S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 22, № 1, стр. 670–682 (2025) УДК 512.54
https://doi.org/10.33048/semi.2025.22.044 MSC 05C25

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ TI-ПОДГРУППЫ ПОРЯДКА 4 В ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Н.Д. Зюляркина, Т.Г. Ножкина

Представлено И.Б. Горшковым

Abstract: In the paper, we prove that if A is an elementary Abelian TI-subgroup of order 4 in a group G such that $G = F^*(G) \cdot A$, and $F^*(G)$ is a quasi-simple group which covers the group $L_n(q)$ where q is odd, then $F^*(G) \cong L_2(5)$.

Keywords: finite group, elementary Abelian TI-subgroup, centralizers of involutions and semi-involutions.

1 Введение

Многие задачи теории конечных групп связаны с описанием классов групп, содержащих подгруппы с рядом определённых свойств. В частности, большой интерес представляют так называемые плотно вложенные подгруппы и TI-подгруппы.

Подгруппа H конечной группы G называется плотно вложенной в G, если $|H|$ чётен, а $|H \cap H^g|$ нечётен для любого $g \in G - N_G(H)$.

Подгруппа A группы G называется TI-подгруппой, если $A \cap A^g = 1$ для любого $g \in G - N_G(A)$.

Заметим, что плотно вложенная 2-группа является TI-подгруппой.

Исследование плотно вложенных подгрупп началось с работы М. Судзуки [10], где были описаны группы, в которых силовская 2-подгруппа

Zyulyarkina, N.D., Nozhkina, T.G., Elementary Abelian TI-subgroups of order 4 in Linear groups.

Поступила 23 января 2023 г., опубликована 4 июля 2025 г.

является TI-подгруппой. Следующий важный результат в этом направлении был получен Х. Бендером, который в [3] описал группы с сильно вложенной подгруппой. М. Ашбахером в [2] изучались плотно вложенные подгруппы корневого типа. При этом остались неисследованными случаи, когда силовская 2-подгруппа этой группы элементарная абелева или содержит единственную инволюцию. Ввиду того, что в известных простых группах, содержащих плотно вложенную подгруппу, эта подгруппа оказывается в большинстве случаев 2-группой, особый интерес представляет изучение групп, содержащих 2-подгруппу, являющуюся TI-подгруппой. Описанию таких групп посвящены многие работы Ф.Тиммесфельда и его соавторов [6], [11], [12].

А.А. Махневым в [8] был изучен случай плотно вложенной подгруппы корневого типа с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой A при условии, что слабое замыкание инволюции из A в силовской 2-подгруппе является абелевой группой. Там же показано, что при изучении плотно вложенных подгрупп с неэлементарной циклической силовской 2-подгруппой можно ограничиться случаем, когда эта подгруппа циклическая порядка 4. Им же в [9] был получен следующий результат для TI-подгрупп:

Теорема 1. *Пусть 2-группа A является TI-подгруппой конечной группы G и $G_0 = \left\langle A^G \right\rangle$. Тогда выполнено одно из следующих условий:*

1. *A является циклической или элементарной абелевой группой.*
2. *$[A, A^g] = 1$ для любого $g \in G - N(A)$.*
3. *$\left\langle A^{G_0} \right\rangle \cong L_2(2^n), Sz(2^n), U_3(2^n)$ или $SU_3(2^n)$, A является силовской 2-подгруппой в $\left\langle A^{G_0} \right\rangle$.*
4. *A содержит подгруппу A_0 индекса 2, которая инвертируется элементом x из $A - A_0$, $V = \left\langle A_0^G \right\rangle$ является абелевой группой и $\overline{G}_0 = G_0/V$ порождается множеством нечётных транспозиций $\bar{x}^G$.*
5. *$A \cong Q_8 \times E_{2^n}$ или A абелева группа порядка 4, группа $\left\langle \Omega(A)^G \right\rangle$ элементарная, и, для множества D элементов из G сопряжённых с элементами из $A - V$, $\bar{D}$ является множеством корневых инволюций в $\overline{G}_0 = G/V$.*
6. *$A \cong Z_4 \times Z_4$ и $\left\langle A^{G_0} \right\rangle \cong L_3(4)$ или $SL_3(4)$.*
7. *$A \cong Q_8$ и $\left\langle A^{G_0} \right\rangle \cong G_2(2), G_2(3), M_{10}, M_{11}, M_{12}$ или $\left\langle A^{G_0} \right\rangle$ является гомоморфным образом универсальной группы Шевалле G^* над полем из трёх элементов, и A есть образ $O^{2'}(K)$, где K является фундаментальной подгруппой G^*, представленной длинными корнями; $\left\langle A^{G_0} \right\rangle = G^*$, если G^* – ортогональная группа размерности не меньшей, чем 4.*

