

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-2 ДЛЯ
3-ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ШАРЕВ.В. КАРАЧИК *Представлено Е.М. Рудым*

Abstract: The Green's function for some boundary value problem for the 3-harmonic equation in the unit ball is constructed and an integral representation of the solution of this problem is given.

Keywords: 3-harmonic equation, Green's function, Dirichlet-2 problem, integral representation.

1 Введение

Большое количество работ посвящено построению функций Грина в явном виде для различных полигармонических краевых задач. Впервые отметим работу [1], где построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске, а также работы [2, 3, 4], где находится явное представление гармонической функции Робина. Для бигармонического и 3-гармонического уравнений в работах [5, 6], приведена явная форма функции Грина в секторе, а в [7, 8] исследована разрешимость и построены функции Грина нескольких локальных и нелокальных краевых задач с инволюцией для бигармонического уравнения. В [9] приведен явный вид функции Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в единичном шаре, а в [10, 11] находятся полиномиальные решения задач Дирихле.

KARASHIK, V.V., GREEN'S FUNCTION OF THE DIRICHLET-2 PROBLEM FOR THE 3-HARMONIC EQUATION IN A BALL.

© 2025 КАРАЧИК В.В.

Поступила 25 ноября 2024 г., опубликована 8 июля 2025 г.

Функциям Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре посвящены работы [12, 14, 13, 15]. Отметим работу [16], где находятся решения задач Дирихле и Неймана для однородного полигармонического уравнения без использования функции Грина. Для нахождения полиномиальных решений задачи Дирихле с полиномиальными граничными данными в [17] построен оператор Грина.

Условия разрешимости некоторых вариантов краевых задач для бигармонического уравнения в шаре были получены также в работах [18, 19]. В [20] приводятся функции Грина задач Навье [21] и Рикье-Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в работах [22, 23], используя результаты из [24], построены функции Грина таких задач для полигармонического уравнения. Задача Неймана для полигармонического уравнения исследована в работах [25, 26]. В работе [27] исследована фредгольмовость и индекс обобщённой задачи Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях

Следует отметить также некоторые недавно опубликованные работы по построению функции Грина для различных краевых задач [28, 29, 30, 31]. Применение функций Грина в задачах механики и физики можно найти в [32, 33, 34, 35, 36, 37].

В настоящей работе рассматривается построение решения следующей краевой задачи для 3-гармонического уравнения в единичном шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$

$$\Delta^3 u(x) = f(x), \quad x \in S, \quad (1)$$

$$u|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u|_{\partial S} = \varphi_2, \quad (2)$$

которую можно назвать задачей Дирихле-2, поскольку, как оказалось, она близка к задаче Дирихле: у них одна и та же функция Грина. Граничные условия задачи (1)-(2) представляют собой некий симбиоз условий Дирихле и условий Навье [22]. Ниже будет найдена функция Грина этой задачи. Решение задачи будем искать в классе $u \in C^6(S) \cap C^5(\bar{S})$.

Сначала, в разделе 2, приводятся некоторые сведения об элементарных решениях и функциях Грина задачи Дирихле для полигармонического и 3-гармонического уравнений и указывается их связь с фундаментальным решением С.Л.Соболева [38]. Затем, в теореме 1 из раздела 3, с помощью лемм 1-3 о свойствах функции Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$, находится интегральное представление (34) решения рассматриваемой задачи (1)-(2) через функцию Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$. После этого, в разделе 4, доказывается теорема 2 о существовании решения исходной задачи и находится минимальная необходимая гладкость граничных данных. Доказательство теоремы 2 опирается на леммы 4-8. В этих леммах дается представление (34) о структуре решения задачи (1)-(2). С помощью замечаний 2-4 в следствии 2 получено другое представление (50) решения задачи (1)-(2) без участия функции Грина. Аналогичное представление решения

полигармонической задачи Дирихле дано в [16]. В заключении рассматривается пример 1, иллюстрирующий явную формулу (50).

2 Элементарное решение и функция Грина задачи Дирихле

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре S при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E_2(x, \xi) - E_2\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \quad (3)$$

где $E_2(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа, как его называл А. Бицадзе [39]. В работе [40] было определено элементарное решение бигармонического уравнения

$$E_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)}|x-\xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3 \\ -\frac{1}{4}\ln|x-\xi|, & n = 4 \\ \frac{|x-\xi|^2}{4}(\ln|x-\xi| - 1), & n = 2 \end{cases}, \quad (4)$$

а в работе [9] для 3-гармонического уравнения

$$E_6(x, \xi) = \begin{cases} \frac{|x-\xi|^{6-n}}{2 \cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n \geq 3, n \neq 4, 6, \\ -\frac{1}{64}\ln|x-\xi|, & n = 6 \\ \frac{|x-\xi|^2}{32}\left(\ln|x-\xi| - \frac{3}{4}\right), & n = 4 \\ -\frac{|x-\xi|^4}{64}\left(\ln|x-\xi| - \frac{3}{2}\right), & n = 2 \end{cases}. \quad (5)$$

Кроме того были найдены функции Грина $G_4(x, \xi)$ и $G_6(x, \xi)$, соответствующих задач Дирихле в S . Если обозначить $E_k^*(x, \xi) = E_k\left(\frac{x}{|x|}, \xi|x|\right)$, то $G_6(x, \xi)$ имеет вид

$$G_6(x, \xi) = E_6(x, \xi) - E_6^*(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} E_4^*(x, \xi) - \frac{1}{4} \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} E_2^*(x, \xi). \quad (6)$$

На основании функций $E_4(x, \xi)$ и $E_6(x, \xi)$ в [41] было введено элементарное решение m -гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$. Если $m \in \mathbb{N}$, то множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим

элементарное решение $E_{2m}(x, \xi)$ в виде

$$E_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m (2, 2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \left(\ln |x - \xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c. \end{cases} \quad (7)$$

где $(a, b)_k = a(a+b) \dots (a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$, а символ $(a, b)_k^*$ – означает, что если среди сомножителей $a, (a+b), \dots (a+kb-b)$, входящих в $(a, b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2, 2)_3^* = (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (7) верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю. Заметим, что $(2-n, 2)_m = (2-n)(4-n) \dots (2m-n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}_m$ и значит первая часть формулы (7) определена корректно.

В [23] доказано, что функция $E_{2m}(x, \xi)$ совпадает с элементарными функциями $E_2(x, \xi)$, $E_4(x, \xi)$ и $E_6(x, \xi)$ при $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$, соответственно. Кроме того, симметричная функция $E_{2m}(x, \xi)$, определенная при $x \neq \xi$, удовлетворяет равенствам [22, лемма 2.1]

$$\Delta_\xi E_{2m}(x, \xi) = -E_{2(m-1)}(x, \xi), \quad \Delta_\xi E_2(x, \xi) = 0. \quad (8)$$

Элементарная функция $E_{2m}(x, \xi)$ несколько отличается от фундаментального решения полигармонического уравнения $G_{m,n}(x)$, рассмотренного С.Л.Соболевым [38, р. 521]. Для $n \in \mathbb{N}_m$ разница в множителе $(-1)^m$, а для $n \in \mathbb{N}_m^c$ эта разница более заметна. В [41, теорема 1] для $n \in \mathbb{N}_{m-1}^c$ была построена функция Грина задачи Дирихле в виде

$$G_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m-2, -2)_k (2, 2)_k} E_{2m-2k}^*(x, \xi). \quad (9)$$

Затем, в работе [15], элементарное решение $E_{2m}(x, \xi)$ было слегка подправлено и была введена другая функция $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$, которая связана с функцией $E_{2m}(x, \xi)$ формулой

$$\mathcal{E}_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} E_{2m}(x, \xi), & n \in \mathbb{N}_{m-1} \\ E_{2m}(x, \xi) + \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k}, & n \in \mathbb{N}_{m-1}^c. \end{cases} \quad (10)$$

Видно, что $\mathcal{E}_2(x, \xi) = E_2(x, \xi)$ для всех $n \geq 2$. При $m = 2$ имеем $\mathbb{N}_1^c = \{2\}$ и, значит в формуле (4) изменится только последняя строка

$$\mathcal{E}_4(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2(n-2)(n-4)} |x - \xi|^{4-n}, & n > 4, n = 3 \\ -\frac{1}{4} \ln |x - \xi|, & n = 4 \\ \frac{|x - \xi|^2}{4} \left(\ln |x - \xi| - \frac{1}{2} \right), & n = 2 \end{cases}. \quad (11)$$

