i(qx + \theta_0), B = \rho_1 \exp i(qx + \theta_1) \quad (27)$$

Тогда система уравнений (18) записывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_0 &= \rho_1 \cos \Theta \\ \dot{\rho}_1 &= \rho_0 \cos \Theta Q(\rho_0^2, K_0) \\ \dot{\Theta} &= - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} Q(\rho_0^2, K_0) + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \sin \Theta, \end{aligned} \quad (28)$$

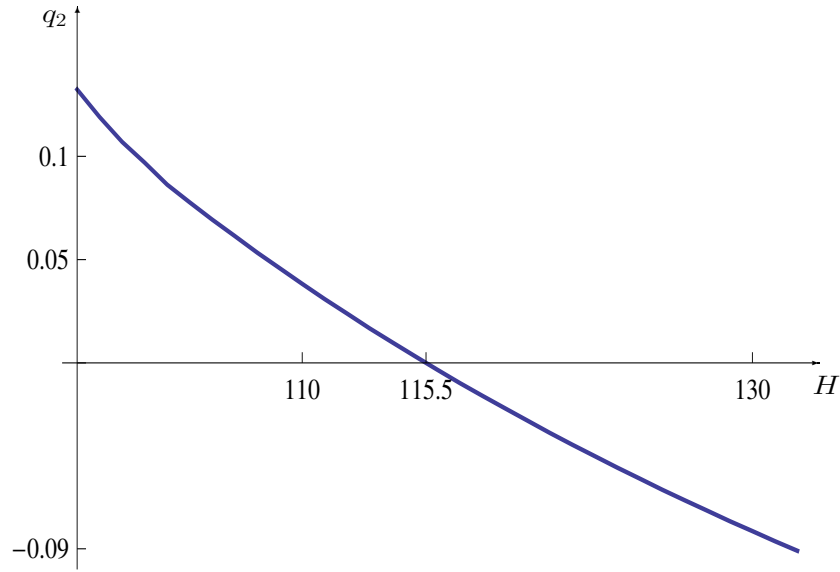


Рис. 4. Зависимость коэффициента q_2 от глубины жидкостид H (в метрах) для толщины льда $h = 1$ м и начального напряжения в ледяном покрове $\sigma_0 = 10^5$ н м⁻²; $E = 5 \times 10^9$ н м⁻², $\nu = 0.3$, $\rho = 1000$ кг м⁻³, $g = 10$ м с⁻²

где $\Theta = \theta_1 - \theta_0$. Когда $K_0 = \rho_0 \rho_1 \sin \Theta = 0$, без ограничения общности, имеем $\Theta = 0$. Тогда первое приближение уравнений (28) приобретает вид

$$\ddot{\rho}_0 = \mu q_1 \rho_0 - q_2 \rho_0^3. \quad (29)$$

Выражение для постоянных q_1 и q_2 приведено, например, в [22]. Решение уравнения (29) имеет вид

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{2q_1\mu}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}.$$

Выражение для переменной A получается из (27).

График типичной зависимости q_2 от глубины H , показан на Рис. 4. Из Рис. 4 видно, что коэффициент q_2 меняет знак на глубине значения, превышающие некоторое критическое значение. При тех значениях глубины, для которых коэффициент q_2 отрицателен, нелинейная несущая периодическая волна малой амплитуды устойчива и, как следствие, система имеет так называемые “темные солитоны” вместо уединенных волновых пакетов. Эти волны получили свое название в нелинейной оптике из-за того свойства, что их интенсивность (при оптическом освещении) минимальна в центре волны. Темный солитон является нелинейным продуктом боры и периодической волны.

Можно показать, что приведенная система (17) в случае $\mu > 0$, $q_2 > 0$ имеет решение типа уединенного волнового пакета, главная часть которого определяется решением уравнения (29). Это решение дает отклонение поверхности раздела вода-лед по формуле

$$\eta = 1 \pm \frac{2 \operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1} x \cos qx + O(|\mu|^{3/2}), \quad (30)$$

Знак плюс после единицы отвечает волне возвышения уровня, а минус – волне понижения уровня. На Рис. 5 показана типичная форма изгибно-гравитационной волны – уединенного волнового пакета – для некоторых физических параметров водяного бассейна и ледяного покрова.