Из этой теоремы следует, что наименее иссследованы случаи, когда TI-подгруппа A элементарная абелева или циклическая. В дальнейшем циклический случай исследовался А.А. Махнёвым и Н.Д. Зюляркиной в работах [13], [14], [15]. В частности, в [13] было показано, что циклическая TI-подгруппа нормализует любую компоненту (если таковые имеются).

В данной работе авторы исследуют линейные группы на предмет наличия в них элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Основные определения и обозначения, используемые в работе, взяты из [1]. Основной результат:

Теорема 2. *Пусть $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ – квазипростая группа, являющаяся накрывающей группой для $L_n(q)$, где q нечётно, A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4. Тогда $F^*(G) \cong L_2(5)$.*

Следствие 1. *Любая компонента группы G, являющаяся накрывающей для $L_n(q)$, где q нечётно и содержащая элементарную абелеву TI-подгруппу порядка 4, изоморфна $L_2(5)$.*

Заметим, что исключительный случай $F^*(G) \cong L_2(5)$ возникает из п. 3) теоремы 1 в силу изоморфизма $L_2(4) \cong L_2(5)$.

2 Предварительные результаты

В дальнейшем будем считать, что $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ – TI-подгруппа конечной группы G.

Лемма 1. *Пусть x – элемент нечётного порядка из $C_G(a_0)$. Тогда $x \in C_G(A)$.*

Доказательство. Пусть $|x| = 2n+1$. Так как A являетя TI-подгруппой группы G, то $x \in N_G(A)$. Если $x \notin C_G(A)$, то $a_0^x = a_0, b_0^x = a_0b_0, (a_0b_0)^x = b_0$. Тогда

$$b_0 = b_0^{x^{2n+1}} = \left(b_0^{x^{2n}}\right)^x = b_0^x = a_0b_0.$$

Из полученного противоречия, следует, что $x \in C_G(A)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G. Тогда $A \trianglelefteq C_G(a)$ для любого элемента $a \in A, a \neq e$.*

Доказательство. Пусть $x \in C_G(a)$. Тогда для $a \in A, \quad a \neq e$, имеем $a = a^x \in A^x \cap A$, следовательно, $A^x = A$ и $A \trianglelefteq C_G(a)$.

Лемма доказана.

Следствие 2. *Если L – компонента из $C_G(a)$, то A централизует L.*

Следующая лемма показывает, что если конечная группа G содержит элементарную абелеву TI-подгруппу A порядка 4, то A нормализует любую компоненту из G, если таковые имеются.

Лемма 3. *Пусть A – элементарная абелева TI-подгруппа порядка 4 конечной группы G, L компонента из G. Тогда $A \leq N_G(L)$.*

Доказательство.

Пусть G – контрпример к лемме наименьшего порядка. Очевидно, что тогда $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0 b_0} \leq G$ и $G = \left\langle L^A \right\rangle \cdot A$.

Случай 1. $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^{a_0} \cdot L^{b_0} \cdot L^{a_0 b_0}$ – центральное произведение четырёх различных компонент. Введём следующие обозначения:

$$L = L_1, \quad L^{a_0} = L_2, \quad L^{b_0} = L_3, \quad L^{a_0 b_0} = L_4,$$

$$H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}, \quad H_{3,4} = \left\{l^{b_0} l^{a_0 b_0} \,\middle|\, l^{b_0} \in L_3, l^{a_0 b_0} \in L_4\right\}.$$

Для диагонали $H_{1,2} = \{ll^{a_0} \,|l \in L_1, l^{a_0} \in L_2\}$ выполняется равенство $(ll^{a_0})^{a_0} = l^{a_0} l = ll^{a_0}$, поэтому $H_{1,2} \leq C_G(a_0)$ и, следовательно, $H_{1,2} \leq N_G(A)$. Так как $H_{1,2}$ порождается элементами нечётного порядка, то, по лемме 1, $H_{1,2} \leq C_G(A)$. Но, в то же время $H_{1,2}^{b_0} = H_{3,4}$ и, следовательно, $H_{1,2} = H_{3,4}$, что невозможно, так как $H_{1,2}$ и $H_{3,4}$ различны в указанном центральном произведении.

