

**О НЕУСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ В ТЕОРИИ
ФИЛЬТРАЦИИ****Г.Г. Цыпкин***Посвящается 75-летию Василия Ивановича Васильева*

Abstract: This review paper considers the types of loss of stability of filtration flows. Characteristic dispersion curves are presented that correspond to transitions to instability within the Darcy theory at zero, finite and infinite values of the wave number, as well as at all wave numbers simultaneously. It is shown that the use of the generalized Brinkman filtration equation suppresses short-wave instability corresponding to infinite values of the wave number. As calculations show, the obtained values of characteristic sizes of the fastest growing disturbances are more than an order of magnitude smaller than a millimeter. This value is comparable to or smaller than the pore size of most natural porous media, for which the study of the stability of filtration flow is relevant. Therefore, a conclusion is made about the inapplicability of filtration theory methods to a wide class of problems leading to the formation of small-scale instability. It is assumed that such problems should be studied using micromechanics methods.

Keywords: Porous media, interface, instability

1 Введение

Существует большое количество природных и технологических процессов, исследование которых приводит к задачам об устойчивости фильтрационных течений. Хорошо известна неустойчивость фронта вытеснения нефти водой в процессе заводнения нефтяного месторождения, играющего большую роль в нефтедобывающей промышленности. Деформация плоской поверхности раздела между областями, насыщенными водой и нефтью, приводит к образованию водяных пальцев, которые могут достигать добывающей скважины и приводить к образованию неизвлекаемой остаточной нефти. Основной физический механизм неустойчивости фронта вытеснения обусловлен низкой вязкостью воды по отношению к вязкости нефти. В классической работе Саффмана и Тейлора [1] получен простой критерий возникновения неустойчивости поверхности раздела между жидкостями при вытеснении более вязкой жидкостью менее вязкой. Эта неустойчивость играет большую роль при образовании остаточной неизвлекаемой нефти. Движущиеся фронты вытеснения формируются также при вытеснении нефти газом, утилизации углекислого газа в проницаемых породах и т.д.

Извлечение глубинного тепла Земли базируется на моделировании движения воды, пара и пароводяной смеси в геотермальных резервуарах [2]. Важнейшей задачей является описание условий возникновения и процессов переноса в тепловой трубе, когда возникает конвективный поток энергии из недр к поверхности. В этом случае пар, имеющий высокую температуру, поднимается вверх, а менее нагретая вода опускается вниз. В классической гидродинамике расположение тяжелой жидкости над легкой всегда неустойчиво. Однако натурные наблюдения и аналитические исследования показали, что в геотермальных резервуарах слой воды (тяжелая жидкость) может находиться над слоем пара (легкая жидкость) и это состояние устойчиво [3]. Возникновение неустойчивости приводит к конвекции и возникновению тепловой трубы. Другой класс задач связан с течением в горизонтальных пластах и описывает извлечение теплоносителя или закачку холодной воды в высокотемпературные породы. В последнем случае неустойчивость фронта приводит к образованию пальцев и прорыву холодной воды к добывающей скважине, делая процесс извлечения тепла малоэффективным.

Одной из важных задач экологии является обеспечение питьевой водой населения. В связи с этим возникают задачи предотвращения попадания в водоносные горизонты загрязняющих примесей, которые могут быть как техногенного, так и природного происхождения [4]. В последнем случае это может быть морская вода в прибрежных районах или образование растворов при попадании пресной воды в залежи соли. В результате возникает контакт тяжелых растворов и пресной более легкой воды. Если область грунта, занятая раствором, расположена над горизонтом пресных вод, то возникает неустойчивость, которая приводит

к проникновению вредных примесей в водоносные горизонты, засолению почв и грунтов [5].

Как правило, аналитическими методами исследование устойчивости удается провести только для задач в линейной или слабонелинейной постановке. Исследование линейной устойчивости позволяет выделить в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости течения. Кроме того, на основе анализа дисперсионного соотношения можно определить критическое волновое число, отвечающее наиболее неустойчивой моде. Линейный масштаб этого возмущения соответствует характерному масштабу наиболее быстро растущего возмущения, которое на нелинейной стадии развития возмущений может как возрастать, так и затухать.

Настоящая работа представляет собой краткий обзор результатов по исследованию линейной устойчивости фильтрационных течений. Представлены возможные типы переходов к неустойчивости, соответствующие потерям устойчивости при нулевых, конечных и бесконечных волновых числах, а также одновременно при всех значениях волнового числа.