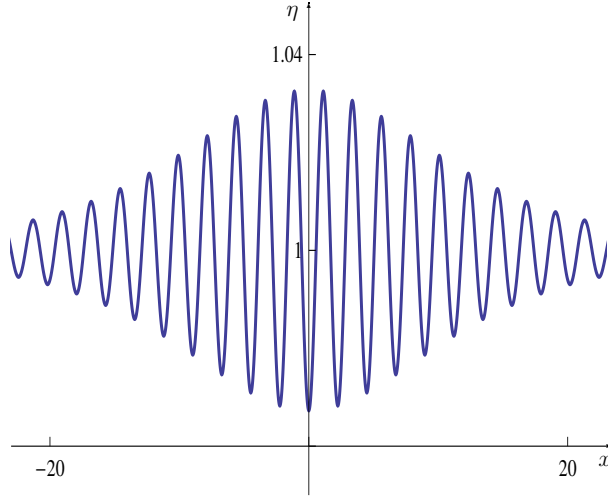


Рис. 5. Форма поверхностной изгибно-гравитационной волны – уединенного волнового пакета ($q_2 > 0$) понижения уровня; $\rho = 1000 \text{ кг м}^{-3}$, $g = 10 \text{ м сек}^{-2}$, $E = 5 \cdot 10^9 \text{ н м}^{-2}$, $\nu = 0.3$, $H = 55 \text{ м}$, $h = 1 \text{ м}$, $\sigma_0 = 10^5 \text{ н м}^{-2}$ и $\mu = 0.005$

Темный солитон в первом приближении по μ определяется решением уравнения (29) при $q_2 < 0$, $\mu < 0$

$$\rho_0 = \pm \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \operatorname{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x. \quad (31)$$

Из (27) и (31) следует, что форма темного солитона в младшем приближении определяется формулой

$$A = A_0 = \pm \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \operatorname{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x \exp(iqx + \theta_0). \quad (32)$$

Положим в (32) $\theta_0 = \pi/2$. Заметим, что из уравнений (28) следует, что $B = O(\mu)$, т. е. является величиной следующего порядка малости по μ по сравнению с A .

Из выражения для отклонения поверхности и (32) следует, что поверхностная волна – темный солитон – в первом приближении по μ описывается формулой

$$\eta = 1 \pm \frac{2\operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{-\mu q_1}{2}} x \sin qx \quad (33)$$

На Рис. 6 изображена типичная форма поверхностной волны (33) – темного солитона – для некоторых значений физических параметров, характеризующих водный бассейн и ледяной покров.

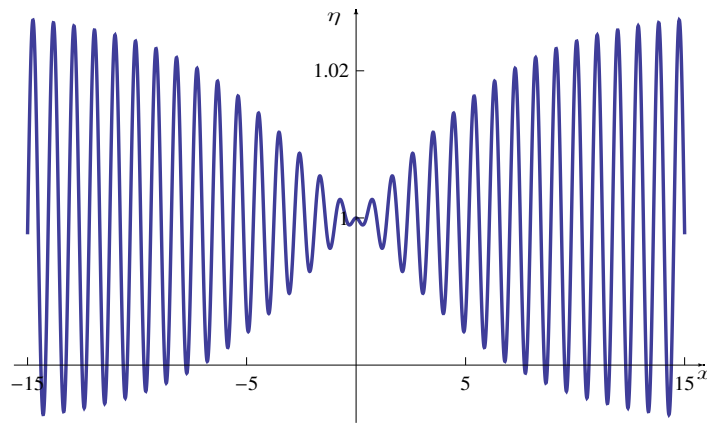


Рис. 6. Форма поверхностной изгибно-гравитационной волны, соответствующей темному солитону возвышения ($q_2 < 0$) ; $H = 129$ м, $\mu = -0.005$, другие параметры имеют значения, как на Рис. 5

6 Поле скоростей в слое жидкости и траектории жидких частиц

Отметим очевидное свойство движения отдельных частиц жидкости в столбе жидкости, основанном на свойствах симметрии и непрерывности.

Движение должно происходить таким образом, чтобы для симметричной волны (относительно центра этой волны) траектория частицы, генерируемая этой волной, в свою очередь, имела вертикальную ось симметрии.

Отсюда следует, что смещение частицы при прохождении поверхностной волны должно быть горизонтальным.

