S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 1562–1577 (2024) УДК 519.633
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.099 MSC 65M12

О СХОДИМОСТИ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНЫХ СХЕМ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А.К. Баззаев

Представлено М.А. Шишлениным

Abstract: The paper considers the third boundary value problem for a multidimensional integro-differential equation with a non-local source in a p-dimensional parallelepiped. Locally one-dimensional difference schemes are constructed for the problem under consideration. Using the energy inequality method, an a priori estimate for the LOS solution was obtained and its convergence was proved.

Keywords: non-local boundary value problem, boundary conditions of the third kind, locally one-dimensional scheme, stability of the difference scheme, convergence of the difference scheme, approximation, a priori estimation.

Bazaev, A.K., On the convergence of locally one-dimensional schemes for one nonlocal boundary value problem.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2024-1447.

Поступила 22 января 2024 г., опубликована 31 декабря 2024 г.

Введение

При исследовании прикладных задач механики сплошной среды, тепло- и массопереноса широко используются методы математического моделирования и вычислительной математики. В качестве основных при исследовании многих процессов в движущихся средах можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос. В газо- и гидродинамике одним из базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи для нестационарных уравнений конвекции-диффузии (т. е. параболическое уравнение второго порядка с младшими членами) [1]. Математические модели, детально описывающие реальные процессы и явления природы, представляют собой сложные системы. Сложность задач математической физики в основном обусловлена их многомерностью и нелинейностью. Получить точные аналитические решения таких задач весьма трудно. В связи с этим используются численные методы решения. Одним из самых распространенных методов приближенного решения краевых задач является метод конечных разностей.

Исследование моделей процессов переноса в различных природных системах представляет одно из быстро развивающихся направлений современной математики. Повышенный интерес к данной проблеме объясняется тем, что процессы переноса имеют самое широкое распространение в природе и технике. Теория процессов переноса опирается в своих исследованиях на ряд основополагающих аксиом классической термодинамики необратимых процессов. Однако некоторые из них накладывают серьезные ограничения на область применения этой теории. Процессы переноса по своей сути нелокальны и имеют место в системах, которые, строго говоря, не находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью. Нелокальные краевые задачи возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво - грунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по - видимому, работы Камынина Л.И. [2] и Чудновского А.Ф. [3]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [4] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [5], [6], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [7], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [8], Гордезиани Д.Г. [9], Нахушева А.М. [10], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [11] и др.

Уравнение влагопереноса играет важную роль во многих областях науки и вызывает большой практический и теоретический интерес. В 1965 году это уравнение было получено известным теплофизиком А.В. Лыковым методами термодинамики необратимых процессов для плотности потока влаги в коллоидном капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры. В биологии оно характеризует поток биомассы микробной популяции в биологическом реакторе. Еще раньше уравнению влагопереноса были посвящены работы А.В. Бицадзе, К. И. Карапетяна.

Чудновский А.Ф. в работе [3] обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ 0<x<\ell,\ 0<t\leqslant T, \tag{1}$$

где $D(w)$ – коэффициент диффузивности, w – влажность в долях единицы, x – глубина.

Для уравнения (1) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$D\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0}=\int\limits_0^{\alpha} w dx, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0, \tag{3}$$

$$w(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant \ell. \tag{4}$$

Нелокальное условие (2) означает, что поток влаги через поверхность $x=0$ равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до α, условие (3) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы $x=\ell$ и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (4).

Из физических соображений условия интегрального вида совершенно естественны и возникают при математическом моделировании в тех случаях, когда невозможно получить информацию о происходящем процессе на границе области его протекания с помощью непосредственных измерений или же когда возможно измерение лишь некоторых усредненных (интегральных) характеристик искомой величины [3]. Так, задачи с интегральными условиями могут служить математическими моделями физических явлений, связанных, например, с задачами, возникающими при изучении физики плазмы, при изучении движения почвенной влаги в капиллярно-пористых средах. На задачи подобного типа, как качественно новые и возникающие при решении современных проблем физики, указал в своей обзорной статье А.А. Самарский [12] и привел постановку задачи с интегральным условием для уравнения теплопроводности как пример одной из таких задач.