2 Спонтанный переход к неустойчивости

В работе Саффмана и Тейлора [1] исследовалась линейная устойчивость фронта вытеснения. Полученное дисперсионное соотношение имеет вид $\Sigma = AK$, где Σ – скорость роста или затухания возмущений, а K – волновое число. В зависимости от знака коэффициента A , зависящего от параметров, возмущения могут либо возрастать (неустойчивость), либо затухать (устойчивость). На плоскости (K, Σ) представлены дисперсионные кривые, являющиеся в данном случае прямыми линиями, проходящими через начало координат (Рис. 1а). Если в начальном состоянии фронт устойчив, то дисперсионная кривая соответствует линии 1. При изменении параметра A , когда устойчивость физической системы снижается, дисперсионная кривая вращается против часовой стрелки (положение 2). Дальнейшее вращение приводит к состоянию 3, которое соответствует нейтральной устойчивости, а переход к неустойчивости реализуется при сколь угодно малом изменении параметра A . При этом скорость роста Σ принимает положительные значения одновременно при всех волновых числах K , но наиболее быстро растущим возмущением является возмущение бесконечно малого размера, соответствующее бесконечно большому значению волнового числа K . Такую неустойчивость называют спонтанной.

В работах [6] – [9] исследовалась потеря устойчивости поверхности раздела пар–вода в геотермальном резервуаре, когда область воды находится над областью пара. Переход к неустойчивости происходил при

увеличении числа Рэлея. В работе [10] рассматривалась потеря устойчивости поверхности уровня грунтовых вод при наличии градиента капиллярного давления. Потеря устойчивости являлась следствием снижения давления в водоносном горизонте. Особенность спонтанного перехода к неустойчивости, полученного в этих работах, состоит в том, что в устойчивом состоянии дисперсионные кривые полностью лежат в отрицательной полуплоскости Σ . При уменьшении устойчивости кривые выполаживаются, приближаясь к оси абсцисс. В состоянии нейтральной устойчивости дисперсионные кривые совпадают с осью абсцисс $\Sigma = 0$, а при возникновении неустойчивости полностью переходят в положительную полуплоскость Σ как это показано на Рис. 1b ([9]) и Рис. 1c ([10]).

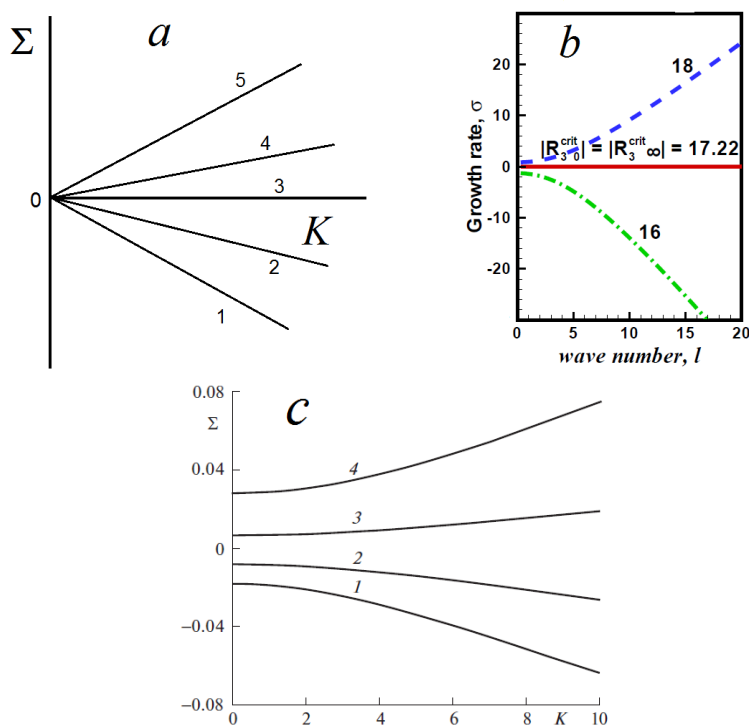


Рис. 1. Дисперсионные кривые при спонтанном переходе к неустойчивости.

В рассмотренных случаях математические модели дают критерии устойчивости, но не позволяют определить размер наиболее быстро растущего возмущения. Методы теории фильтрации применимы для исследования течений в пористых средах, когда масштаб изучаемого явления более чем на порядок превышает размер пор пористой среды. Образование наиболее быстро растущей моды при бесконечно большом волновом числе свидетельствует о неприменимости математической модели

в данном диапазоне параметров для нахождения характерного размера наиболее неустойчивого возмущения.