Случай 2.$\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^a$ – центральное произведение двух различных компонент, $a \in A$, $a \neq e$. Без ограничения общности, можно считать, что $a = a_0$. Введём обозначения: $L = L_1, \quad L^{a_0} = L_2$. Как было показано выше, $ll^{a_0} \in C_G(A)$. Заметим, что в этом случае одна из инволюций, содержащихся в A будет нормализовать компоненту L_1, а две другие будут переставлять L_1 и L_2. Обозначим через x инволюцию из A, нормализующую L_1. Если x централизует L_1, то, так как L_1 порождается элементами нечётного порядка, получаем $L_1 \leq C_G(A)$, что невозможно, так как $\left\langle L^A \right\rangle = L \cdot L^a$. Следовательно, x не централизует L_1. Пусть p – простое число, делящее порядок L_1, для которого в L_1 существуют p-элементы, не лежащие в центре L_1. Поскольку L_1 является компонентой, совокупность всех таких p-элементов будет порождать L_1. Так как x не централизует L_1, то существует p-элемент h такой, что $h \notin C_G(x)$. Для него, с одной стороны, $(hh^{a_0})^x = hh^{a_0}$, а с другой, $(hh^{a_0})^x = h^x (h^{a_0})^x$. Отсюда $hh^{a_0} = h^x (h^{a_0})^x$. Так как произведение $L_1 L_2$ центральное, то

$$\left\{ \begin{array}{c} h^x = hz \\ (h^{a_0})^x = z^{-1} h^{a_0}, \end{array} \right. , z \in Z(L_1) \cap Z(L_2).$$

Следовательно, z является не единичным p-элементом из центра L_1. В силу выбора p, порядок центра L_1 делится на все простые делители $|L_1|$. Центры квазипростых групп и их порядки полностью описаны в [4] и таких групп нет. Следовательно, случай 2 невозможен и мы получаем $\left\langle L^A \right\rangle = L$, $G = L \cdot A$, и $A \leq N_G(L)$.

Лемма доказана.

Лемма 3 показывает, что при исследовании групп, содержащих компоненты, вопрос сводится к изучению групп вида $G = F^*(G) \cdot A$, где $F^*(G)$ это обобщённая подгруппв Фиттинга группы G, являющаяся квазипростой группой.

Лемма 4. *Пусть G – группа из формулировки теоремы 2. Тогда $A \cap Z(G) = \{e\}$.*

Доказательство. Пусть $A \cap Z(G) = x$ и $x \neq e$, тогда $A \trianglelefteq G$ и, ввиду строения G, $A \leq Z(G)$. Что невозможно, так как $Z(G)$ циклический.

Лемма доказана.

3 Линейные группы

Ввиду того, что классические группы Шевалле можно представить как группы автоморфизмов векторных пространств, нам понадобятся сведения об инволюциях и полуинволюциях в таких группах.

Пусть V векторное пространство размерности n над полем $k = GF(q)$, q нечетно, $\tilde{Y} = GL_n(k)$ и $Y \leq \tilde{Y}$. Обозначим через I_V тождественный автоморфизм пространства V, а через $\gamma I_V \quad (\gamma \in k^*)$ автоморфизм, при котором каждый вектор из V умножается на γ. Неединичный элемент ω из Y назовём полуинволюцией, если $\omega^2 = \gamma I_V$. Ясно, что инволюции из Y – это полуинволюции. Полуинволюции, не являющиеся инволюциями, называются истинными.

Как показано в разделе 3A из [5], каждой инволюции $\omega \in Y$ соответствуют два подпространства V_ω^+ и V_ω^- из V:

$$V_\omega^+ = C_V(\omega) = \{v \in V \mid \omega(v) = v\}, V_\omega^- = [V, \omega] = \{v \in V | \omega(v) = -v\}.$$

Тогда имеет место разложение $V = V_\omega^+ \bigoplus V_\omega^-$, и тип инволюции ω определяется как $\dim V_\omega^-$. Для инволюции ω типа m базис в V называется стандартным, если в нем первые $n - m$ векторов выбраны из V_ω^+, а последние m векторов из V_ω^-. Если ω – инволюция типа m, то из раздела 3A [5] $C_{GL_n(q)}(\omega)$ содержит нормальную подгруппу изоморфную

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}.$$

Пусть рассматривается группа $H = GL_n(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен и $m = \frac{n}{2}$. Обозначим $\overline{\omega} = \omega Z_1$. Тогда полный прообраз $C_H(\overline{\omega})$ в $GL_n(q)$ содержит подгруппу изоморфную

$$(\underbrace{SL_m(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle,$$

где τ действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau(e_i) = e_{m+i}$, $\tau(e_{m+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$.