Если же $m = 3$, то $\mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$ и поэтому в (5) изменятся уже две последние строки

$$\mathcal{E}_6(x, \xi) = \begin{cases} \frac{|x - \xi|^{6-n}}{2 \cdot 4(n-2)(n-4)(n-6)}, & n \geq 3, n \neq 2, 4, 6 \\ -\frac{1}{64} \ln |x - \xi|, & n = 6 \\ \frac{|x - \xi|^2}{32} \left(\ln |x - \xi| - \frac{1}{2} \right), & n = 4 \\ -\frac{|x - \xi|^4}{64} \left(\ln |x - \xi| - \frac{3}{4} \right), & n = 2 \end{cases}. \quad (12)$$

Заменяя в (6) $E_{2k}(x, \xi)$ на $\mathcal{E}_{2k}(x, \xi)$ получим новую функцию

$$\mathcal{G}_6(x, \xi) = \mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{1}{4} \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} \mathcal{E}_2^*(x, \xi). \quad (13)$$

Если в ней положить $m = 3$ и $n = 4$, то в соответствии с (10)

$$\mathcal{E}_6(x, \xi) = E_6(x, \xi) + \frac{1}{4} \frac{|x - \xi|^2}{32}, \quad \mathcal{E}_4(x, \xi) = E_4(x, \xi),$$

а значит

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_6(x, \xi) &= \mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{|x|^2 - 1}{2} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{(|x|^2 - 1)^2}{4} \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \\ &= G_6(x, \xi) + \frac{1}{4} \left(\frac{|x - \xi|^2}{32} - \frac{|x/|x| - \xi/|\xi||^2}{32} \right) \\ &= G_6(x, \xi) + \frac{1}{4} \frac{|x|^2 - 2x\xi + |\xi|^2 - 1 + 2x\xi - |x|^2|\xi|^2}{32} \\ &= G_6(x, \xi) - \frac{1}{4} \frac{(|\xi|^2 - 1)(|x|^2 - 1)}{32}. \end{aligned}$$

Оказывается, что получившаяся при $m = 3$ и $n = 4$ функция $\mathcal{G}_6(x, \xi)$ совпадает с функцией Грина для 3-гармонической задачи Дирихле из работы [9, теорема 2]. В общем случае, в работе [15, теорема 1], доказано

утверждение, обобщающее теорему 1 из [41]. Установлено, что если в равенство (9) вместо всех функций $E_{2k}(x, \xi)$ подставить функции $\mathcal{E}_{2k}(x, \xi)$, то полученная таким образом функция

$$\mathcal{G}_{2m}(x, \xi) = \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(|x|^2 - 1)^k (|\xi|^2 - 1)^k}{(2m - 2, -2)_k (2, 2)_k} \mathcal{E}_{2m-2k}^*(x, \xi) \quad (14)$$

будет функцией Грина задачи Дирихле при всех натуральных $n \geq 2$ без ограничений (функция $G_{2m}(x, \xi)$ являлась функцией Грина задачи Дирихле лишь при $n \in \mathbb{N}_{m-1}^c$). Для 3-гармонического уравнения такова функция $\mathcal{G}_6(x, \xi)$ из (13).

3 Интегральное представление решения задачи

В дальнейшем необходимо будет следующее интегральное представление функций класса $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D .

Лемма 1. *Функция $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ имеет следующее интегральное представление*

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u \right. \\ & \left. - \Delta^{m-k-1} \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D \mathcal{G}_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

где функция $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ определена в (14), $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, ν – внешняя единичная нормаль к ∂D .

Доказательство. В работе [24] было доказано следующее представление для функции u

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(E_{2k+2}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_{2k+2}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u \right) ds_\xi \\ & + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D E_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где функция E_{2k} определена в (7). Если в этом равенстве учесть первое равенство из (8), то будем иметь

$$\begin{aligned} u(x) = & \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta^{m-k-1} E_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u \right. \\ & \left. - \Delta^{m-k-1} E_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D E_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку функции $E_{2m}(x, \xi)$ и $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$ имеют одинаковую особенность при $x = \xi$, то учитывая доказательство равенства (16) из работы

[24], оно останется верным и после замены в нем $E_{2m}(x, \xi)$ на $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$. Рассмотрим функцию $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi) - \mathcal{E}_{2m}(x, \xi) = -H_{2m}(x, \xi)$, которая согласно [41, теорема 1] является m -гармонической функцией по $\xi \in \bar{S}$ при $x \in S$. В [24] было также доказано похожее на (16) равенство для функций $u, v \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$

$$\int_D (u \Delta^m v - v \Delta^m u) d\xi = \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta^{m-k-1} v}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta^{m-k-1} v \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi.$$

Если здесь выбрать $v(\xi) = -H_{2m}(x, \xi)$, учесть что $\Delta^m v = 0$ и перенести объемный интеграл в правую часть равенства, то получим

$$0 = \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{\partial \Delta^{m-k-1} H_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u + \Delta^{m-k-1} H_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_\xi - \int_D H_{2m}(x, \xi) \Delta^m u d\xi.$$

Умножая найденное равенство на $(-1)^m / \omega_n$ и складывая его с измененным равенством (16) ($E_{2m}(x, \xi)$ заменено на $\mathcal{E}_{2m}(x, \xi)$) будем иметь (15). Лемма доказана. $\square$

Исследуем поведение функции $\mathcal{G}_6(x, \xi)$ и ее производных при $\xi \in \partial S$ и $x \in S$.

Замечание 1. При $x \in S$ справедливо равенство $\mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$.

Действительно, поскольку

$$\left| \frac{x}{|x|} - \xi |x| \right|^2 = \left| \frac{x}{|x|} \right|^2 - 2 \frac{x \cdot \xi}{|x|} |x| + |x|^2 |\xi|^2 = 1 - 2x \cdot \xi + |x|^2 |\xi|^2 = \left| \frac{\xi}{|\xi|} - x |\xi| \right|^2,$$

то при $\xi \in \partial S$ имеем $|\frac{x}{|x|} - \xi |x|| = |x - \xi|$ и значит, в силу структуры $\mathcal{E}_{2k}(x, \xi)$, имеем $\mathcal{E}_{2k}^*(x, \xi) \equiv \mathcal{E}_{2k}\left(\frac{x}{|x|}, \xi |x|\right) = \mathcal{E}_{2k}(x, \xi)$. Поэтому из равенства (13), определяющего функцию $\mathcal{G}_6(x, \xi)$, при $\xi \in \partial S$ сразу следует доказываемое равенство.

В дальнейшем будет необходим следующий оператор $\Lambda u = \sum_{i=1}^n \xi_i u_{\xi_i}$, который обладает свойством $\Lambda u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}|_{\partial S}$.

Лемма 2. При $x \in S$ справедливо равенство $\frac{\partial \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu_\xi}|_{\xi \in \partial S} = 0$.

Доказательство. Вычислим $\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S}$. Из (13) находим

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = \Lambda_\xi (\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi))|_{\partial S} - \frac{|x|^2 - 1}{4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi)|_{\partial S}. \quad (17)$$

Пусть $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t > 0$ функция. Учитывая однородность оператора Λ и равенство $\Lambda(uv) = v\Lambda u + u\Lambda v$ нетрудно получить, что

$$\Lambda_\xi \varphi(|x - \xi|) = \frac{\varphi'(|x - \xi|)}{2|x - \xi|} \Lambda_\xi (|x|^2 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2) = \varphi'(|x - \xi|) \frac{|\xi|^2 - x \cdot \xi}{|x - \xi|} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned}\Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x|) &= \frac{\varphi'(|x/|x| - \xi|x|)}{2|x/|x| - |\xi x|} \Lambda_\xi (1 - 2x \cdot \xi + |x|^2 |\xi|^2) \\ &= \varphi'(|x/|x| - \xi|x|) \frac{|\xi|^2 |x|^2 - x \cdot \xi}{|x/|x| - \xi|x|}. \quad (19)\end{aligned}$$

Поэтому, поскольку $|\frac{x}{|x|} - \xi|x| = |x - \xi|$ при $\xi \in \partial S$, то с помощью (18) и (19) находим

$$\Lambda_\xi (\varphi(|x - \xi|) - \varphi(|x/|x| - \xi|x|))|_{\partial S} = (1 - |x|^2) \frac{\varphi'(|x - \xi|)}{|x - \xi|} \Big|_{\partial S}. \quad (20)$$

В формуле (17) рассмотрим разные случаи в зависимости от $n \geq 2$.