Из (4) легко видеть, что выражение составляющих фактической скорости $(u, v)^\top$ через компоненты вспомогательной скорости $(w_1, w_2)^\top$ дается формулой

$$u = \sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2}}, \quad v = w_2 \sqrt{\frac{1+2w_1}{1+w_2}}. \quad (34)$$

Из (34), в первом порядке по μ имеем

$$u = 1 + w_1 - \frac{w_2}{2}, \quad v = w_2. \quad (35)$$

Напомним, что все рассуждения проводятся в системе отсчета, связанной с волной (которая движется налево). Чтобы перейти к лабораторной системе отсчета, где жидкость покоится на бесконечности, необходимо произвести преобразование $x \rightarrow x + t$ и $u \rightarrow u - 1$. Для определения траекторий частиц в лабораторной системе отсчета, имеем

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dz}{dt} = v. \quad (36)$$

6.1. Траектории частиц жидкости в поле классической уединенной волны. Для классической уединенной волны (22) в лабораторной системе отсчета, получим в соответствии с (10) в первом приближении по μ

$$\begin{aligned} u &= \mu \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{\delta\mu}}{2}(x+t) \right) - \frac{\mu^{3/2}\delta^{1/2}}{2} z \operatorname{ch}^{-3} \left(\frac{\sqrt{\delta\mu}}{2}(x+t) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\delta\mu}}{2}(x+t) \right), \\ v &= w_2 = \mu^{3/2}\delta^{1/2} z \operatorname{ch}^{-3} \left(\frac{\sqrt{\delta\mu}}{2}(x+t) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{\delta\mu}}{2}(x+t) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Скорости u и v в поле поверхностной волны (22) с точностью до соответствующих малых по амплитуде волны определяются выражениями (37).

Система уравнений (36) решалась численно для параметров, приведенных на Рис. 2 и различных начальных положений частицы по горизонтали $x(0)$ и по вертикали (глубины, на которой расположена частица) $y(0)$. На Рис. 7 приведены траектории частиц после прохождения поверхностной уединенной волны, если $x(0) = -6$, а $y(0)$ принимает значения 0.25 и 0.75.

6.2. Траектории частиц жидкости в поле обобщенной уединенной волны. Для обобщенной уединенной волны (26) в соответствии с (13), (25) в низшем порядке μ в лабораторной системе отсчета имеем

$$w_1 = \mu \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right), \quad w_2 = z \mu \nu_0 \operatorname{ch}^{-3} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right). \quad (38)$$

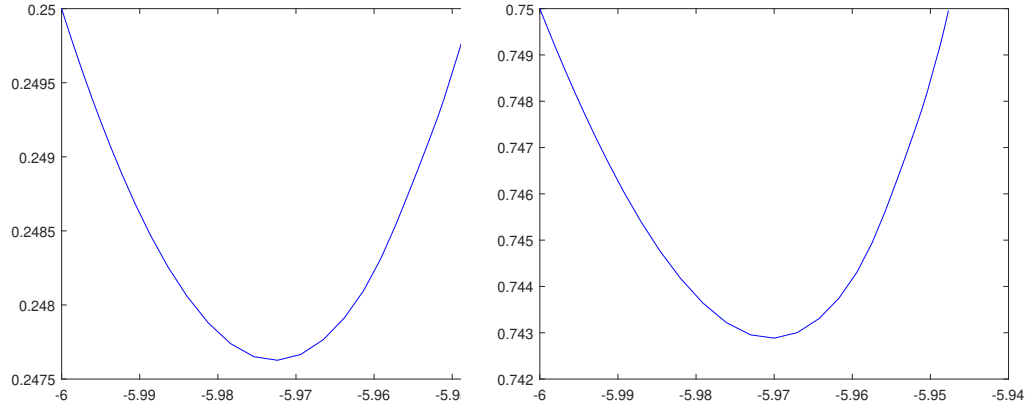


Рис. 7. Траектория, которую описывает частица в результате прохождения поверхностной уединенной волны, параметры которой обозначены на Рис. 2. Волна движется налево, начальное горизонтальное положение частицы расположено на расстоянии примерно двух длин волн от горба волны ($x(0) = -6$); по вертикали 0.25 (левая иллюстрация) и 0.75 (правая иллюстрация).