Одним из важнейших достижений в вычислительной математике является разработка экономичных разностных методов для решения многомерных (с несколькими пространственными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_p$)

уравнений в частных производных. Основная идея построения локально-одномерных схем состоит в сведении перехода со слоя на слой к последовательному решению одномерных задач по каждому из координатных направлений. Фундаментальным свойством разностной схемы является свойство аппроксимации на решении исходного дифференциального уравнения. Отказ от классического понятия аппроксимации и замена его более слабым условием суммарной аппроксимации приводит к аддитивным схемам (см. [13], стр. 478, 486), которые обладают двумя важными свойствами:

- переход со слоя j на верхний слой $j+1$ осуществляется при помощи обычных двухслойных, трехслойных и т.д. схем;
- аддитивная схема обладает суммарной аппроксимацией, т.е., погрешность аппроксимации аддитивной схемы определяется как сумма невязок для всех промежуточных схем.

При этом каждая из промежуточных (одномерных схем) цепочки может не аппроксимировать исходную задачу, аппроксимация достигается за счет суммирования всех невязок. Таким образом, при построении локально-одномерных схем используются промежуточные (дробные) слои, на которых численные решения вообще говоря не аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение. Но при суммировании погрешности аппроксимации промежуточные слои гасят друг друга и на целом слое происходит аппроксимация, т.е., аппроксимация достигается за счет суммы погрешностей всех промежуточных схем [13].

Построению локально-одномерных схем для приближенного решения краевых задач для многомерных дифференциальных уравнений посвящены работы многих авторов, такие, например, как [14] — [19]. Так в работах [15, 16] исследованы локально-одномерные разностные схемы для уравнения теплопроводности с краевыми условиями третьего рода в p-мерном параллелепипеде. В [17] рассмотрена нелокальная краевая задача для уравнения параболического типа в p - мерном параллелепипеде, для которой строятся локально-одномерные разностные схемы. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной разностной схемы и доказана ее сходимость. Локально-одномерным схемам для нелокальных краевых задач для многомерного параболического уравнения с граничными условиями интегрального вида посвящены работы [18], [19]. В работе [20] изучена первая начально-краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения конвекции-диффузии. Для приближенного решения поставленной задачи построена локально-одномерная схема, получены априорные оценки решения ЛОС, откуда следуют единственность решения, непрерывная и равномерная зависимость решения от входных данных, а также сходимость решения схемы к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. Для двумерной задачи приводится алгоритм численного решения, а также проведены численные расчеты тестовых примеров, иллюстрирующие полученные в работе теоретические результаты.

Работы [21] — [24] посвящены построению и исследованию локально - одномерных схем для дифференциальных уравнений дробного порядка. Для рассматриваемых задач доказаны устойчивость и равномерная сходимость построенных ЛОС.

1 Постановка задачи

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$\begin{cases} k_\alpha(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha}(x,t)u - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha}(x,t)u - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \tag{7}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha(x,t)u + \int\limits_0^{\ell_\alpha} u dx_\alpha,$$

$$0 < c_0 \leqslant k_\alpha(x,t) \leqslant c_1, \quad |q_\alpha|,\ |\beta_{\pm\alpha}| \leqslant c_2,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

$c_0,\ c_1,\ c_2$ – положительные постоянные.

2 Локально-одномерная разностная схема

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \ell_\alpha / N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\overline{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p} \overline{\omega}_{h_\alpha},\ \overline{\omega}_{h_\alpha} = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\},$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha,\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ \quad h_\alpha/2,\ i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

$\gamma_{-\alpha}$ – левый граничный узел $x_\alpha = 0$, $\gamma_{+\alpha}$ – правый граничный узел $x_\alpha = \ell_\alpha$.

На отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = 0, 1, \ldots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из отрезков $[t_j, t_{j+1}]$ разобьем на p частей, введя точки $t_{j+\alpha/p} = t_j + \alpha/p\ \tau,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p-1$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \big(t_{j+(\alpha-1)/p}, t_{j+\alpha/p}\big]$ полуинтервал, где $\alpha = 1, 2, \ldots, p$.

Уравнение (5) перепишем в виде

$$\mathcal{P}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0,$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \mathcal{P}_\alpha u = 0,\ \mathcal{P}_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha,$$

где $f_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$, и удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f.$$

На каждом полуинтервале $\Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p$ будем последовательно решать задачи

$$\mathcal{P}_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0,\ x \in G,\ t \in \Delta_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\begin{cases} k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{-\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{-\alpha}(x,t),\ x_\alpha = 0, \\ -k_\alpha \dfrac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial x_\alpha} = \beta_{+\alpha} v_{(\alpha)} - \mu_{+\alpha}(x,t),\ x_\alpha = \ell_\alpha, \end{cases} \tag{9}$$

полагая при этом (см. [13], с. 522)

$$\begin{gathered} v_{(1)}(x,0) = u_0(x), \\ v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j),\ j = 1, 2, \ldots, \\ v_{(\alpha)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}) = v_{(\alpha-1)}(x, t_{j+(\alpha-1)/p}),\ \alpha = 2, 3, \ldots, p. \end{gathered} \tag{10}$$

Аппроксимируя каждое уравнение (8) номера α на полуинтервале Δ_α двухслойной неявной схемой и, применяя известный прием повышения точности аппроксимации до второго порядка по h (см. [13] с. 166), [15] краевых условий третьего рода, приходим к цепочке одномерных разностных схем

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} + \Phi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,\ x \in \overline{\omega}_{h_\alpha}, \tag{11}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{12}$$

где

$$y_{\bar{t}}^{(\alpha)} = \frac{y^{j+\alpha/p} - y^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau},$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha y = \begin{cases} \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha y + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- y = \dfrac{a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ y = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} y_{\bar{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} y_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha} \hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \varphi_\alpha, \ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \widetilde{\mu}_{-\alpha}, \ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \widetilde{\mu}_{+\alpha}, \ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\overline{\beta}_{-\alpha} = \beta_{-\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,0}, \qquad \overline{\beta}_{+\alpha} = \beta_{+\alpha} + 0.5h_\alpha d_{\alpha,N_\alpha},$$

$$\widetilde{\mu}_{-\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \overline{\mu}_{-\alpha} = \mu_{-\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0},$$

$$\widetilde{\mu}_{+\alpha} = \frac{\overline{\mu}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}, \quad \overline{\mu}_{+\alpha} = \mu_{+\alpha} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,N_\alpha},$$

$$y^{(\alpha)} = y^{j+\alpha/p}.$$

3 Погрешность аппроксимации ЛОС

Пусть $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где u – решение исходной задачи (5) – (7). Тогда, подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ в разностное уравнения (11), получим

$$\frac{z^{j+\alpha/p} - z^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\alpha/p} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p},$$

где

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$$

и замечая, что

$$\sum_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0,$$

если $f = \sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha$, представим погрешность в виде суммы

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha.$$

$$\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} + \varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - \frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha - \overset{\circ}{\Psi}_\alpha =$$
$$= \left(\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}\right) -$$
$$- \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right) + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha,$$

где

$$\overset{*}{\Psi}_\alpha = \left(\Lambda_\alpha u^{j+\alpha/p} - L_\alpha u^{j+1/2}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\alpha/p} - f_\alpha^{j+1/2}\right) - \left(\frac{u^{j+\alpha/p} - u^{j+(\alpha-1)/p}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}\right).$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2+\tau),\ \ \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1),$$

$$\Psi = \sum_{\alpha=1}^{p}\Psi_\alpha^{j+\alpha/p} = \sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{p}\overset{*}{\Psi}_\alpha = O\left(h_\alpha^2+\tau\right).$$