1⁰. Пусть $n \notin \mathbb{N}_3^c = \{2, 4, 6\}$. В соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = \frac{t^{6-n}}{8(n-2)(n-4)(n-6)}$ найдем

$$\Lambda_\xi (\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi))|_{\partial S} = \frac{|x - \xi|^{4-n}}{8(n-2)(n-4)} (|x|^2 - 1).$$

С помощью (11) вычислим

$$\frac{|x|^2 - 1}{4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = \frac{|x/|x| - \xi|x|^{4-n}}{8(n-2)(n-4)} (|x|^2 - 1).$$

Таким образом равенство (17) принимает вид

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = \frac{|x - \xi|^{4-n}|_{\partial S}}{8(n-2)(n-4)} (|x|^2 - 1) - \frac{|x/|x| - \xi|x|^{4-n}|_{\partial S}}{8(n-2)(n-4)} (|x|^2 - 1) = 0.$$

2⁰. Пусть $n = 6$. Тогда, в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = -\frac{1}{64} \ln t$ получим

$$\Lambda_\xi (\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi))|_{\partial S} = \frac{|x|^2 - 1}{64|x - \xi|^2}.$$

Поскольку $6 \notin \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$, то согласно (11) при $n = 6$ выводим

$$\frac{|x|^2 - 1}{4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = \frac{|x/|x| - \xi|x|^{-2}|x|^2 - 1}{2 \cdot 4 \cdot 2} \frac{|x|^2 - 1}{4} = \frac{|x|^2 - 1}{64|x/|x| - |\xi x|^2}.$$

Следовательно равенство (17) при $n = 6$ принимает вид

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = \frac{|x|^2 - 1}{64|x - \xi|^2|_{\partial S}} - \frac{|x|^2 - 1}{64|x/|x| - |\xi x|^2|_{\partial S}} = 0.$$

3⁰. Пусть $n = 4$. Тогда, в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = \frac{1}{32}(t^2 \ln t - \frac{1}{2}t^2)$ получим

$$\Lambda_\xi (\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi))|_{\partial S} = \frac{\ln |x - \xi|}{16} (1 - |x|^2).$$

Поскольку $4 \in \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$, то по (11) при $n = 4$ находим

$$\frac{|x|^2 - 1}{4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = -\frac{1}{4} \ln |x/|x| - \xi|x| \frac{|x|^2 - 1}{4}.$$

Следовательно равенство (17) принимает вид

$$\Lambda_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = \frac{1 - |x|^2}{16} (\ln |x - \xi| |_{\partial S} - \ln |x/|x| - \xi|x|| |_{\partial S}) = 0.$$

⁴⁰. Пусть $n = 2$. Тогда, опять в соответствии с (12) и (20) при $\varphi(t) = -\frac{1}{64}(t^4 \ln t - \frac{3}{4}t^4)$ и с учетом того, что $\varphi'(t) = -\frac{1}{64}(4t^3 \ln t - 2t^3)$, получим

$$\Lambda_{\xi}(\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi))|_{\partial S} = \frac{|x - \xi|^2}{16} \left(\ln |x - \xi| - \frac{1}{2} \right) (|x|^2 - 1).$$

Из (11) при $n = 2$ находим

$$\frac{|x|^2 - 1}{4} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = \frac{|x|^2 - 1}{4} \frac{|x/|x| - \xi|x||^2}{4} \left(\ln |x/|x| - \xi|x|| - \frac{1}{2} \right).$$

Следовательно равенство (17) и в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= \frac{|x|^2 - 1}{16} \left(|x - \xi|^2 \left(\ln |x - \xi| - \frac{1}{2} \right) |_{\partial S} \right. \\ &\quad \left. - |x/|x| - \xi|x||^2 \left(\ln |x/|x| - \xi|x|| - \frac{1}{2} \right) |_{\partial S} \right) = 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Неожиданное свойство функции Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$.

Лемма 3. При $x \in S$ и $n \geq 2$ справедливо равенство $\Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = 0$.

Доказательство. Для функции $\mathcal{G}_6(x, \xi)$ из (13) вычислим по частям значение $\Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)$. Рассмотрим разные случаи в зависимости от $n \geq 2$.

¹⁰. Пусть $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$. В силу (10) имеем $\mathcal{E}_6(x, \xi) = E_6(x, \xi)$ и $\mathcal{E}_4(x, \xi) = E_4(x, \xi)$, а значит по (8) получим $\Delta_{\xi} \mathcal{E}_6(x, \xi) = -\mathcal{E}_4(x, \xi)$. Кроме того нетрудно видеть, что

$$\Delta_{\xi} \mathcal{E}_6^*(x, \xi) = \Delta_{\xi} \mathcal{E}_6(x/|x|, \xi|x|) = -|x|^2 \mathcal{E}_4(x/|x|, \xi|x|) = -|x|^2 \mathcal{E}_4^*(x, \xi).$$

Значит имеем

$$\Delta_{\xi}(\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi)) = -\mathcal{E}_4(x, \xi) + \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + (|x|^2 - 1)\mathcal{E}_4^*(x, \xi). \quad (21)$$

Пусть опять $\varphi(t)$ – некоторая дифференцируемая при $t > 0$ функция. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}(\varphi(|\xi|^2) E_{2k}^*(x, \xi)) \\ = E_{2k}^*(x, \xi) \Delta_{\xi} \varphi(|\xi|^2) + 4\varphi'(|\xi|^2) \Lambda_{\xi} E_{2k}^*(x, \xi) - |x|^2 \varphi(|\xi|^2) E_{2k-2}^*(x, \xi). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \varphi(|\xi|^2) &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\xi_i \varphi'(|\xi|^2)) = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi'(|\xi|^2) + 2\xi_i^2 \varphi''(|\xi|^2)) \\ &= 2n\varphi'(|\xi|^2) + 4|\xi|^2 \varphi''(|\xi|^2), \quad (22) \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi}(\varphi(|\xi|^2)E_{2k}^*(x, \xi)) &= (4|\xi|^2\varphi''(|\xi|^2) \\ &+ \varphi'(|\xi|^2)(2n + 4\Lambda_{\xi}))E_{2k}^*(x, \xi) - |x|^2\varphi(|\xi|^2)E_{2k-2}^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (23)$$

Поэтому при $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$ и $k=2$, учитывая что в нашем случае $E_4^* = \mathcal{E}_4^*$, получим

$$\Delta_{\xi} \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = (n + 2\Lambda_{\xi})\mathcal{E}_4^*(x, \xi) - |x|^2 \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \quad (24)$$

Если же $\varphi(t) = \frac{1}{4}(t-1)^2$ и $k=1$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) &= (2|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(2\Lambda_{\xi} + n))\mathcal{E}_2^*(x, \xi) \\ &= (|\xi|^2 - 1)(2\Lambda_{\xi} + n + 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) + 2\mathcal{E}_2^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, с помощью (21), (24) и (25), получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi) &= -\mathcal{E}_4(x, \xi) + \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + (|x|^2 - 1)\mathcal{E}_4^*(x, \xi) \\ &\quad - \frac{|x|^2 - 1}{4} \left((2\Lambda_{\xi} + n)\mathcal{E}_4^*(x, \xi) - |x|^2 \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right) \\ &\quad - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{16} (|\xi|^2 - 1)(2\Lambda_{\xi} + n + 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= \\ &= - \frac{|x|^2 - 1}{4} \left((2\Lambda_{\xi} + n - 4)\mathcal{E}_4^*(x, \xi) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right) \Big|_{\partial S}. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразуем это равенство. По формуле (19) при $\varphi(t) = \frac{1}{2(n-2)(n-4)}t^{4-n}$ найдем

$$\begin{aligned} 2\Lambda_{\xi} \mathcal{E}_4^*(x, \xi) &= \\ &= - \frac{|x/|x| - |x|\xi|^{2-n}}{n-2} (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) = \frac{1}{2}(2x \cdot \xi - 2|\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi), \end{aligned} \quad (28)$$

а также учтем, что

$$\begin{aligned} (n-4)\mathcal{E}_4^*(x, \xi) &= \\ &= \frac{1}{2(n-2)}|x/|x| - |x|\xi|^{4-n} = \frac{1}{2}(1 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2|x|^2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом можем записать

$$(2\Lambda_{\xi} + n - 4)\mathcal{E}_4^*(x, \xi)|_{\partial S} = -\frac{1}{2}(|x|^2 - 1)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}$$