Из (35) и (38) в низшем порядке по μ мы получаем

$$\begin{aligned} u &= \mu \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right) - \frac{\mu\nu_0}{2} z \operatorname{ch}^{-3} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right), \\ v &= w_2 = \mu\nu_0 z \operatorname{ch}^{-3} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\nu_0}{2}(x+t) \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Скорости u и v в поле поверхностной волны (26) в низшем приближении по μ определяются выражением (39).

Система уравнений (36) решалась численно для параметров, приведенных на Рис. 3 и различных начальных положений частицы по горизонтали $x(0)$ и по вертикали (глубины, на которой расположена частица) $z(0) = y(0) + O(\mu)$. На Рис. 8 приведены траектории частиц после прохождения поверхностной уединенной волны, если $x(0) = -40$, а $z(0)$ принимает значения 0.25 и 0.75.

6.3. Траектории частиц жидкости в поле уединенного волнового пакета. Для уединенного волнового пакета (30), который является нелинейным продуктом 1:1 резонанса ($q_2 > 0$), в соответствии с (16) в

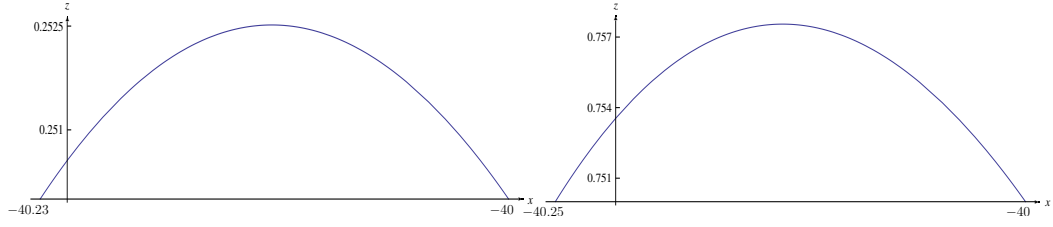


Рис. 8. Траектория, которую описывает частица в результате прохождения поверхностной уединенной волны, параметры которой обозначены на Рис. 3. Волна движется налево, начальное горизонтальное положение частицы расположено на расстоянии примерно длины волны от горба волны ($x(0) = -40$); по вертикали $y(0) \approx 0.75$ (левая иллюстрация) и $y(0) \approx 0.25$ (правая иллюстрация).

лабораторной системе отсчета, имеем (в низшем приближении по μ)

$$\begin{aligned} w_1 &= -\cosh qz/(q \operatorname{ch} q)(\pm 2\sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}(x+t) \cos q(x+t)), \\ w_2 &= -z \operatorname{sh} qz/(q \operatorname{ch} q)(\pm 2\sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}(x+t) \sin q(x+t)). \end{aligned} \quad (40)$$

Из (35) и (40) в первом порядке по μ , получим

$$\begin{aligned} u &= -\operatorname{ch} qz/(q \operatorname{ch} q)(\pm 2\sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}(x+t) \cos q(x+t)) + \\ &\quad + \operatorname{sh} qz/(q \cosh q)(\pm \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}(x+t) \sin q(x+t)), \\ v &= -\operatorname{sh} qz/(q \operatorname{sh} q)(\pm 2\sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\mu q_1}(x+t) \sin q(x+t)). \end{aligned} \quad (41)$$

Знак плюс в скобках равенств (41) отвечает волне понижения уровня, а знак минус – волне повышения уровня.

Система уравнений (36) была решена численно для параметров, показанных на Рис. 5, и различных начальных положений частицы по горизонтали $x(0)$ и вертикали (глубина, на которой находится частица) $y(0)$. На рис. 9 показан типичный пример формы эволюции траекторий во времени t частицы, расположенной в начальный момент времени слева от центра волны возвышения примерно на расстоянии, равном половине длины волны (из-за трансляционной инвариантности системы из рассматриваемых уравнений можно предположить, что горизонтальная координата центра волны равна нулю) $x(0) = -26$ и на фиксированной глубине $y(0) = 0.75$. Из этого рисунка легко видеть, что при малых значениях времени траектория частицы, находящейся в начальной точке, достаточно удаленной от центра волны, начинает закручиваться против

часовой стрелки. Затем, во время прохождения волны (с течением времени), радиус “закручивания” траектории достигает своего максимального значения и начинает уменьшаться до нуля. Расстояние между начальной и конечной точками траектории, очевидно, не равно нулю, что означает, что дрейф частиц происходит во время распространения рассматриваемой поверхностной волны.