3 Потеря устойчивости при нулевом волновом числе

Базовое стационарное решение, которое исследуется на устойчивость, может быть неединственным. При изменении параметра, приводящего к неустойчивости, потеря устойчивости происходит при нулевом волновом числе, а базовые стационарные решения сливаются и в сверхкритической области перестают существовать (Рис. 2а). Переход к неустойчивости, в этом случае происходящий при нулевом волновом числе, соответствует неустойчивости бесконечно длинного возмущения [6] – [10]. Дисперсионные кривые в этом случае имеют характерный вид, представленный на Рис. 2b ([9]) и Рис. 2с ([10]).

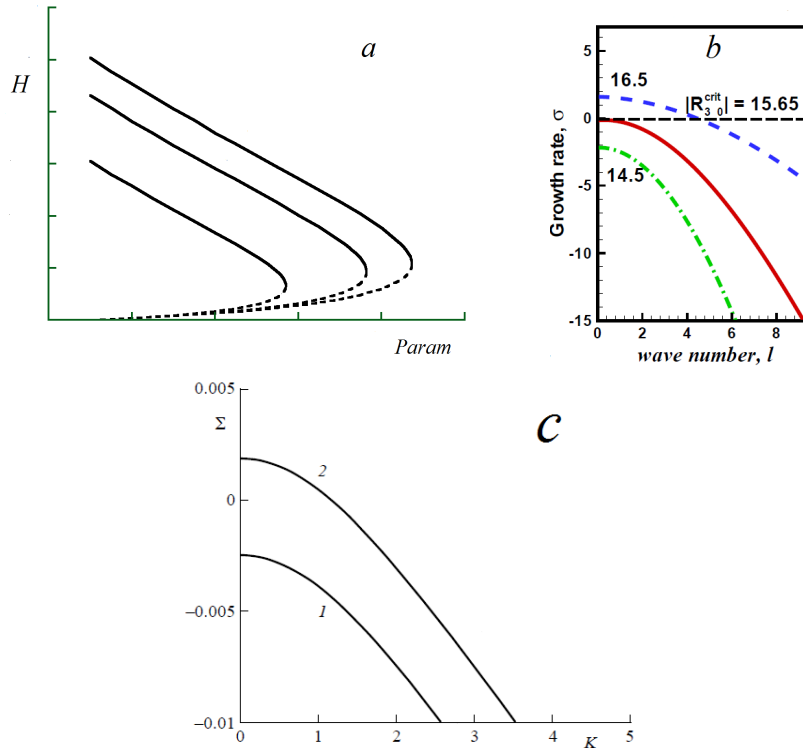


Рис. 2. Неединственность решения и потеря устойчивости при нулевом волновом числе.

Поскольку в реальности не существует физических систем бесконечной протяженности, то в этом случае речь может идти о длинных возмущениях, размер которых соизмерим с размером физической системы. Если в какой-то области параметров базовое решение не существует, то

переход в эту область параметров сопровождается быстрым ростом возмущений и распадом поверхности раздела [11]. В области существования стационарного решения в диапазоне неустойчивости, было получено решение в слабонелинейном приближении. Показано, что развитие слабонелинейных возмущений описывается уравнением Колмогорова–Петровского–Пискунова [12].

4 Переход к неустойчивости при конечном волновом числе в рамках закона Дарси

Возникновение гравитационной неустойчивости в рамках классического закона фильтрации Дарси исследовалось в геотермальных системах, когда тяжелая фаза располагалась над легкой. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе, соответствующем конечному размеру наиболее неустойчивого возмущения, был представлен в работах [3], [13]. В первой работе исследовались условия устойчивого положения воды над паром, а во второй – воды над пароводяной смесью. Был сделан вывод, что характерное поведение дисперсионных кривых при переходе к неустойчивости, найденное в этих работах, имеет вид, представленный на Рис. 3а ([13]).

Аналогичное поведение демонстрируют дисперсионные кривые в задаче о закачке жидкости в пористую среду, сопровождающейся ее испарением [14]. В этой работе также были представлены результаты эксперимента по возникновению неустойчивости фронта инъекции жидкого эфира в слой нагретого песка, с последующим образованием пальцев жидкой фазы. Получено качественное согласие экспериментальных данных с результатами расчетов. Следует отметить, что для небольших значений волнового числа, расположенного в окрестности нуля, дисперсионные кривые лежат в нижней полуплоскости Σ , что соответствует устойчивости длинноволновых возмущений. Эволюция дисперсионных кривых представлена в работе [15], где исследовалась задача о гравитационной неустойчивости слоя воды, контактирующего с углекислотой, в котором происходит растворение углекислого газа, проиллюстрирована на Рис. 3b.