и следовательно равенство (27) примет вид

$$\Delta_{\xi} \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2 - 1}{4} \left(-\frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right) \Big|_{\partial S} = 0.$$

2⁰. Пусть $n = 4$, тогда, в соответствии с (10), находим

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6(x, \xi) = \Delta_\xi E_6(x, \xi) + \frac{1}{4} \Delta_\xi \frac{|x - \xi|^2}{32} = -\mathcal{E}_4(x, \xi) + \frac{1}{16}$$

и аналогично этому

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6^*(x, \xi) = \Delta_\xi E_6^*(x, \xi) + \frac{1}{4} \Delta_\xi \frac{1 - 2x \cdot \xi + |\xi|^2 |x|^2}{32} = -|x|^2 \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + \frac{|x|^2}{16}.$$

На основании полученных равенств запишем формулу, аналогичную (21)

$$\Delta_\xi (\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi)) = -\mathcal{E}_4(x, \xi) + \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + (|x|^2 - 1) \left(\mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{1}{16} \right).$$

Равенства (24) и (25) остаются в силе при $n = 4$ и поэтому, аналогично (27), получим

$$\Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2 - 1}{4} \left(\frac{1}{4} + 2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x, \xi) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right)|_{\partial S}. \quad (30)$$

По формуле (19) при $\varphi(t) = -\frac{1}{4} \ln t$ найдем

$$2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = -\frac{|x/|x| - |x|\xi|^{-2}}{2} (|\xi|^2 |x|^2 - x \cdot \xi) = (x \cdot \xi - |\xi|^2 |x|^2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

Подставляя найденное значение $2\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x, \xi)$ в (30) и учитывая при этом, что

$$\frac{1}{4} = \frac{1 - 2x \cdot \xi + |x|^2}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}$$

получим необходимое равенство

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= -\frac{|x|^2 - 1}{8} (1 - 2x \cdot \xi + |x|^2 + 2(x \cdot \xi - |\xi|^2 |x|^2) \\ &\quad + |x|^2 - 1) \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = -\frac{|x|^2 - 1}{8} (2|x|^2 - 2|\xi|^2 |x|^2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

3⁰. Пусть $n = 2$. Тогда, в соответствии с (10) и учитывая, что согласно (22) $\Delta_\xi |x - \xi|^4 = 4(n + 2)|x - \xi|^2 = 16|x - \xi|^2$, получим

$$\Delta_\xi \mathcal{E}_6(x, \xi) = \Delta_\xi E_6(x, \xi) - \frac{3}{4} \Delta_\xi \frac{|x - \xi|^4}{64} = -E_4(x, \xi) - \frac{3|x - \xi|^2}{16}$$

и соответственно этому найдем

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \mathcal{E}_6^*(x, \xi) &= \Delta_\xi E_6^*(x, \xi) - \frac{3}{4} \Delta_\xi \frac{|x/|x| - \xi||^4}{64} = \\ &= -|x|^2 E_4^*(x, \xi) - |x|^2 \frac{3|x/|x| - \xi||^2}{16}. \end{aligned}$$

На основании этих равенств получим следующие равенства на ∂S

$$\begin{aligned} \Delta_\xi(\mathcal{E}_6(x, \xi) - \mathcal{E}_6^*(x, \xi)) &= -E_4(x, \xi) + E_4^*(x, \xi) \\ &+ \frac{3}{16}(|x/|x| - \xi|x||^2 - |x - \xi|^2) + (|x|^2 - 1) \left(E_4^*(x, \xi) \right. \\ &\left. + \frac{3|x/|x| - \xi|x||^2}{16} \right) = \frac{|x|^2 - 1}{16} (16E_4^*(x, \xi) + 3|x/|x| - \xi|x||^2) \\ &= \frac{|x|^2 - 1}{16} (16\mathcal{E}_4^*(x, \xi) + |x/|x| - \xi|x||^2). \end{aligned} \quad (31)$$

Учитывая формулу (23) при $\varphi(t) = (t - 1)/2$ и $k = 2$, вычислим

$$\Delta_\xi \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_4^*(x, \xi)|_{\partial S} = 2(\Lambda_\xi + 1) \mathcal{E}_4^*(x, \xi)|_{\partial S} \quad (32)$$

и аналогично этому при $\varphi(t) = (t - 1)^2/4$ и $k = 1$ найдем

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \frac{(|\xi|^2 - 1)^2}{4} \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} \\ = 2(|\xi|^2 + (|\xi|^2 - 1)(\Lambda_\xi + 1)) \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = 2\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, используя (13) и с помощью (31)-(33), получаем

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= \frac{|x|^2 - 1}{16} (16\mathcal{E}_4^*(x, \xi) + |x/|x| - \xi|x||^2) \\ &- \frac{|x|^2 - 1}{2} (\Lambda_\xi + 1) \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \\ &- \frac{|x|^2 - 1}{16} \left(8(\Lambda_\xi - 1) \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - |x/|x| - \xi|x||^2 + 2(|x|^2 - 1) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right). \end{aligned}$$

Далее, по формуле (19) при $\varphi(t) = \frac{t^2}{4}(\ln t - 1/2)$ и учитывая при этом, что $\mathcal{E}_2(x, \xi) = -\ln|x - \xi|$, будем иметь

$$\begin{aligned} 8\Lambda_\xi \mathcal{E}_4^*(x, \xi)|_{\partial S} &= 4(|x|^2 - x \cdot \xi) \ln|x/|x| - \xi|x|| = 4(x \cdot \xi - |x|^2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi), \\ 8\mathcal{E}_4^*(x, \xi) &= -2|x/|x| - \xi|x||^2 \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - |x/|x| - \xi|x||^2. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом этого, из предыдущего равенства, выводим

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= -\frac{|x|^2 - 1}{8} (\mathcal{E}_2^*(x, \xi)(2x \cdot \xi - 2|x|^2 + |x/|x| - \xi|x||^2) \\ &+ (|x|^2 - 1) \mathcal{E}_2^*(x, \xi)) = -\frac{|x|^2 - 1}{8} \mathcal{E}_2^*(x, \xi)(1 - |x|^2 + |x|^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом утверждение леммы доказано при всех $n \geq 2$. $\square$

Теперь, с помощью лемм 1-3 найдем представление решения задачи (1)-(2).

Теорема 1. Если решение задачи (1)-(2) существует, то оно может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(-\frac{\partial \Delta^2 \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_0(\xi) + \Delta^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) \varphi_1(\xi) - \frac{\partial \Delta \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu} \varphi_2(\xi) \right) ds_\xi \\ &\quad - \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_6(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (34) \end{aligned}$$

где функция Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$ определена в (13).

Доказательство. Пусть $u \in C^6(S) \cap C^5(\bar{S})$ – решение задачи (1)-(2). К этой функции применима лемма 1. Поэтому из (15) при $m = 3$ вытекает следующее равенство

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(-\frac{\partial \Delta^2 \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu} u + \Delta^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta u + \Delta \mathcal{G}_6(x, \xi) \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^2 u + \mathcal{G}_6(x, \xi) \frac{\partial \Delta^2 u}{\partial \nu} \right) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_6(x, \xi) \Delta^3 u(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Если к полученному равенству применить замечание 1, леммы 2 и 3, а также воспользоваться граничными значениями (2) решения $u(x)$ и значением правой части уравнения (1), то получим равенство (34). $\square$

4 Структура решения задачи

Теорема 1 дает представление решения задачи (1)-(2), если оно существует. Следующее утверждение устанавливает существование решения. Решение будем строить не из класса $u \in C^6(S) \cap C^5(\bar{S})$, как в теореме 1, а такое, что $\Delta^3 u \in C(S)$ и $u, \Delta u, \Delta u \in C(\bar{S})$.

Теорема 2. Функция $u(x)$, определяемая из равенства (34) при $\varphi_k \in C^{2-k+\varepsilon}(\partial S)$, $k = 0, 1, 2$ и $f \in C(\bar{S})$, является решением задачи (1)-(2).

Доказательство теоремы 2 приведем в конце этого раздела, а сейчас исследуем правую часть формулы (34) по частям. Сначала рассмотрим последний интеграл из (34).

Лемма 4. Функция вида

$$u_f(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{G}_6(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

при $f \in C(\bar{S})$ является решением неоднородного уравнения (1) и удовлетворяет однородным граничным условиями (2).