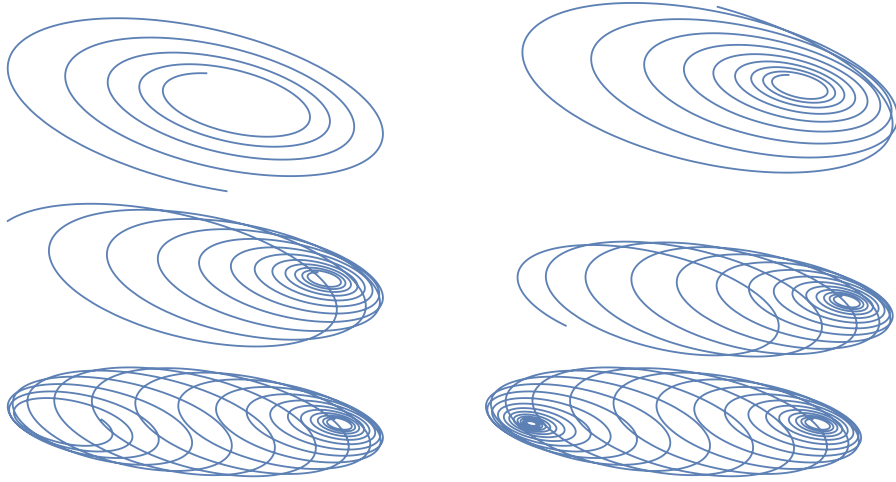


Рис. 9. Траектория жидкой частицы в начальный момент времени, находящейся в точке $x(0) = -26$, $y(0) = 0.75$ в разные моменты безразмерного времени; $t = 10$, $t = 20$, $t = 25$, $t = 30$, $t = 40$, $t = 60$ (слева направо и сверху вниз). Отклонение оси траектории от вертикали, связанное с погрешностью первого приближения, игнорируется

6.4. Траектории частиц жидкости в поле темного солитона.

Для темного солитона (33), который является нелинейным продуктом 1:1 резонанса ($q_2 < 0$), в соответствии с (16) в лабораторной системе отсчета, имеем (в низшем приближении по μ)

$$w_1 = -\text{ch } qz / (q \cosh q) (A_0 + A_0^*) = \pm 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\text{ch } qz}{q \cosh q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \sin q(x + t)$$

$$w_2 = i \sinh qz / (q \cosh q) (A_0 - A_0^*) = \mp 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\sinh qz}{q \cosh q} \text{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x + t) \cos q(x + t)$$
(42)

В соответствии с (32), (35) и (42) в первом порядке по μ , имеем

$$\begin{aligned}
 u &= \pm \left[2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\operatorname{ch} qz}{q \operatorname{ch} q} \operatorname{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x+t) \sin q(x+t) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\operatorname{sh} qz}{q \operatorname{ch} q} \operatorname{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x+t) \cos q(x+t) \right] \\
 v &= \mp 2 \sqrt{\frac{q_1 \mu}{q_2}} \frac{\operatorname{sh} qz}{q \operatorname{ch} q} \operatorname{th} \sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} (x+t) \cos q(x+t)
 \end{aligned} \tag{43}$$

Знак плюс в правых частях равенств (43) отвечает волне понижения уровня, а знак минус – волне повышения уровня. Для параметров h , H , σ_0 , ρ и μ отвечающих темному солитону, форма которого показана на Рис. 6, имеем $V_0 = 16.18 \text{ м/с}$, $q = 6.707$, $q_1 = 6.21$, $q_2 = -0.077 < 0$.

Система уравнений (36) решалась численно для параметров, показанных на Рис. 5 и различных начальных положений частицы по горизонтали $x(0)$ и вертикали (глубина, на которой находится частица) $y(0)$. На Рис. 10 показан типичный пример формы эволюции траекторий во времени t частицы, расположенных в начальный момент времени слева от центра волны понижения уровня на расстоянии примерно равном расстоянию, при котором темный солитон выходит на периодическую асимптотическую волну постоянной амплитуды.