Пусть теперь $\omega \in Y$ истинная полуинволюция и $\omega^2 = \gamma I_V$. Если $\gamma = \beta^2$ для некоторого элемента β из k, то $\omega = \beta I_V \omega_1$, где ω_1 инволюция из $\tilde{Y}$. Определим в этом случае тип ω как минимум из типов двух инволюций ω_1 и $-I_V\omega_1$. Стандартный базис для ω определяется как стандартный базис той из инволюций ω_1 или $-I_V\omega_1$, тип которой минимален. Если $\gamma \notin (k^*)^2$, то тип для ω считается равным 0. Тогда для централизатора смежного класса, содержащего ω, в некотором частном группы $GL_n(q)$, его полный прообраз в $GL_n(q)$ состоит из блочных матриц вида:

$$\begin{pmatrix} A & \gamma B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma B & A \\ A & B \end{pmatrix},$$

где A и B квадратные матрицы размерности m, E – единичная матрица той же размерности.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: X – частное группы $SL_n(q)$ по некоторой центральной подгруппе; через X^* обозначим множество таких расширений группы X, что для любой группы $\tilde{X}$ из X^* любой элемент из $\tilde{X} - X$ индуцирует на X внешний внутреннедиагональный автоморфизм. Пусть $g \in GL_n(q)$. Если $g \in Z\left(GL_n(q)\right) \cdot SL_n(q)$, то через $\overline{g}$ будем обозначать смежный класс в этом частном, который содержит элемент $gz \in SL_n(q)$, $z \in Z\left(GL_n(q)\right)$. Если $g \notin Z\left(GL_n(q)\right) \cdot SL_n(q)$, то через $\overline{g}$ будем обозначать внешний автоморфизм, индуцируемый элементом g на X.

Разобьём доказательство теоремы 2 на четыре леммы.

Пусть $G = XA$, $X = F^*(G)$ – частное $SL_n(q)$, $n \geq 2$, q нечётно.

Лемма 5. *Случай $G \in X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Допустим, что существует элементарная абелева TI-подгруппа A из G. Классы сопряжённых инволюций в частном $SL_n(q)$ описаны в [5]. Возможны два случая:

(1) a_0 соответствует инволюции u типа m,
(2) a_0 соответствует полуинволюции u типа 0.

Случай 1.

Пусть a_0 соответствует инволюции u типа m, которая действует на стандартном базисе следующим образом: $u(e_i) = e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $u(e_i) = -e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Если $m \neq \frac{n}{2}$ или частное берётся по центральной подгруппе нечётного порядка, то

$$\underbrace{SL_{n-m}(q)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m(q)}_{L_2} \leq C_{GL_n(q)}(u),$$

L_1 и L_2 нормальные подгруппы в централизаторе инволюции u. Допустим, $m \geq 2$ и $n-m \geq 2$. Если $q \neq 3$, то L_1 и L_2 являются компонентами, поэтому A централизует L_1 и L_2. Если $m = 2$ $(n-m=2)$ и $q = 3$, то соответствующая подгруппа $L_i \cong SL_2(3)$, которая порождается элементами нечётного порядка. Тогда по лемме 1, A централизует L_i.

Обозначим через v элемент из $GL_n(q)$, соответствующий инволюции $b_0 \in A$. Тогда, аналогично, $v \in C_{GL_n(q)}(L_1)$, $v \in C_{GL_n(q)}(L_2)$ и v действует на стандартном базисе: $v(e_i) = \gamma e_i$ при $1 \leq i \leq n-m$, $v(e_i) = -\gamma e_i$ при $n-m+1 \leq i \leq n$. Тогда $uv \in Z\left(GL_n(q)\right)$ и, следовательно, $a_0 b_0 \in Z(G)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть теперь $m = \frac{n}{2}$, $X = SL_n(q)/Z_1$, порядок Z_1 чётен.