Доказательство. Из [15, теорема 2] при $f \in C(\bar{S})$ и $m = 3$ следует, что $\Delta^3 u_f(x) = f(x)$ в S и все нормальные производные функции Грина

$\mathcal{G}_6(x, \xi)$ до второго порядка, включительно, обращаются в 0 когда $x \in \partial S$. Это, в частности, значит, что

$$\mathcal{G}_6(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_6(x, \xi)}{\partial \nu}|_{x \in \partial S} = 0.$$

Из леммы 3, в силу симметричности функции $\mathcal{G}_2(x, \xi)$, следует, что $\Delta_x \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{x \in \partial S} = 0$ при $\xi \in S$. Поэтому функция $u_f(x)$ удовлетворяет также всем трем однородным граничным условиям (2). Лемма доказана. $\square$

Для дальнейшего доказательства теоремы 2 установим некоторые дополнительные свойства функции Грина $\mathcal{G}_6(x, \xi)$. Заметим, что верно равенство $\Lambda u|_{\partial S} = \frac{\partial u}{\partial \nu_\xi}|_{\partial S}$, которое было использовано в лемме 2 и которое мы будем также применять дальше.

Лемма 5. 1) При $x \in S$ и $n \geq 3$ справедливо равенство

$$(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}. \quad (35)$$

2) Для $n \geq 2$ имеет место следующее свойство $\Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x \mathcal{E}_2^*(x, \xi)$. Более того $\Lambda_\xi^k \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \Lambda_x^{k-1} \Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi)$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. 1) В соответствии с (19) при $\varphi(t) = \frac{t^{2-n}}{n-2}$ найдем

$$\begin{aligned} & (2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} \\ &= -\frac{2|x|^2 - 2x \cdot \xi}{|x/|x| - \xi|x||^n} + \frac{1 - 2x \cdot \xi + |x|^2}{|x/|x| - \xi|x||^n}|_{\partial S} = \frac{1 - |x|^2}{|x/|x| - \xi|x||^n}|_{\partial S}. \end{aligned}$$

В тоже время, по формуле (20), также при $\varphi(t) = \frac{t^{2-n}}{n-2}$, получим

$$\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S} = \Lambda_\xi (\mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi))|_{\partial S} = -\frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^n}|_{\partial S}.$$

Сравнивая полученные выше равенства убеждаемся в верности (35).

2) Пусть $\varphi \in C^k(0, \infty)$. Докажем, что для $k \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = \Lambda_x^k \varphi(|x/|x| - \xi|x||). \quad (36)$$

Из (19) следует

$$\Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x||) = (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) \frac{\varphi'(|x/|x| - \xi|x||)}{|x/|x| - \xi|x||}.$$

Поскольку $|x/|x| - \xi|x|| = |\xi/|\xi| - x|\xi||$ (замечание 1), то меняя местами x и ξ найдем

$$\begin{aligned} \Lambda_x \varphi(|x/|x| - \xi|x||) &= \Lambda_x \varphi(|\xi/|\xi| - x|\xi||) \\ &= (|x|^2|\xi|^2 - \xi \cdot x) \frac{\varphi'(|\xi/|\xi| - x|\xi||)}{|\xi/|\xi| - x|\xi||} = \Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x||). \end{aligned}$$

Равенство (36) доказано для $k = 1$ и произвольной $\varphi(t)$. Предположим, что (36) верно при некотором $k - 1$. Тогда, обозначая $F(t) = \varphi'(t)/t$ и используя свойства Λ_ξ , будем иметь

$$\begin{aligned}\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x|) &= \Lambda_\xi^{k-1} ((|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) F(|x/|x| - \xi|x|)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Lambda_\xi^i (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) \Lambda_\xi^{k-1-i} F(|x/|x| - \xi|x|).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $i \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_\xi^i (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) = 2^i |\xi|^2 |x|^2 - x \cdot \xi = \Lambda_x^i (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi).$$

Учитывая это равенство и предположение индукции получим

$$\begin{aligned}\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x|) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \Lambda_x^i (|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi) \Lambda_x^{k-1-i} F(|x/|x| - \xi|x|) \\ &= \Lambda_x^k \varphi(|x/|x| - \xi|x|).\end{aligned}$$

Шаг индукции доказан. Поскольку $\mathcal{E}_2^*(x, \xi)$ — функция класса $C^\infty(0, \infty)$ от аргумента $|x/|x| - \xi|x|$, то из (36) при $k = 1$ получаем первое равенство из второго пункта утверждения леммы. Далее, поскольку по (36)

$$\begin{aligned}\Lambda_\xi^k \varphi(|x/|x| - \xi|x|) &= \Lambda_x^k \varphi(|x/|x| - \xi|x|) \\ &= \Lambda_x^{k-1} \Lambda_x \varphi(|x/|x| - \xi|x|) = \Lambda_x^{k-1} \Lambda_\xi \varphi(|x/|x| - \xi|x|),\end{aligned}$$

то второе равенство следует отсюда при $\varphi(|x/|x| - \xi|x|) = \mathcal{E}_2^*(x, \xi)$. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $u_\psi(x)$ — решение гармонической задачи Дирихле в S при условии $u|_{\partial S} = \psi(s)$. Тогда при $x \in S$ и $n \geq 3$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) ds_\xi = u_\psi(x). \quad (37)$$

Доказательство. Известно, что

$$u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{G}_2(x, \xi)}{\partial \nu} \psi(\xi) ds_\xi.$$

Имея это в виду, умножая равенство (35) на $\frac{1}{\omega_n} \psi(\xi)$ и интегрируя по ∂S при $x \in S$, получим доказываемое равенство (37). $\square$

Теперь рассмотрим оставшиеся члены из правой части формулы (34), определяющей функцию $u(x)$, которые обозначим $u_n(x)$

$$u_n(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(-\varphi_0(\xi) \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) + \varphi_1(\xi) \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) - \varphi_2(\xi) \Lambda_\xi \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) \right) ds_\xi. \quad (38)$$

Лемма 6. При $x \in S$ имеет место равенство

$$-\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_2(\xi) \Lambda_\xi \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) d\xi = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} u_{\varphi_2}(x). \quad (39)$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$.

Вычислим значение $\Lambda_\xi \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi)$. Из (26) нетрудно получить

$$\begin{aligned} \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) &= -\mathcal{E}_4(x, \xi) + \mathcal{E}_4^*(x, \xi) \\ &\quad - \frac{|x|^2 - 1}{4} \left((2\Lambda_\xi + n - 4) \mathcal{E}_4^*(x, \xi) - |x|^2 \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right) \\ &\quad - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{16} (|\xi|^2 - 1) (2\Lambda_\xi + n + 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi). \end{aligned} \quad (40)$$

Будем вычислять значения оператора Λ_ξ от каждого слагаемого в равенстве справа сначала без множителей, не зависящих от ξ . Эти множители мы учтем потом, при суммировании всех слагаемых.

1) С помощью (18) и (19) найдем

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi(\varphi(|x - \xi|) - \varphi(|x|/|x| - |x|\xi|)) \\ = \varphi'(|x - \xi|) \frac{|\xi|^2 - x \cdot \xi}{|x - \xi|} - \varphi'(|x|/|x| - \xi|x|) \frac{|\xi|^2|x|^2 - x \cdot \xi}{|x|/|x| - \xi|x|} \end{aligned}$$

и значит

$$\Lambda_\xi(\varphi(|x - \xi|) - \varphi(|x|/|x| - |x|\xi|))|_{\partial S} = (1 - |x|^2) \frac{\varphi'(|x - \xi|)}{|x - \xi|} \Big|_{\partial S}. \quad (41)$$

Поэтому при $\varphi(t) = \frac{t^{4-n}}{2(n-2)(n-4)}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi(-\mathcal{E}_4(x, \xi) + \mathcal{E}_4^*(x, \xi))|_{\partial S} \\ = \frac{|x - \xi|^{2-n}}{2(n-2)} \Big|_{\partial S} (1 - |x|^2) = -\frac{|x|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}. \end{aligned}$$

2) Из равенств (28) и (29) следует, что

$$(2\Lambda_\xi + n - 4) \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = \frac{1}{2} (1 - |\xi|^2|x|^2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi),$$

а значит

$$\Lambda_\xi(2\Lambda_\xi + n - 4) \mathcal{E}_4^*(x, \xi) = -|\xi|^2|x|^2 \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{1}{2} (|\xi|^2|x|^2 - 1) \Lambda_\xi \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

3) Далее найдем

$$\Lambda_\xi |x|^2 \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = |x|^2 \mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}.$$