Внешне похожее поведение дисперсионных кривых (рис. 4а) получено в работе [16], в которой исследовалась линейная устойчивость течения в тепловой трубе в геотермальном резервуаре, когда имеется противоток воды и пара в области их совместного существования. Однако можно заметить одно существенное различие в поведении дисперсионных кривых, которое заключается в том, что в последнем случае дисперсионные кривые в окрестности начала координат лежат на оси абсцисс, т.е. на линии нейтральной или маргинальной устойчивости. Это означает, что линейный анализ не дает ответа об устойчивости физической системы в случае длинноволновых возмущений.

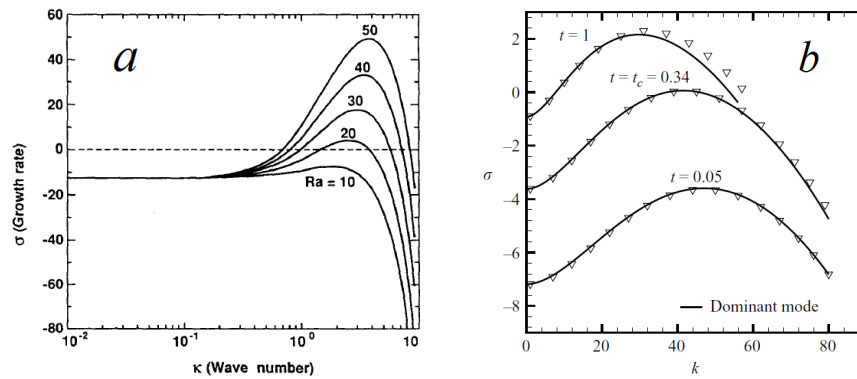


Рис. 3. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе.

При исследовании устойчивости поверхности химической реакции между двумя жидкостями в пористой среде ([17]) было получено, что переход к неустойчивости происходит при конечном волновом числе, но его нулевое значение также всегда соответствует нейтральной устойчивости, как это показано на Рис. 4b ([17]).

Задача об устойчивости слоя воды над слоем пара, рассмотренная в [3], была обобщена на случай наличия фазового перехода в невозмущенном состоянии [6, 7]. Это позволило объяснить устойчивость рассматриваемой физической системы, которая наблюдалась на практике при более высокой проницаемости пород. Кроме того, в зависимости от изменений параметров, которые приводят к потере устойчивости, были обнаружены все типы переходов к неустойчивости, в том числе при конечных значениях волнового числа. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе может сопровождаться таким последующим развитием неустойчивости, которое приводит к уменьшению масштаба наиболее неустойчивого возмущения, вплоть до бесконечно малого значения [7, 8] (Рис. 5a и Рис. 5b).

В работе [18] рассматривалась инъекция воды с постоянной скоростью в геотермальный резервуар, насыщенный перегретым паром. Одномерная задача имеет решение типа бегущей волны, которое исследовалось на устойчивость. Характерный вид дисперсионных кривых изображен на Рис. 6a. Неустойчивость фронта кипения возникает с повышением начальной температуры и проницаемости пород, а также с увеличением начального давления перегретого пара.

На рис. 6b представлена зависимость безразмерного критического волнового числа K_{cr} , при котором происходит переход к неустойчивости, от проницаемости. Критическому волновому числу соответствует линейный размер наиболее быстро растущего возмущения L_{cr} (рис. 6c). Переход к неустойчивости происходит при конечном волновом числе. Коротковолновые и длинноволновые возмущения затухают при любых

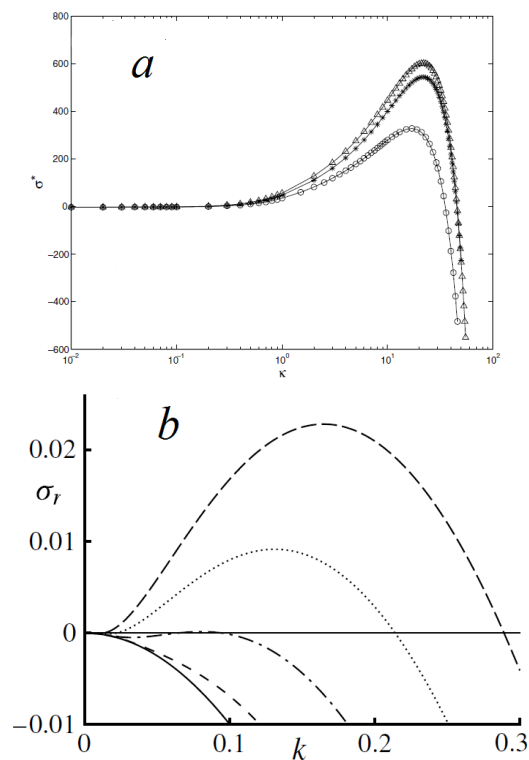


Рис. 4. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе с нейтральной устойчивостью при малых волновых числах.