Из Рис. 10 следует, что при малых значениях времени траектория частицы, находящейся в начальной точке, достаточно удаленной от центра волны, начинает закручиваться против часовой стрелки, а радиус вращательного движения постепенно уменьшается до нуля. Затем, когда центр волны проходит над частицей, радиус поворота траектории снова начинает увеличиваться до постоянного значения, при этом устанавливается стационарная картина эволюции траектории, поскольку периодическая (или почти периодическая) волна постоянной амплитуды располагается над частицей в значительные моменты времени. Жидкая частица, в то же время, движется по спирали и испытывает слабый дрейф: горизонтально вдоль направление распространения волны (влево), а по вертикали – к поверхности жидкости. Вертикальный дрейф является искусственным следствием аппроксимации (как написано выше), и мы его далее игнорируем.

7 Заключение

В данной работе построены траектории жидких частиц в поле нелинейных бегущих волн, являющиеся нелинейным продуктом трех резонансов линейной части основных уравнений модели: простого резонанса, резонанса длинной и короткой волн и 1:1 резонанса. Эти волны распространяются вдоль границы раздела жидкость-лед в слое идеальной несжимаемой жидкости под ледяным покровом. Волновые процессы в

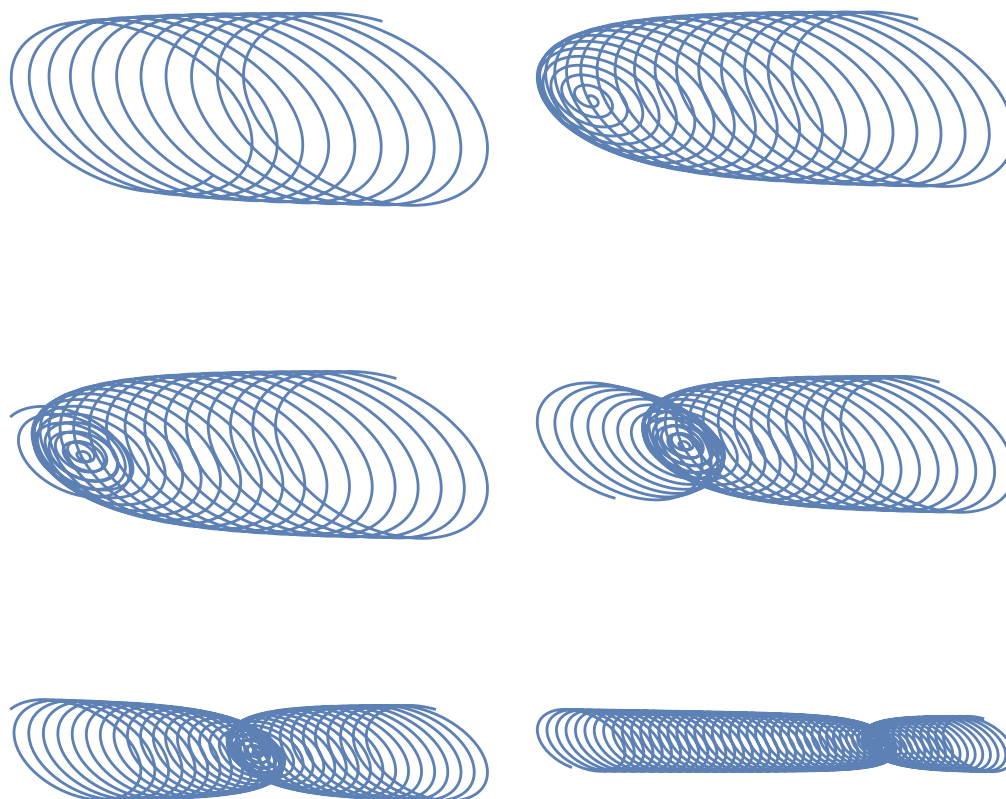


Рис. 10. Форма траекторий жидкой частицы в начальный момент времени находящейся в точке $x(0) = -20$, $y(0) = 0.75$ в поле поверхностного темного солитона с параметрами, приведенными на Рис. 5 в различные моменты безразмерного времени: $t = 10, 20, 25, 30, 40, 60$ (слева направо и сверху вниз). Слабое отклонение траектории от вертикали, являющееся следствием первого приближения, проигнорировано

жидкости описываются уравнениями Эйлера с дополнительным поверхностным давлением, вызванным присутствием льда, который моделируется упругой геометрически нелинейной пластиной Кирхгофа-Лява, свободно плавающей на поверхности. Чтобы определить структуры поверхностных волн, индуцирующие рассматриваемое волновое поле скорости в столбе жидкости, необходимо решить, по крайней мере асимптотически, основные уравнения модели. Эти решения типа классической и обобщенной уединенных волн, уединенного волнового пакета и темного солитона известны, и процедура их получения и соответствующее поле скоростей кратко представлены в статье.