4) Наконец вычислим значение оператора Λ_ξ от функции во всей второй строчке

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \left(-\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{16} (|\xi|^2 - 1)(2\Lambda_\xi + n + 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) \right) |_{\partial S} \\ = -\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (3\Lambda_\xi + n + 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) |_{\partial S}. \end{aligned}$$

Складывая результаты, полученные в случаях 1)-4), умноженные на соответствующие множители и приводя подобные члены, будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) |_{\partial S} = & \left(-\frac{|x|^2 - 1}{2} - \frac{|x|^2 - 1}{4} \left(-|x|^2 - \frac{1}{2}(|x|^2 - 1)\Lambda_\xi - |x|^2 \right) \right. \\ & \left. - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (3\Lambda_\xi + n + 2) \right) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = -\frac{|x|^2 - 1}{8} \left(4 - 2|x|^2 - (|x|^2 - 1)\Lambda_\xi - 2|x|^2 \right. \\ & \left. + (|x|^2 - 1)(3\Lambda_\xi + n + 2) \right) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) |_{\partial S} = -\frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) |_{\partial S}. \end{aligned}$$

При $x \in S$ функции, в полученном равенстве, не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая его на $-\frac{1}{\omega_n} \varphi_2(\xi)$ и интегрируя по $\xi \in \partial S$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_2(\xi) \Lambda_\xi \Delta_\xi \mathcal{G}_6(x, \xi) d\xi \\ = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_2(\xi) (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Если теперь воспользоваться формулой (37), то получим (39). Доказательство случаев $n = 2, 4$ нетрудно получить аналогично. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2. Пусть $\varphi_2 \in C^\varepsilon(\partial S)$, где $\varepsilon > 0$, тогда для $\mathcal{E}$ -гармонической функции

$$u_2(x) = \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} u_{\varphi_2}(x)$$

из леммы 6 справедливы равенства

$$u_2|_{\partial S} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad \Delta u_2|_{\partial S} = \varphi_2. \quad (42)$$

Доказательство. Сначала заметим, что умножение гармонической функции $u_{\varphi_2}(x)$ на полином вида $|x|^{2k-2}$ делает ее k -гармонической функцией. Далее, согласно [42, лемма 2.7], для того, чтобы гармоническая в S функция $u_{\varphi_2}(x)$ имела гладкость $u_{\varphi_2} \in C^k(\bar{S})$, достаточно потребовать, чтобы $\varphi_2 \in C^{k+\varepsilon}(\partial S)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Теперь рассмотрим граничные условия (42) для $u_2(x)$. Первое равенство очевидно, а второе верно, если $(|x|^2 - 1)^2 \Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S} = 0$. Третье равенство из (42) также выполнено при некотором условии. Укажем его. По формуле, аналогичной (23), запишем

$$\Delta(\varphi(|x|^2)h(x)) = (4|x|^2\varphi''(|x|^2) + \varphi'(|x|^2)(2n + 4\Lambda))h(x), \quad (43)$$

где $h(x)$ – гармоническая функция. При $\varphi(t) = \frac{1}{8}(t - 1)^2$ будем иметь

$$\Delta \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} u_{\varphi_2}(x)|_{\partial S} = \left(|x|^2 + \frac{|x|^2 - 1}{4}(2n + 4\Lambda) \right) u_{\varphi_2}(x)|_{\partial S} = \varphi_2.$$

Здесь мы использовали условие, похожее на сделанное выше $(|x|^2 - 1)\Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S} = 0$. Для исследования выполнимости указанных условий на поведение функции $u_{\varphi_2}(x)$ возле границы ∂S воспользуемся [42, лемма 2.2]. В силу этой леммы для всякой гармонической функции $h \in C^\varepsilon(\bar{S})$ верно неравенство

$$|(1 - |x|)^l \Lambda^l h(x)| \leq C(1 - |x|)^\varepsilon, \quad (44)$$

где $l \in \mathbb{N}$, $x \in S$ и $C > 0$ – некоторая константа. Так как $\varphi_2 \in C^\varepsilon(\partial S)$, то $u_{\varphi_2} \in C^\varepsilon(\bar{S})$ (быть может при несколько меньшем ε), а значит условие $(|x|^2 - 1)^2 \Lambda u_{\varphi_2}|_{\partial S} = 0$ выполнено и поэтому граничные условия для u_2 тоже удовлетворяются. Замечание доказано. $\square$

Лемма 7. *При $x \in S$ имеет место равенство*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_1(\xi) \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) d\xi \\ = \frac{|x|^2 - 1}{2} u_{\varphi_1}(x) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda + n) u_{\varphi_1}(x). \end{aligned} \quad (45)$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$. Воспользуемся формулой (40). Применим оператор Δ_ξ к обеим частям этого равенства и используем равенство, аналогичное (21), которое при указанных n верно

$$\Delta_\xi(\mathcal{E}_4(x, \xi) - \mathcal{E}_4^*(x, \xi)) = -\mathcal{E}_2(x, \xi) + \mathcal{E}_2^*(x, \xi) + (|x|^2 - 1)\mathcal{E}_2^*(x, \xi),$$

а также равенство аналогичное (24)

$$\Delta_\xi \frac{|\xi|^2 - 1}{2} \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = (n + 2\Lambda_\xi) \mathcal{E}_2^*(x, \xi).$$

Имея в виду, что оператор Λ_ξ сохраняет гармоничность функции и справедливо равенство $\Delta_\xi \Lambda_\xi = (\Lambda_\xi + 2)\Delta_\xi$, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) &= \mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - (|x|^2 - 1)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) - |x|^2(|x|^2 - 1)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) \\ &+ |x|^2 \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda_\xi + n + 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda_\xi + n)(2\Lambda_\xi + n + 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) \\ &= \mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi) + \left(\frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda_\xi + n - 2) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (-4(2\Lambda_\xi + n) \right. \\ &\quad \left. + (2\Lambda_\xi + n)(2\Lambda_\xi + n + 2)) \right) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) = \mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \\ &\times (2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda_\xi + n)(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi). \quad (46) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} \\ &= \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda_\xi + n)(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S}. \end{aligned}$$

Из первого и второго утверждений леммы 5 вытекает, что

$$(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = -\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}$$

$$\begin{aligned} &(2\Lambda_\xi + n)(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} \\ &= (2\Lambda_x + n)(2\Lambda_\xi + n - 2)\mathcal{E}_2^*(x, \xi)|_{\partial S} = -(2\Lambda_x + n)\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}. \end{aligned}$$

В силу этих равенств можем записать

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} \\ &= -\frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S} + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda_x + n)\Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}. \quad (47) \end{aligned}$$

При $x \in S$ слагаемые из (47) не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая (47) на $\frac{1}{\omega_n} \varphi_1(\xi)$, затем интегрируя по $\xi \in \partial S$ и учитывая, что $u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi$, нетрудно получить доказываемое равенство (45). Лемма доказана. $\square$

Замечание 3. Пусть $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$, тогда для $\mathcal{E}$ -гармонической функции

$$u_1(x) = \frac{|x|^2 - 1}{2} u_{\varphi_1}(x) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda + n) u_{\varphi_1}(x)$$

из леммы 7 справедливы равенства

$$u_1|_{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_1, \quad \Delta u_1|_{\partial S} = 0. \quad (48)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $u_{\varphi_1} \in C^{1+\varepsilon}(\bar{S})$. Поэтому, в силу (44), первое равенство из (48) выполняется. Поскольку в силу (44) имеем $(|x|^2 - 1)^2 \Lambda^2 u_{\varphi_1}(x)|_{\partial S} = 0$, то и второе равенство из (48) также выполнено

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \Lambda u_1(x)|_{\partial S} = \left(|x|^2 u_{\varphi_1}(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda u_{\varphi_1}(x) \right. \\ &\quad \left. - |x|^2 \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda + n) u_{\varphi_1}(x) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \Lambda (2\Lambda + n) u_{\varphi_1}(x) \right) \Big|_{\partial S} = \varphi_1. \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством (43) при $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t - 1)$ и $\varphi(t) = \frac{1}{8}(t - 1)^2$ и учтем при этом, что оператор Λ сохраняет гармоничность функции. Будем иметь

$$\Delta u_1(x) = \frac{1}{2}(2n + 4\Lambda)u_{\varphi_1}(x) - \left(|x|^2 + \frac{|x|^2 - 1}{4}(2n + 4\Lambda) \right) (2\Lambda + n)u_{\varphi_1}(x).$$