По разделу 3A из [5] полный прообраз $C_{GL_n(q)/Z_1}(a_0)$ в $GL_n(q)$ при естественном гомоморфизме содержит подгруппу:

$$(\underbrace{SL_m\left(q\right)}_{L_1} \times \underbrace{SL_m\left(q\right)}_{L_2}) \cdot \langle \tau \rangle .$$

Инволюция τ, которая действует на стандартном базисе следующим образом: $\tau\left(e_i\right) = e_{m+i}, \quad \tau\left(e_{m+i}\right) = e_i$ при $1 \leq i \leq m$, переставляет L_1 и L_2. Если $m \geq 2$, то L_1 и L_2 либо являются компонентами, либо порождаются элементами нечётного порядка, поэтому они централизуются подгруппой A. Повторяя рассуждения, аналогичные случаю $m \neq \frac{n}{2}$, также получим, что A подгруппа центра G, что невозможно.

Если $m = 1$ или $n - m = 1$, то данная ситуация разбирается аналогично.

Случай 2. Пусть a_0 соответствует полуинволюции u типа 0 из $GL_n(q)$. Тогда $u^2 = \gamma I_V$ для некоторого $\gamma \in k^* - \left(k^*\right)^2$, $n = 2m$. В данном случае $U = \langle Z, u\rangle$ – циклическая и $C_{GL_n(q)}\left(U\right) = C_{GL_n(q)}(u) \cong GL_m\left(q^2\right)$. Тогда из раздела 3A [5] следует, что существует элемент $x \in GL_n(q)$, действующий на стандартном базисе следующим образом: $x\left(e_i\right) = e_{m+i}$, $x\left(e_{m+i}\right) = -e_i$ при $1 \leq i \leq m, \quad det\left(x\right) = (-1)^m, \quad |x| = 2, \quad u^x = -u$, такой, что

$$C_{GL_n(q)/Z}\left(u\right) = \left(GL_m\left(q^2\right)/Z\right) \cdot \langle x \rangle ,$$

где x индуцирует полевой автоморфизм порядка 2 на $GL_m\left(q^2\right)/Z$. Тогда в централизаторе инволюции a_0 есть компонента $L \cong SL_m\left(q^2\right)$. Подгруппа A централизует L, что невозможно ввиду того, что $Z\left(C_{GL_n(q)/Z}\left(u\right)\right)$ – циклический.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G \in X^*$ и $n = 2$, тогда $q = 5$.*

Доказательство.

(1) Пусть $A = \{e, a_0, b_0, a_0b_0\}$ является TI-подгруппой группы G и $G \in X^*$, X – частное $SL_2(q)$ по подгруппе Z_1 и все инволюции из A соответствуют инволюциям типа 1. Зафиксируем инволюцию $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$. Если $|Z_1|$ нечётен (то есть $X = SL_2(q)$), то из [5] $C_G\left(a_0\right) = \left\{e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}\right\}$. Так как инволюция $b_0 \in A$ должна централизовать a_0, то $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$, и $a_0b_0 = \overline{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \in Z\left(G\right)$, что невозможно в силу леммы 4.

Пусть $|Z_1|$ чётен (то есть $X = L_2(q)$). Тогда

$$C_G\left(a_0\right) = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ \beta\gamma & 0 \end{pmatrix}} \middle| \alpha, \beta \in F_5^* \right\}.$$

Из строения $C_G(a_0)$ следует, что в качестве инволюции b_0 можно взять инволюцию типа 1 вида $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, так как из $\begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ следует $uv = 1$ и $v = \frac{1}{u}$. Тогда $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}$, $(a_0 b_0)^2 = -E$. Если $(-1) \notin \left(F_q^*\right)^2$, то $a_0 b_0$ – полуинволюция типа 0, что в этом случае невозможно. Пусть $(-1) \in \left(F_q^*\right)^2$, тогда $a_0 b_0$ – инволюция типа 1, $q \equiv 1(4)$ и