Уравнения для бегущих волн в жидкости под ледяным покровом (которые локально могут быть записаны в операторной форме (5)) допускают проекцию на центральное многообразие – локальное нелинейное многообразие конечной размерности в бесконечномерном фазовом пространстве системы, где находятся ограниченные решения. При этом базовая система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая бегущие волны, записывается в виде конечномерной динамической системы (в виде так называемых приведенных уравнений). В статье рассматривается случай, когда размерность центрального многообразия равна двум и четырем, что отвечает простому резонансу, а также резонансу длинной и короткой волны и $1 : 1$ резонансу, соответственно. В этих случаях центральные спектры оператора $\mathbf{A}$ в (5) состоят из двух и четырех собственных значений (двух пар, симметричных относительно начала координат), которые при изменении скорости волны приходят с мнимой оси в комплексную плоскость, попарно совпадая на комплексной оси (или, в случае резонанса длинной и короткой волн попарно совпадает два из четырех собственных значений центрального спектра). Быстро убывающие волновые структуры, обобщенные уединенные волны и темные солитоны отвечают состоянию покоя на многообразиях в пространстве физических параметров, где собственные значения, принадлежащие центральному спектру $\mathbf{A}$, попарно совпадают. Другими словами, бифуркация из состояния покоя происходит в собственных значениях центрального спектра кратности 2. В случае простого резонанса и резонанса длинной и короткой волн множество, где совпадают собственные значения центрального спектра является плоскостью, а в случае $1 : 1$ резонанса, соответствующее многообразие представляет собой поверхность (8) в пространстве, обратно пропорциональном квадрату числа Фруда λ , безразмерному начальному напряжению в ледяной пластине b и безразмерной жесткости пластины на изгиб γ .

Упомянутые волновые структуры являются решением редуцированных обыкновенных дифференциальных уравнений на центральном многообразии. Эти уравнения аппроксимируются до любого алгебраического порядка по амплитуде волны уравнениями в нормальной форме, которые в рассматриваемых случаях, простого резонанса, резонанса длинной и короткой волн и $1 : 1$ резонанса являются интегрируемыми, допуская необходимое число первых интегралов, находящихся в инволюции. Таким образом, решение “усеченных уравнений” в квазинормальной форме с любым алгебраическим порядком по амплитуде, в принципе, может быть получено в явном виде.

Классические уединенные волны имеют место при больших безразмерных напряжениях в ледовой пластине, когда число b – аналог числа Бонда для гравитационно-капиллярных волн – больше $1/3$. Это неравенство накладывает ограничения на соотношение толщины льда и глубины

слоя жидкости при физически реальном напряжении в ледяном покрове. И разумеется, указанное неравенство означает, что рассматриваются только начальные растяжения в ледяном покрове ($b > 0$).

Для резонанса длинной и короткой волн ($b < 1/3$ – любое, в том числе и отрицательное, соответствующее начальному сжатию пластины), результирующее решение “усеченной системы” типа обобщенной уединенной волны при переходе к полной приведенной системе приобретает периодическую асимптотику на бесконечности экспоненциально малой амплитуды, если малость самой волны является алгебраической по амплитуде. Так что любое алгебраическое приближение по малой амплитуде дает уединенную волну (в данном случае возвышения уровня).

Как уже упоминалось, темные солитоны возникают при отрицательных значениях q_2 (это число, по сути, является коэффициентом при ведущей нелинейности в уравнениях для волн малой амплитуды). При $q > q^* > 0$ коэффициент q_2 становится отрицательным; при $q < q^*$, $q_2 > 0$ темные солитоны, которые являются нелинейным продуктом боры и периодической волны, замещаются уединенными волновыми пакетами, которые являются монохроматическими волнами под быстро убывающей огибающей; скорость монохроматической волны под огибающей равна скорости огибающей. Для волн под ледяным покровом с фиксированной толщиной льда существует критическая глубина жидкости H_c , выше которой больше нет решений типа уединенных волновых пакетов, а при $\mu < 0$ возникают темные солитоны.