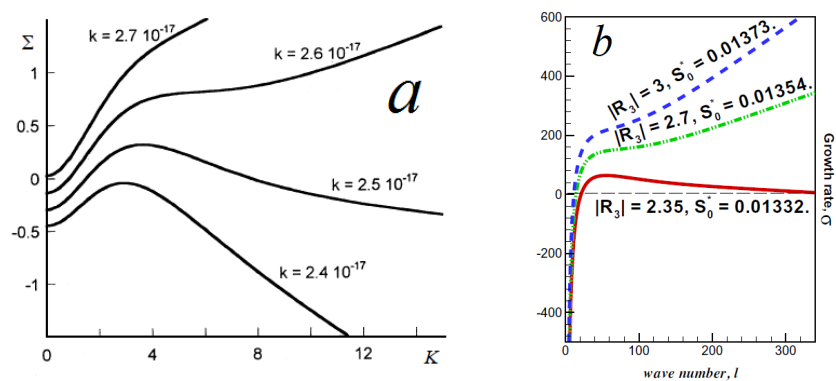


Рис. 5. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе с последующим развитием возмущений при бесконечно большом волновом числе.

значениях параметров, за исключением возмущения, соответствующего нулевому волновому числу, которое находится в состоянии нейтральной

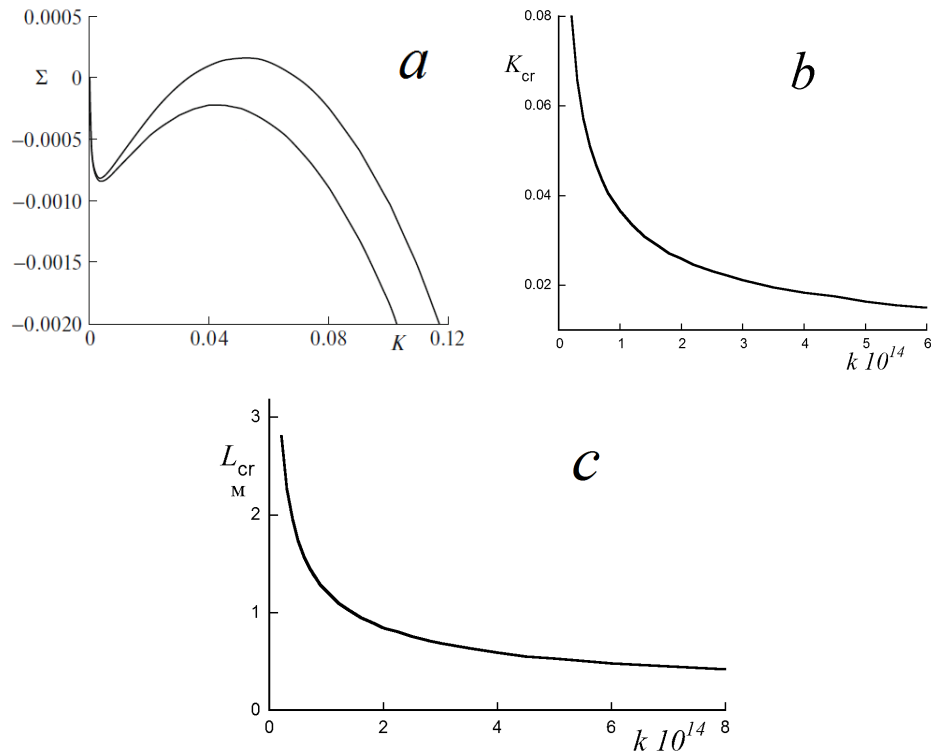


Рис. 6. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе и оценка характерного размера наиболее быстро растущего неустойчивого возмущения.

устойчивости. В неустойчивых случаях наиболее быстро растущие возмущения при характерных значениях параметров имеют размер порядка одного метра.