Запишем граничное условие при $x_\alpha = 0$ в виде:

$$0.5h_\alpha y_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a_\alpha^{(1_\alpha)} y_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \overline{\beta}_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \quad (13)$$

Подставляя $y^{(\alpha)} = z^{(\alpha)} + u^{(\alpha)}$ в (13), получим

$$0.5h_\alpha z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} z_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} z_0^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha -$$

$$-\beta_{-\alpha} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha u_{\bar{t},0}^{(\alpha)} + a_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha f_{\alpha,0} + \mu_{-\alpha}. \quad (14)$$

К правой части полученного выражения (14) добавим и вычтем

$$0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + \int_0^{\ell_\alpha} u\,dx_\alpha + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2}.$$

Тогда получим

$$\Psi_{-\alpha} = 0.5h_\alpha\left(f_{\alpha,0} - u_{\bar{t}}^{(\alpha)}\right) + a_\alpha^{(1_\alpha)} u_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \beta_{-\alpha} u_0^{(\alpha)} - 0.5h_\alpha d_{\alpha,0} u_0^{(\alpha)} + \mu_{-\alpha} -$$

$$-\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha - 0.5h_\alpha \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - q_\alpha u + \int_0^{\ell_\alpha} u\,dx_\alpha + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{x_\alpha=0}^{j+1/2} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} =$$

$$= \left[k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \beta_{-\alpha} u_0 + \mu_{-\alpha}\right]_{x_\alpha=0}^{j+\alpha/p} + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + O(h_\alpha^2+\tau) =$$

$$= 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha},\ \ \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h_\alpha^2+\tau).$$

Итак,

$$0.5h_\alpha z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = a_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0}^{(\alpha)} - \overline{\beta}_{-\alpha} z_0^{(\alpha)} + 0.5h_\alpha \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}^{(0)}\hbar_\alpha + 0.5h_\alpha \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha},$$

или

$$z_{\bar{t},0}^{(\alpha)} = \Lambda_\alpha^- z^{(\alpha)} + \Psi_{-\alpha},\ \ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Аналогично при $x_\alpha = \ell_\alpha$ получаем

$$z_{\bar{t},N_\alpha}^{(\alpha)} = \Lambda_\alpha^+ z^{(\alpha)} + \Psi_{+\alpha},\ \ \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha}.$$

Окончательно, задача для погрешности $z^{j+\alpha/p} = z^{(\alpha)}$ имеет вид

$$z_{\overline{t}}^{(\alpha)} = \overline{\Lambda}_\alpha z^{(\alpha)} + \Psi_\alpha^{j+\alpha/p},\ \alpha = 1, 2, \ldots, p,\ z(x,0) = 0, \tag{15}$$

$$\overline{\Lambda}_\alpha z = \begin{cases} \Lambda_\alpha z = (a_\alpha z_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha} - d_\alpha z + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^- z = \dfrac{a_\alpha^{(1_\alpha)} z_{x_\alpha,0} - \overline{\beta}_{-\alpha} z_0}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Lambda_\alpha^+ z = -\dfrac{a_\alpha^{(N_\alpha)} z_{\overline{x}_\alpha,N_\alpha} + \overline{\beta}_{+\alpha} z_{N_\alpha}}{0.5h_\alpha} + \sum\limits_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} z_{i_\alpha}\hbar_\alpha,\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}, \end{cases}$$

$$\Psi_\alpha = \begin{cases} \Psi_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \overset{*}{\Psi}_\alpha,\ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0,\ \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1),\ \overset{*}{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau),\ x_\alpha \in \omega_{h_\alpha}, \\ \Psi_{-\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} + \dfrac{\overset{*}{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},\ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha} = 0,\ \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau),\ x_\alpha \in \gamma_{-\alpha}, \\ \Psi_{+\alpha} = \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} + \dfrac{\overset{*}{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},\ \sum\limits_{\alpha=1}^{p} \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha} = 0,\ \overset{*}{\Psi}_{+\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau),\ x_\alpha \in \gamma_{+\alpha}. \end{cases}$$