References

- [1] L.K. Forbes, *Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 1. High order series solution*, J. Fluid Mech, **169** (1986), 409–428. Zbl 0607.76015
- [2] L.K. Forbes, *Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. Part 2. Galerkin solutions*, J. Fluid Mech, **188** (1988), 491–508. Zbl 0643.76013
- [3] K. Kirchgässner, *Wave solutions of reversible systems and applications*, J. Differ. Equations, **45** (1982), 113–127. Zbl 0507.35033
- [4] A. Mielke, *Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications*, Math. Methods Appl. Sci., **10**:1 (1988), 501–566. Zbl 0647.35034
- [5] G. Iooss, M. Adelmeyer, *Topics in bifurcation theory and applications. 2nd edition*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, Singapore: World Scientific, 1998. Zbl 0968.34027
- [6] A.T. Il'ichev, *Solitary waves in media with dispersion and dissipation (a review)*, Fluid Dynam., **35**:2 (2000), 157–176. Zbl 0995.76013
- [7] E. Parau, F. Dias, *Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load*, J. Fluid. Mech, **437** (2001), 325–336. Zbl 1045.76006
- [8] P.I. Plotnikov, J.F. Toland, *Modelling nonlinear hydroelastic waves*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A., Math. Phys. Eng. Sci. **369**:1947 (2011), 2942–2956. Zbl 1228.76027
- [9] A.T. Il'ichev, A.S. Savin, A. Yu. Shashkov, *Trajectories of fluid particles under ice cover in the field of solitary bending-gravity wave*, Radiophysics and Quantum Electronics, **66** (2023), 768–779.
- [10] O.M. Phillips, *The dynamics of the upper ocean*, Cambridge University Press, 1980. Zbl 0414.76001

- [11] A.S.Monin, *Theoretical Geophysical Fluid Dynamics*, Springer Dordrecht, 1990. Zbl 0723.76003
- [12] G. Stokes, *On the theory of oscillatory waves*, Trans. Camb. Phil. Soc., **8** (1847), 314–326.
- [13] A.A. Ochirov, *Research of the patterns of mass transfer initiated by wave movements of a liquid*: Cand. of Physics and Mathematics Thesis, Yaroslavl, 2020 (in Russian).
- [14] A.T. Il'ichev, A.S. Savin, A.Yu. Shashkov, *Trajectories of liquid particles in a dark soliton field in a fluid beneath an ice cover*, Fluid Dyn., **58** (2023), 1076–1086. Zbl 1552.76025
- [15] A.T. Il'ichev, A.S. Savin, A.Yu. Shashkov, *Motion of particles in the field of nonlinear wave packets in a liquid layer under an ice cover*, Theoret. and Math. Phys., **218**:3 (2024), 503–514. Zbl 1549.76031
- [16] A.T. Il'ichev, A.S. Savin, A.Yu. Shashkov, *Motion of liquid particles in the field of 1:1 resonanse nonlinear wave structures in a fluid beneath an ice cover*, Int. J. Non-Linear Mech., **160** (2024), 104665.
- [17] A. Müller, R. Ettema, *Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking*, In Proc. IAHR Ice Symp., Hamburg. 1984, 287–296.
- [18] A.T. Il'ichev, *Uedinennye volny v modelyakh gidromekhaniki*, Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
- [19] M. Haragus, G. Iooss, *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite-dimensional dynamical systems*, London: Springer, 2011. Zbl 1230.34002
- [20] G. Iooss, M.C. Perouéme, *Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields*, J. Differ. Equations, **102** (1993), 62–88. Zbl 0792.34044
- [21] E. Lombardi *Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems. Application to water waves*, Arch. Ration. Mech. Anal., **137**:3 (1997), 227–304. Zbl 0888.58039
- [22] A.T. Il'ichev, V.Ja. Tomashpolskii, *Characteristic parameters of nonlinear surface envelope waves beneath an ice cover under pre-stress*, Wave Motion, **86** (2019), 11–20. Zbl 1524.35634

IL'ICHEV ANDREJ TEIMURAZOVICH
 STEKLOV MATHEMATICAL INSTITUTE OF RAS,
 UL. GUBKINA, 8
 119991, MOSCAW, RUSSIA
Email address: ilichev@mi-ras.ru

SAVIN ALEXANDER SERGEEVICH
 BAUMAN MOSCOW STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
 2-D BAUMANSKAYA UL., 5 ,
 105005, MOSCAW, RUSSIA
Email address: assavin@list.ru