5 Коротковолновая неустойчивость

Во многих задачах найдены диапазоны параметров, когда переход к неустойчивости реализуется при бесконечно большом волновом числе, соответствующем бесконечно малым размерам возмущения [6] – [12]. На Рис. 7а ([7]) и Рис. 7б ([9]) представлена характерная эволюция дисперсионных кривых при переходе к неустойчивости при бесконечно больших значениях волнового числа.

Естественно предположить, как уже ранее было сказано в случае спонтанной неустойчивости, что математическая модель не дает адекватного описания потери устойчивости. Если масштабы явления малы, приближение теории фильтрации неприменимо. Характерный масштаб задачи,

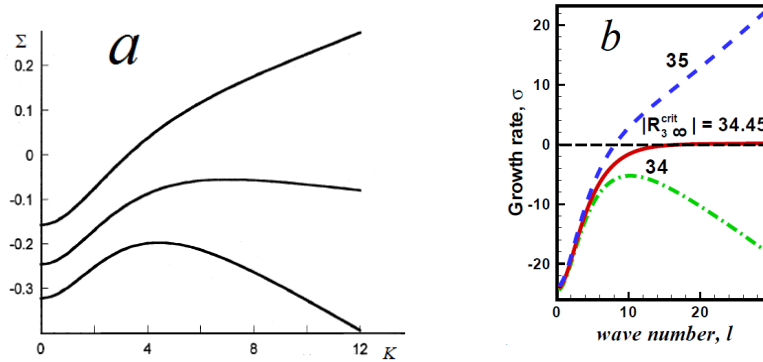


Рис. 7. Характерные дисперсионные кривые при переходе к неустойчивости при бесконечном волновом числе.

которым здесь является размер возмущения, должен быть много больше размера пор пористой среды. Если это не выполняется, то требуется уточнение и модификация математической модели. В приведенных примерах в качестве основного уравнения использовался классический закон фильтрации Дарси, который имеет вид

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla P$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости, k – проницаемость, μ – вязкость, P – давление.

Закон Дарси применим для описания достаточно крупномасштабных процессов. Для описания мелкомасштабных процессов можно воспользоваться обобщенным уравнением фильтрации Бринкмана

$$-\nabla P - \frac{\mu}{k} \mathbf{v} + \mu_e \Delta \mathbf{v} = 0$$

где μ_e – эффективная динамическая вязкость. Если положить эффективную вязкость равной нулю, то данное уравнение переходит в закон фильтрации Дарси.

6 Переход к неустойчивости течения в рамках уравнения Бринкмана

Задача об устойчивости вертикального течения в нефтяном коллекторе с газовой шапкой, была исследована в рамках приближения Дарси в работе [19]. Было найдено, что переход к неустойчивости всегда реализуется при бесконечно больших волновых числах. Аналогичная задача исследовалась для случая, когда течение описывается уравнением Бринкмана [20]. Было найдено, что при всех значениях параметров, скорость роста коротковолновых возмущений стремится к нулю при неограниченном возрастании волнового числа. Вид дисперсионных кривых представлен на Рис. 8а.

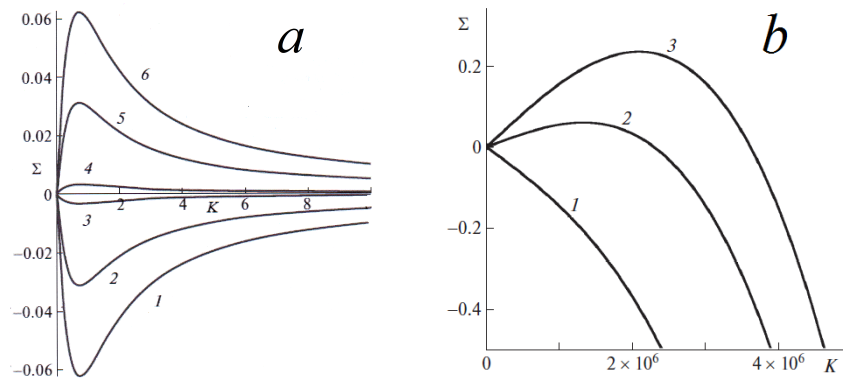


Рис. 8. Переход к неустойчивости при конечном волновом числе для обобщенного закона фильтрации Бринкмана.

Соответственно, при больших волновых числах, чем меньше размер возмущений, тем медленнее они растут. В этом смысле можно считать, что математическая модель, использующая обобщенное уравнение фильтрации Бринкмана, корректно описывает переход к неустойчивости. Из вида кривых следует, что данный переход к неустойчивости формально можно отнести к спонтанному переходу, но наиболее быстро растущая мода соответствует возмущению конечного размера.