Поскольку $\Lambda u_{\varphi_1} \in C^\varepsilon(\bar{S})$, то тогда в силу равенства (44) имеем $(|x|^2 - 1)\Lambda(\Lambda u_{\varphi_1}(x))|_{\partial S} = 0$. Учитывая это получаем

$$\Delta u_1(x)|_{\partial S} = (n + 2\Lambda)u_{\varphi_1}(x) - (2\Lambda + n)u_{\varphi_1}(x) = 0.$$

Замечание доказано. $\square$

Лемма 8. При $x \in S$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_0(\xi) \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) d\xi \\ & = u_{\varphi_0}(x) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda u_{\varphi_0}(x) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda^2 + n\Lambda) u_{\varphi_0}(x). \end{aligned} \quad (49)$$

Доказательство. Рассмотрим наиболее крупный случай, когда $n \notin \mathbb{N}_2^c = \{2, 4\}$. Воспользуемся формулой (46). Применим оператор Λ_ξ к обеим частям этого равенства:

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi) &= \Lambda_\xi (\mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi)) + \frac{|x|^2 - 1}{2} \\ &\times \Lambda_\xi (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi) - \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \Lambda_\xi (2\Lambda_\xi + n) (2\Lambda_\xi + n - 2) \mathcal{E}_2^*(x, \xi). \end{aligned}$$

Если здесь учесть известное равенство

$$\Lambda_\xi (\mathcal{E}_2(x, \xi) - \mathcal{E}_2^*(x, \xi))|_{\partial S} = \frac{|x|^2 - 1}{|x - \xi|^n} \Big|_{\partial S} = \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S},$$

которое следует из (41) при $\varphi(t) = \frac{t^{2-n}}{n-2}$, и оба утверждения леммы 5, то будем иметь

$$\begin{aligned} \Lambda_\xi \Delta_\xi^2 \mathcal{G}_6(x, \xi)|_{\partial S} &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_\xi + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \Lambda_\xi (2\Lambda_\xi + n) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S} \\ &= \left(1 - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda_x + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} \Lambda_x (2\Lambda_x + n) \right) \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi)|_{\partial S}. \end{aligned}$$

При $x \in S$ функции в этом равенстве не имеют особенностей по $\xi \in \partial S$. Поэтому, умножая это равенство на $-\frac{1}{\omega_n}\varphi_0(\xi)$, интегрируя по $\xi \in \partial S$, а также учитывая, что $u_\psi(x) = -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Lambda_\xi \mathcal{G}_2(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi$, нетрудно получить (49). Лемма доказана. $\square$

Замечание 4. Пусть $\varphi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$, тогда для 3-гармонической функции

$$u_0(x) = u_{\varphi_0}(x) - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda u_{\varphi_0}(x) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda^2 + n\Lambda) u_{\varphi_0}(x)$$

из леммы 8 справедливы равенства

$$u_0|_{\partial S} = \varphi_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Delta u_0|_{\partial S} = 0.$$

Доказательство. В силу [42, лемма 2.7] при $\varphi_0 \in C^{2+\varepsilon}(\partial S)$ имеем $u_{\varphi_0} \in C^{2+\varepsilon}(\bar{S})$. Поэтому, так как по (44) $(|x|^2 - 1)^k \Lambda^k u_{\varphi_0}(x)|_{\partial S} = 0$ при $k = 1, 2$, то первое равенство $u_0|_{\partial S} = \varphi_0$ выполнено. Второе равенство выполнено поскольку $\Lambda u_{\varphi_0} \in C^{1+\varepsilon}(\bar{S})$ и в силу (44) также имеем $(|x|^2 - 1)^k \Lambda^k (\Lambda u_{\varphi_0}(x))|_{\partial S} = 0$ при $k = 1, 2$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_0}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} \\ &= \Lambda u_0(x)|_{\partial S} = (\Lambda u_{\varphi_0}(x) - |x|^2 \Lambda u_{\varphi_0}(x))|_{\partial S} - \frac{|x|^2 - 1}{2} \Lambda (\Lambda u_{\varphi_0}(x))|_{\partial S} \\ &+ |x|^2 \frac{|x|^2 - 1}{2} (2\Lambda + n)(\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S}(x) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8} (2\Lambda^2 + n\Lambda)(\Lambda u_{\varphi_0})(x)|_{\partial S} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично сделанному в замечании 3, используя (43) при $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t-1)$ и $\varphi(t) = \frac{1}{8}(t-1)^2$ и учитывая сохранение оператором Λ гармоничности функции, найдем

$$\Delta u_0(x) = -\frac{1}{2}(2n+4\Lambda)\Lambda u_{\varphi_0}(x) + \left(|x|^2 + \frac{|x|^2 - 1}{4}(2n+4\Lambda)\right)(2\Lambda^2 + n\Lambda)u_{\varphi_0}(x).$$

Поскольку $\Lambda u_{\varphi_0} \in C^{1+\varepsilon}(\bar{S})$, $\Lambda^2 u_{\varphi_0} \in C^\varepsilon(\bar{S})$, то по (44) имеем

$$\begin{aligned} & (|x|^2 - 1)(\Lambda + n/2)^2 (\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S} = (|x|^2 - 1)\Lambda(\Lambda^2 u_{\varphi_0})|_{\partial S} \\ & + n(|x|^2 - 1)\Lambda(\Lambda u_{\varphi_0})|_{\partial S} + (n/2)^2(|x|^2 - 1)\Lambda(u_{\varphi_0})|_{\partial S} = 0 \end{aligned}$$

и значит, из предыдущего равенства следует, что

$$\Delta u_0(x)|_{\partial S} = -(n + 2\Lambda)\Lambda u_{\varphi_0}(x) + (2\Lambda^2 + n\Lambda)u_{\varphi_0}(x) = 0.$$

Замечание доказано. $\square$

Докажем основной результат.

Доказательство теоремы 2. Используя лемму 4 и формулу (38) перепишем равенство (34) в виде $u(x) = u_f(x) + u_n(x)$. В леммах 6-8 было доказано, что $u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x)$, где функции $u_i(x)$ определены в замечаниях 2-4. Далее в этих же замечаниях было установлено,

что каждая из функций $u_i(x)$ является решением такого частного случая задачи (1)-(2), что сумма функций $u_i(x)$ – функция $u_n(x)$, решает общую задачу (1)-(2) для однородного уравнения. Поэтому функция $u(x) = u_f(x) + u_n(x)$ из (34) является решением задачи (1)-(2). Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Решение задачи (1)-(2) можно представить в другом виде*

$$u(x) = u_f(x) + u_{\varphi_0}(x) + \frac{|x|^2 - 1}{2}(u_{\varphi_1}(x) - \Lambda u_{\varphi_0}(x)) + \frac{(|x|^2 - 1)^2}{8}(u_{\varphi_2}(x) - (2\Lambda + n)u_{\varphi_1}(x) + (2\Lambda^2 + n\Lambda)u_{\varphi_0}(x)), \quad (50)$$

где функция $u_f(x)$ определена в лемме 4, а функции $u_{\varphi_i}(x)$ являются решениями гармонических задач Дирихле в S при условии $u_{\varphi_i}|_{\partial S} = \varphi_i$, $i = 0, 1, 2$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – решение задачи (1)-(2), тогда по теореме 1 это решение имеет вид (34). В доказательстве теоремы 2 было отмечено, что $u(x) = u_f(x) + u_0(x) + u_1(x) + u_2(x)$, где функции $u_i(x)$ определены в замечаниях 2-4. Складывая функции $u_f(x)$ и $u_i(x)$ для $i = 0, 1, 2$ получим функцию из правой части (50). $\square$

Замечание 5. *Функция $u(x)$ из (50) является решением задачи (1)-(2) при всех $n \geq 2$.*

Пример 1. *Рассмотрим следующую простую задачу типа (1)-(2)*

$$\Delta^3 u(x) = a|x|^2, \quad x \in S; \quad u|_{\partial S} = c_0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial S} = c_1, \quad \Delta u|_{\partial S} = c_2, \quad (51)$$

где c_0, c_1, c_2 – константы. В работе [15, теорема 3] исследовалась функция Грина $\mathcal{G}_{2m}(x, \xi)$ задачи Дирихле. Было, в частности, установлено, что решение $u_f(x)$ при $f(x) = |x|^{2l} h_k(x)$, где $h_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k и $l, k \in \mathbb{N}_0$, имеет вид

$$\frac{|x|^{2l+6} - 1 - (l+3)(|x|^2 - 1) - \frac{1}{2}(l+2)(l+3)(|x|^2 - 1)^2}{(2l+2, 2)_3(2l+2k+n, 2)_3} h_k(x),$$

где символ $(a, b)_k$ определен в (7). Поэтому в случае $l = 1$ и $h_k(x) = a$ будем иметь

$$u_f(x) = d_n(|x|^8 - 1) - 4d_n(|x|^2 - 1) - 6d_n(|x|^2 - 1)^2,$$

где $1/d_n = 192(n+2)(n+4)(n+6)/a$. Ясно, что $u_{\varphi_i}(x) = c_i$ и поэтому из (50) найдем

$$u(x) = c_0 + (c_1/2 - 4d_n)(|x|^2 - 1) + ((c_2 - nc_1)/8 - 6d_n)(|x|^2 - 1)^2 + d_n(|x|^8 - 1).$$

Нетрудно убедиться, что полученная функция – решение задачи (51).