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}}; \overline{\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Обозначим $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} \in C_G(a_0)$. Так как $A \trianglelefteq C_G(a_0)$, то $b_0^{s_1} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\beta}{\alpha} \\ \frac{\alpha}{\lambda\beta} & 0 \end{pmatrix}} \in A$, отсюда $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Эти равенства эквивалентны системе уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Рассмотрим количество решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$. Из теоремы 6.26 [7], для невырожденной квадратичной формы f от чётного числа переменных над полем F_q, где q нечётно, число решений уравнения $f(x_1, \ldots, x_n) = b$, для любого $b \in F_q$, в F_q^n равно

$$q^{n-1} + v(b) \cdot q^{\frac{n-2}{2}} \cdot \eta\left((-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \Delta\right),$$

где $\Delta = \det(f)$,

$$v(b) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad b \in F_q^* \\ q-1 & \text{при} \quad b = 0, \end{cases} \qquad \eta(c) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad c \notin \left(F_q^*\right)^2 \\ 1 & \text{при} \quad c \in \left(F_q^*\right)^2. \end{cases}$$

Тогда уравнение $\alpha^2 = \beta^2$ имеет $N = q + q - 1 = 2q - 1$ решений, среди которых ненулевых и с условием $\alpha \neq \beta$: $N = 2q - 1 - 1 - (q-1) = q - 1$. Уравнение $\alpha^2 = -\beta^2$ имеет также $N = 2q - 1$ решений, среди них $N = 2q - 2$ ненулевых. Таким образом, количество различных ненулевых решений уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ с условием $\alpha \neq \beta$ равно $3q - 3$. Так как в F_q^* количество пар (α, β) равно $A_{q-1}^2 = \frac{(q-1)!}{(q-3)!} = q^2 - 3q + 2$, то из $q^2 - 3q + 2 \leq 3q - 3$ следует, что $q \leq 5$. То есть, при $q > 5$ в F_q^* всегда существует пара (α, β) которая не является решением уравнений $\alpha^2 = \pm\beta^2$ и A не является нормальной подгруппой в $C_G(a_0)$.

Если $q = 5$, то $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}$, $\quad b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$, $\quad a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. Но, так как $L_2(5) \cong A_5$ можно считать, что

$$A = V_4 = \{e;\ (1\,2)(3\,4);\ (1\,3)(2\,4);\ (1\,4)(3\,2)\}.$$

Пусть $x \in G - N_G(A)$, $A \cap A^x = u_0$, $u_0 \in V_4$, $u_0 \neq e$. Так как $|C_{A_5}(u_0)| = \frac{60}{15} = 4$, то $A = A^x$ и, следовательно, A является TI-подгруппой в группе G.

(2) В A есть элемент, соответствующий полуинволюции типа 0. Рассмотрим $GL_2(q)/Z_1$, где $|Z_1|$ чётен.

Пусть $a_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}$, $\gamma \notin k^2$, $q \geq 5$, тогда $b_0 \in C_G(a_0)$, где

$$C_G(a_0) = \left\{ e, \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma\beta & -\alpha \end{pmatrix}} \middle| \alpha, \beta \in F_q, \alpha^2 - \gamma\beta^2 \neq 0 \right\}.$$

Непосредственный подсчёт показывает, что $b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$, $a_0 b_0 = \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}}$ (или наоборот).

Пусть $s_1 = \overline{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma\beta & \alpha \end{pmatrix}} \in C_{GL_2(q)/Z_1}(a_0)$, тогда

$$b_0^{s_1} = \frac{1}{\alpha^2 - \gamma\beta^2} \overline{\begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma\beta^2 & 2\alpha\beta \\ -2\alpha\beta\gamma & -\alpha^2 - \gamma\beta^2 \end{pmatrix}}.$$

Например, при $\alpha = 1, \beta = 2$ $b_0^{s_1} \notin A$. То есть $A \ntrianglelefteq C_G(a_0)$ и, следовательно, A не является TI-подгруппой в группе G.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Случай $G \notin X^*$ при $n \geq 3$ невозможен.*

Доказательство.

Обозначим через φ полевой автоморфизм порядка 2, τ – инверсно-транспонирующий автоморфизм. Как показано в лемме 4.27 [5], все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi$, где g индуцирует внутренне-диагональный автоморфизм, сопряжены в G с полевым автоморфизмом φ порядка 2, а все автоморфизмы порядка 2 вида $g\varphi\tau$ сопряжены с $\varphi\tau$, достаточно рассмотреть следующие варианты:

(1) $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2;
(2) $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2;
(3) подгруппа A имеет вид $A = \{e; \overline{g}; \overline{g_1}\tau, \overline{gg_1}\tau\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$.