Учет сил внутреннего трения, выражающийся в появлении оператора Лапласа в уравнении фильтрации, и их влияние на устойчивость также рассматривалось в задаче испарения слоя воды, расположенного над подземным сооружением. Предполагалось, что слой воды отделен от свободного пространства породами, насыщенными влажным воздухом [21]. Было получено, что использование уравнения Бринкмана устраняет неограниченность скорости роста возмущений для поверхности раздела на малых масштабах, что имеет место в случае закона Дарси [12]. В приближении Бринкмана в случае неустойчивости наиболее неустойчивая мода соответствует конечному значению волнового числа, как это показано на Рис. 8b ([21]).

Вычисления показали, что поверхность раздела становится более устойчивой в приближении Бринкмана, как это проиллюстрировано на Рис. 9, где на плоскости давление в пласте – проницаемость представлены маргинальные кривые устойчивости. Следует подчеркнуть, что хотя приближение Дарси не дает полностью корректного описания перехода к неустойчивости, но условия возникновения неустойчивого режима течения описывает с удовлетворительной точностью.

Для обоих случаев использования уравнения Бринкмана были проведены численные оценки формирующихся неустойчивых коротковолновых возмущений. Найдено, что линейный размер возмущения в зависимости от параметров, начальных и граничных условий находится

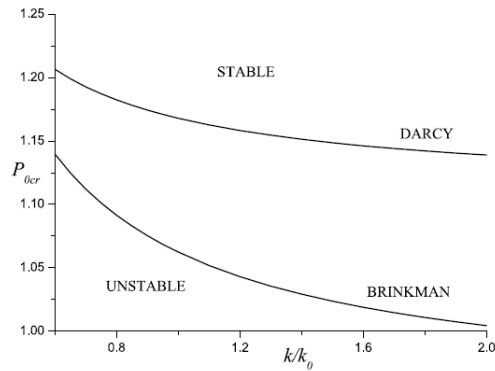


Рис. 9. Маргинальные кривые, соответствующие приближениям Дарси и Бринкмана.

в пределах от 0.1 миллиметра до нескольких микрон. Таким образом, можно сделать вывод, что применение уравнения Бринкмана не исправляет ситуацию для большинства природных пористых сред.

7 Заключение

Рассмотрены примеры переходов к неустойчивости фильтрационных течений в рамках линейной теории. Полученные дисперсионные соотношения показывают, что в приближении Дарси наиболее неустойчивые возмущения могут возникать при нулевых, конечных и бесконечно больших волновых числах. Для одного и того же дисперсионного уравнения тип перехода зависит от параметра, изменение которого приводит к неустойчивости. Например, в геотермальной системе при изменении проницаемости неустойчивость Рэлея–Тейлора возникает при бесконечно больших волновых числах, а при изменении давления – при конечных.

Возникновение неустойчивости поверхности раздела при нулевых волновых числах соответствует возмущению бесконечно большого масштаба, что является следствием идеализации математической формулировки физического явления. В реальности физическая система ограничена, соответственно неустойчивое возмущение будет конечного размера, но крупномасштабным.

Переход к неустойчивости при конечных волновых числах соответствует возникновению наиболее неустойчивых возмущений конечного размера. Расчеты, проведенные в рассмотренных примерах, показали характерный масштаб наиболее быстро растущих возмущений, который изменяется, в основном, в пределах от нескольких сантиметров до десятков метров. Такие возмущения хорошо описываются классическими уравнениями теории фильтрации.

Особым случаем является возникновение коротковолновой неустойчивости, когда наиболее быстро растущая мода соответствует бесконечно

большому волновому числу. Очевидно, что такой переход не описывается представленной математической моделью. Теория фильтрации применима к задачам движения в пористых средах, когда масштаб физического явления на порядок и более превосходит размеры пор. Использование вместо классического закона Дарси обобщенного закона фильтрации Бринкмана, учитывающего мелкомасштабные эффекты, показало, что область устойчивости в пространстве параметров увеличивается. Кроме того, подавляется переход к неустойчивости при бесконечно больших волновых числах, возникающий при использовании уравнения Дарси. Однако в этом случае приближение Бринкмана дает все равно очень малый характерный масштаб наиболее быстро растущего возмущения, составляющий доли миллиметра и менее.

В результате математическая модель Бринкмана становится корректной только для мелкодисперсных сред, например глин, но не решается вопрос для большинства природных пористых сред, поскольку размер неустойчивого возмущения соизмерим или даже меньше размера пор пористой среды. Можно предположить, что исследование данного класса задач о неустойчивости течений в пористых средах возможно только с применением методов микромеханики на масштабах, совпадающих с размерами пор пористой среды.