References

- [1] H. Begehr, *Biharmonic Green functions*, *Matematiche*, **61**:2 (2006), 395–405. Zbl 1135.31001
- [2] H. Begehr, T. Vaitekhovich, *Modified harmonic Robin function*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **58**:4 (2013), 483–496. Zbl 1272.31003
- [3] M.A. Sadybekov, B.T. Torebek, B.Kh. Turmetov, *On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle*, *Adv. Pure Appl. Math.*, **6**:3 (2015), 163–172. Zbl 1317.35025
- [4] V.V. Karachik, B.Kh. Turmetov, *On Greens function of the Robin problem for the Poisson equation*, *Adv. Pure Appl. Math.*, **10**:3 (2019), 203–214. Zbl 1426.35093
- [5] Y. Wang, L. Ye, *Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **58**:1 (2013), 7–22. Zbl 1266.30026
- [6] Y. Wang, *Tri-harmonic boundary value problems in a sector*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **59**:5 (2014), 732–749. Zbl 1295.31012
- [7] V. Karachik, *Green's functions of some boundary value problems for the biharmonic equation*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **67**:7 (2022), 1712–1736. Zbl 1492.31005
- [8] V. Karachik, B. Turmetov, H. Yuan, *Four boundary value problems for a nonlocal biharmonic equation in the unit ball*, *Mathematics*, **10**:7 (2022), Article ID 1158.
- [9] V.V. Karachik, *The Green function of the Dirichlet problem for the triharmonic equation in the ball*, *Math. Notes*, **107**:1 (2020), 105–120. Zbl 1442.35084
- [10] V.V. Karachik, N.A. Antropova, *On polynomial solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic equation in a ball*, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **15**:2 (2012), 86–98. Zbl 1324.35017
- [11] V.V. Karachik, *Polynomial solutions to Dirichlet boundary value problem for the 3-harmonic equation in a ball*, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, **5**:4 (2012), 527–546.
- [12] T. Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m*, *Palermo Rend.*, **20** (1905), 97–135. JFM 36.0827.01
- [13] H. Begehr, T.N.H. Vu, Z.-X. Zhang, *Polyharmonic Dirichlet problems*, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **255** (2006), 13–34. Zbl 1351.30033
- [14] T.Sh. Kalmenov, B.D. Koshanov, M.Y. Nemchenko, *Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **53**:2 (2008), 177–183. Zbl 1157.31004
- [15] V.V. Karachik, *On Green function of the Dirichlet problem for polyharmonic equation in the ball*, *Axioms*, **12**:6 (2023), Article ID 543.
- [16] V.V. Karachik, *Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball*, *Mathematics*, **9**:16 (2021), Article ID 1907.
- [17] V.V. Karachik, *Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in a ball*, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:7 (2014), 1122–1143. Zbl 1313.35093
- [18] V.V. Karachik, B.T. Torebek, *On the Dirichlet-Riquier problem for biharmonic equations*, *Math. Notes*, **102**:1 (2017), 31–42. Zbl 1381.31001
- [19] V.V. Karachik, *A Neumann-type problem for the biharmonic equation*, *Sib. Adv. Math.*, **27**:2 (2017), 103–118. Zbl 1399.35186
- [20] V.V. Karachik, *Green's functions of the Navier and Riquier-Neumann problems for the biharmonic equation in the ball*, *Differ. Equ.*, **57**:5 (2021), 654–668. Zbl 1479.35329
- [21] G. Sweers, *A survey on boundary conditions for the biharmonic*, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **54**:2 (2009), 79–93. Zbl 1171.35034
- [22] V. Karachik, *The Green function of the Navier problem for the polyharmonic equation in a ball*, *J. Math. Sci. (N.Y.)*, **269**:2 (2023), 189–204. MR4555425
- [23] V. Karachik, *Riquier-Neumann problem for the polyharmonic equation in a ball*, *Mathematics*, **11**:4 (2023), Article ID 1000.

- [24] V. Karachik, *On one integral representation of solutions of polyharmonic equation*, Lobachevskii J. Math., **44** (2023), 2749–2756.
- [25] A.V. Bitsadze, *On the Neumann problem for harmonic functions*, Sov. Math., Dokl., **41**:2 (1990), 193–195. Zbl 0722.35032
- [26] V.V. Karachik, *On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball*, J. Appl. Ind. Math., **8**:1 (2014), 63–75. Zbl 1340.35078
- [27] A.P. Soldatov, *On the Fredholm property and index of the generalized Neumann problem*, Differ. Equ., **56**:2 (2020), 212–220. Zbl 1440.35089
- [28] H. Begehr, S. Burgumbayeva, B. Shupeyeva, *Remark on Robin problem for Poisson equation*, Complex Var. Elliptic Equ., **62**:10 (2017), 1589–1599. Zbl 1379.31005
- [29] M. Akel, H. Begehr, *Neumann function for a hyperbolic strip and a class of related plane domains*, Math. Nachr., **290**:4 (2017), 490–506. Zbl 1366.31002
- [30] H. Lin, *Harmonic Green and Neumann functions for domains bounded by two intersecting circular arcs*, Complex Var. Elliptic Equ., **67**:1 (2020), 79–95. Zbl 1484.31001
- [31] H. Begehr, S. Burgumbayeva, A. Dauletkulova, H. Lin, *Harmonic Green functions for the Almaty apple*, Complex Var. Elliptic Equ., **65**:11 (2020), 1814–1825. Zbl 1467.35113
- [32] F. Chung, J. Zeng, *Forest formulas of discrete Green's functions*, J. Graph Theory, **102**:3 (2023), 556–577. Zbl 1522.05158
- [33] W.J. Herrera, H. Vinck-Posada, S. Gómez Páez, *Green's functions in quantum mechanics courses*, Am. J. Phys., **90**:10 (2022), 763–769.
- [34] V.J. Harkonen, *Exact factorization of the many-body Green's function theory of electrons and nuclei*, Phys. Rev. B., **106**:20 (2022), Article ID 205137.
- [35] H. Dong, H. Li, *Optimal estimates for the conductivity problem by Green's function method*, Arch. Ration. Mech. Anal., **231**:3 (2019), 1427–1453. Zbl 1412.35082
- [36] D.S. Grebenkov, S.D. Traytak, *Semi-analytical computation of Laplacian Green functions in three-dimensional domains with disconnected spherical boundaries*, J. Comput. Phys., **379** (2019), 91–117. Zbl 1548.65387
- [37] C.-W. Hsu, C. Hwu, *Green's functions for unsymmetric composite laminates with inclusions*, Proc. R. Soc. Lond., A, Math. Phys. Eng. Sci., **476**:2233 (2020), Article ID 20190437. Zbl 1472.74048
- [38] S.L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*, Gordon and Breach, Montreux, 1992. Zbl 0784.65016
- [39] A.V. Bitsadze, *Equations of mathematical physics. Textbook*, Nauka, Moscow, 1982. Zbl 0554.35001
- [40] V.V. Karachik, *Green's function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball*, Complex Var. Elliptic Equ., **64**:9 (2019), 1500–1521. Zbl 1421.31015
- [41] V. Karachik, *Representation of the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation in the ball*, Differ. Equ., **59**:8 (2023), 1061–1074. Zbl 1525.35100
- [42] Sh.A. Alimov, *A problem involving an inclined derivative*, Differ. Equations, **17** (1982), 1073–1083. Zbl 0488.35018

VALERIY VALENTINIVICH KARACHIK
 SOUTH URAL STATE UNIVERSITY (NRU),
 PR. LENINA, 76,
 454080, CHELAYBINSK, RUSSIA
 Email address: karachik@susu.ru