Если $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда из раздела 3А [5] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную частному $SL_n(q_0)$, где $q = q_0^2$. Согласно следствию 1, подгруппа A централизует L, что невозможно, так как $C_G(L)$ циклический.

Если $a_0 = \varphi\tau$ графово-полевой автоморфизм порядка 2, тогда по лемме 4.27 из [5] $C_X(a_0)$ содержит компоненту L, изоморфную $SU_n(q_0)$, где $q = q_0^2$, что невозможно, аналогично случаю 1.

Если подгруппа A имеет вид $A = \{e; \overline{g}; \overline{g_1}\tau, \overline{gg_1}\tau\}$, g и g_1 соответствуют элементам из $GL_n(q)$. Возможны два случая.

Случай 1. Элемент g соответствует инволюции типа m из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$. Можно считать, что $m \geq 2$. Тогда $SL_{n-m}(q) \times SL_m(q) \leq C_{GL_n(q)}(g)$. Элемент $\overline{g_1}\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, τ централизует элемент g и, следовательно, g_1 также централизует g. При этом $g_1 = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $C \in GL_{n-m}(q), B \in GL_m(q)$. Элемент $B\tau$ централизует компоненту $SL_m(q)$, что невозможно, так как B индуцирует на $SL_m(q)$ внутреннедиагональный автоморфизм, а τ – графовый автоморфизм.

Случай 2. Элемент g соответствует полуинволюции типа 0 из $GL_n(q)$ и $q \geq 5$, $n = 2m$. Тогда g действует на стандартном базисе следующим образом: $g(e_i) = e_{m+i}, \quad g(e_{m+i}) = \gamma e_i, 1 \leq i \leq m$, γ – не квадрат в $GF(q)$, $X = SL_n(q)/Z'$, центральная подгруппа Z' содержит элемент γI. В этом случае $C_G(g)$ содержит компоненту, изоморфную $SL_m(q^2)$, которая централизуется подгруппой A. Но централизатор этой компоненты циклический и, следовательно, этот случай невозможен.

Если $q = 3$, то рассуждения, аналогичные случаю 1, можно применить при $n \geq 6$. Можно считать, что $m \geq 3$, тогда $SL_m(3)$ компонента в централизаторе инволюции g. Остаются случаи $n = 3; 4$.

При $n = 3, m = 2$ элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C_{GL_3(3)}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in GL_2(3) \right\}.$$

Так как элементы $g_1\tau$ и τ централизуют g, то $g_1 \in C_{GL_3(3)}(g)$.

В $C_{GL_3(3)}(g)$ есть подгруппа $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SL_2(3) \right\}$, которая порождается элементами нечётного порядка и, следовательно, лежит в централизаторе элемента $g_1\tau$. Так как $A\tau$ централизует группу $SL_2(3)$, с помощью непосредственных вычислений получаем, что $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ или $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $g_1\tau = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tau$, $(g_1\tau)^2$ инволюция и, следовательно, $g_1\tau \notin A$, так как имеет порядок 4.

В случае $n = 4$ элемент g соответствует инволюции типа m, где $m = 3$ или $m = 2$. При $m = 3$ ситуация аналогична случаю 1. Если $m = 2$, тогда

$$A = \left\{ e; \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}; \quad \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\tau; \quad \overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}\tau \right\}.$$

Возьмём элемент $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_{SL_4(3)}(g_1\tau)$. Тогда $\overline{g}^{\overline{y}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \notin A$ и, следовательно, A не TI-подгруппа.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Случай $G \notin X^*$ при $n = 2$ невозможен.*

Доказательство.

Пусть X – частное $SL_2(q)$, $a_0 = \varphi$ полевой автоморфизм порядка 2, тогда $q = q_0^2$, $C_{GL_2\left(q_0^2\right)}(a_0) \cong GL_2(q_0)$. Если $q_0 \geq 5$, то $SL_2(q_0)$ компонента из централизатора a_0. Подгруппа A её централизует, что, по лемме 4, невозможно. Следовательно, в этом случае группа не может содержать элементарных абелевых TI-подгрупп порядка 4. Далее будем считать $q_0 = 3$.

(1) $A = \{e, \overline{g}, \varphi, \overline{g}\varphi\}$, где g инволюция из $PGL_2(9)$. С учётом того, что элемент g в $C_{PGL_2(q)}(\varphi)$ сопряжён либо с $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$, либо с $\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ для элемента $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из $C_G(\varphi)$ имеем $\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{\overline{b}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \notin A$ и $\overline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\overline{b}} = \overline{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \notin A$. Следовательно, A не TI-подгруппа.