References

- [1] P.G. Saffman, G. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, **245** (1958), 312–329. Zbl 0086.41603
- [2] M.J. O'Sullivan, *Geothermal reservoir simulation*, Int. J. Energy Res., **9** (1985), 319–332.
- [3] G. Schubert, J.M. Straus, *Gravitational stability of water over steam in vapor-dominated geothermal system*, J. Geophys. Res., **85** (1980), 6505–6512.
- [4] S.M.S. Shokri-Kuehni, B. Raaijmakers, T. Kurz, et al., *Water table depth and soil salinization: from pore-scale processes to field-scale responses*, Water Res. Res., **56**:2 (2020), Article No. e2019WR026707.
- [5] G.H. de Rooij, *Modeling fingered flow of water in soils owing to wetting front instability: a review*, J. Hydrology, **231–232** (2000), 277–294.
- [6] G.G. Tsypkin, A.T. Il'ichev, *Gravitational stability of the interface in water over steam geothermal reservoirs*, Transp. Porous Media, **55**:2 (2004), 183–199. MR2032259
- [7] A.T. Il'ichev, G.G. Tsypkin, *Transition to instability of the interface in geothermal systems*, Eur. J. Mech., B, Fluids, **24**:4 (2005), 491–501. Zbl 1065.76091
- [8] Z.H. Khan, D. Pritchard, *Liquid-vapour fronts in porous media: Multiplicity and stability of front positions*, Int. J. Heat Mass Transfer, **61** (2013), 1–17.
- [9] Z.H. Khan, D. Pritchard, *Anomaly of spontaneous transition to instability of liquid-vapour front in a porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, **84** (2015), 448–455.
- [10] G.G. Tsypkin, *Stability of the evaporation and condensation surfaces in a porous medium*, Fluid Dyn., **52**:6 (2017), 777–785. Zbl 1384.76020
- [11] V.A. Shargatov, A.T. Il'ichev, G.G. Tsypkin, *Dynamics and stability of moving fronts of water evaporation in a porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, **83** (2015), 552–561.

- [12] A.T. Il'ichev, G.G. Tsypkin, *Instabilities of uniform filtration flows with phase transition*, J. Exp. Theor. Phys., **107**:4 (2008), 699–711.
- [13] P.S. Ramesh, K.E. Torrance, *Stability of boiling in porous media*, Int. J. Heat Mass Transfer, **33**:9 (1990), 1895–1908. Zbl 0708.76132
- [14] S.D. Fitzgerald, A.W. Woods, *The instability of a vaporization front in hot porous rock*, Nature, **367** (1994), 450–453.
- [15] A. Riaz, M. Hesse, H.A. Tchelepi, F.M. Orr, *Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media*, J. Fluid Mech., **548** (2006), 87–111. MR2264219
- [16] P. Amili, Y.C. Yortsos, *Stability of heat pipes in vapor-dominated systems*, Int. J. Heat Mass Transfer, **47**:6-7 (2004), 1233–1246. Zbl 1106.76369
- [17] S.H. Hejazi, J. Azaiez, *Stability of reactive interfaces in saturated porous media under gravity in the presence of transverse flows*, J. Fluid Mech., **695** (2012), 439–466. Zbl 1250.76085
- [18] G.G. Tsypkin, *Investigation of the transition to instability of the water boiling front during injection into a geothermal reservoir*, Theor. Math. Phys., **211**:2 (2022), 735–743.
- [19] G.G. Tsypkin, *Instability of a light fluid over a heavy one under the motion of their interface in a porous medium*, Fluid Dyn., **55**:2 (2020), 213–219. Zbl 1475.76047
- [20] G.G. Tsypkin, V.A. Shargatov, *Linear stability of a filtration flow with gas-oil interface within the Brinkman approach*, Fluid Dyn., **57**:3 (2022), 273–280. Zbl 1497.76035
- [21] A.T. Il'ichev, G.G. Tsypkin, *Stability of the interface in a porous medium in the framework of Darcy's and Brinkman's approximations*, Transp. Porous Media, **148** (2023), 317–333.

GEORGY GENNADIEVICH TSYPKIN

ISHLINSKY INSTITUTE FOR PROBLEMS IN MECHANICS, RAS

PR. VERNADSKOGO, 101-1,

119526, MOSCOW, RUSSIA

Email address: tsyarkin@ipmnet.ru