(2) $A = \{e, \overline{g}\tau, \varphi, \overline{g}\varphi\tau\}$, $\tau \in C_{\tilde{G}}(\varphi)$ где $\tilde{G} = Aut\ GL_2\left(q_0^2\right)$. Непосредственные вычисления показывают, что элементу g соответствует 10 смежных классов в $PGL_2(9)$, которые, с учётом сопряжения, разбиваются на 5 классов. В качестве представителей этих классов можно выбрать:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\ g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};\ g_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём элемент $b = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ из $C_G(\varphi)$. Для него получаем:

$$(\overline{g_1}\tau)^{\overline{b}} \sim \overline{g_5}\tau \notin A; \quad (\overline{g_2}\tau)^{\overline{b}} = \overline{g_4}\tau \notin A;$$

$$(\overline{g_3}\tau)^{\overline{b}} = -\overline{g_2}\tau \notin A; \quad (\overline{g_4}\tau)^{\overline{b}} = -\overline{g_3}\tau \notin A.$$

Если в качестве элемента g выбран g_5, то рассмотрим элемент $y \in C_{GL_2(9)}(g_5\tau)$, имеющий вид, $y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$, где p корень неприводимого над F_3 многочлена $f(x) = x^2 + 1$. Тогда $\varphi^{\overline{y}} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 2p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\varphi \notin A$. Таким образом, во всех случаях, A не является TI-подгруппой.

Доказательство леммы 8 завершает доказательство теоремы 2. Следствие из теоремы 2 получается с использованием леммы 3.

References

[1] M. Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Zbl 0997.20001

[2] M. Aschbacher, *On finite groups of component type*, Ill. J. Math., **19**:1 (1975), 87–115. Zbl 0299.20013

[3] H. Bender, *Transitive Gruppen gerader Ordung in denen jede Involution genau einen Punkt festlasst*, J. Algebra, **17**, 527–554. Zbl 0237.20014

[4] D. Gorenstein, *Finite simple groups. An introduction to their classification*, The University Series in Mathematics. New York-London: Plenum Press. x, 1982. Zbl 0483.20008

[5] M.E. Harris, *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over field of odd order*, Trans. Am. Math. Soc., **272**:1 (1982), 1–65. Zbl 0493.20014

[6] Y. Hochheim, F. Timmesfeld, *A note on TI-subgroups*, Arch.Math., **51**:2 (1988), 97–103. Zbl 0666.20009

[7] R. Lidl, H. Niederreiter, *Finite fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. Zbl 0554.12010

[8] A.A. Makhnev, *On densely nested subgroups with cyclic Sylow 2-subgroups*, International Conference on Algebra, dedicated to in memory of A.I. Maltsev, Novosibirsk, 1989, p. 76 (in Russian).

[9] A.A. Makhnev, *A reduction theorem for TI-subgroups*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **55**:2 (1991), 303–317. Zbl 0737.20005

[10] M. Suzuki, *Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent*, Ann. Of Math., **80**:1 (1964), 58–77. Zbl 0122.03202

[11] R. Solomon, F. Timmesfeld, *A note on tightly embedded subgroups*, Arch.Math., **31** (1979), 217–223. Zbl 0403.20006

[12] F. Timmesfeld, *On the structure of 2-local subgroups in finite groups*, Math. Z., **161** (1978), 119–136. Zbl 0363.20016

[13] N.D. Zyulyarkina, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in classical Chevalley groups of odd characteristic*, Trudy Inst. Mat. SO RAN, **30** (1996), 89–110. Zbl 0912.20012

[14] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in exceptional Chevalley groups*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN 1994, **3** (1995), 41–49

[15] N.D. Zyulyarkina, A.A. Makhnev, *Cyclic TI-subgroups of order 4 in known groups*, The Third International Conference on Algebra in memory of M.I.Kargapolov. Abstracts, (1993), p. 130 (in Russian)

Natalya Dmitrievna Zyulyarkina
South Ural State University,
Lenin prospekt, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
Email address: toddeath@yandex.ru

Tatyana Gennadyevna Nozhkina
South Ural State University,
Lenin prospekt, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
Email address: nozhkinatg@susu.ru