4 Устойчивость ЛОС

Так как для нелокальных краевых задач не установлен принцип максимума, то априорные оценки будем получать с помощью метода энергетических неравенств. Умножим уравнение (11) скалярно на $y^{j+\alpha/p} = y^{(\alpha)}$:

$$[y_{\overline{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] - [\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] = [\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}],\ \Phi^{(\alpha)} = \Phi^{j+\alpha/p}, \tag{16}$$

где

$$[u,v] = \sum_{x\in\overline{\omega}_h} uvH,\ H = \prod_{\alpha=1}^{p} \hbar_\alpha,\ [u,v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha}\hbar_\alpha,$$

$$\hbar_\alpha = \begin{cases} h_\alpha,\ i_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1, \\ h_\alpha/2,\ i_\alpha = 0, N_\alpha. \end{cases}$$

Преобразуем каждую сумму тождества (16):

$$\left[y_{\overline{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \frac{1}{2}\left(\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\right)_{\overline{t}} + \frac{\tau}{2}\|y_{\overline{t}}^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{17}$$

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \Lambda_\alpha^- y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\hbar_\alpha + \Lambda_\alpha^+ y^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\hbar_\alpha =$$

$$= -\left(a_\alpha, y_{\overline{x}_\alpha}^2\right]_\alpha - \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y_{i_\alpha}^{(\alpha)}\hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \beta_{-\alpha}\left(y_0^{(\alpha)}\right)^2 - \beta_{+\alpha}\left(y_{N_\alpha}^{(\alpha)}\right)^2, \tag{18}$$

$$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha = \left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \mu_{-\alpha} y_0^{(\alpha)} + \mu_{+\alpha} y_{N_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{19}$$

Просуммируем (18), (19) по всем $i_\beta \neq i_\alpha,\ \beta = 1, 2, \ldots, p$, тогда получим

$$\left[\overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \overline{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \hbar_\alpha \right) H/\hbar_\alpha =$$

$$= - \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left\{ \left(a_\alpha, y^2_{\overline{x}_\alpha}\right]_\alpha + \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^{(\alpha)}_{i_\alpha} \hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \right.$$

$$\left. + \beta_{-\alpha} \left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}\right)^2 + \beta_{+\alpha} \left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2 \right\} H/\hbar_\alpha, \tag{20}$$

$$\left[\Phi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] = \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right]_\alpha + \mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha} \right) H/\hbar_\alpha. \tag{21}$$

Подставляя (17), (20), (21) в тождество (16), получаем

$$\frac{1}{2} \left(\left\| y^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \right)_{\overline{t}} + c_0 \| y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant [\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}] +$$

$$+ \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha} \right) H/\hbar_\alpha - \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] +$$

$$+ \left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^{(\alpha)}_{i_\alpha} \hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right] - \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\beta_{-\alpha} \left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0}\right)^2 + \beta_{+\alpha} \left(y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2 \right) H/\hbar_\alpha. \tag{22}$$

Оценим слагаемые, стоящие в правой части (22):

$$\left[\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] \leqslant \frac{1}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \frac{1}{2} \left\| y^{(\alpha)} \right\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}. \tag{23}$$

На основании леммы 1 из [25] имеем

$$\sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu_{-\alpha} y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=0} + \mu_{+\alpha} y^{(\alpha)}\big|_{i_\alpha=N_\alpha} \right) H/\hbar_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j) \right) H/\hbar_\alpha + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\varepsilon \| y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\alpha)} + \left(\frac{1}{\ell_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \| y^{(\alpha)} \|^2_{L_2(\alpha)} \right) H/\hbar_\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\mu^2_{-\alpha}(t_j) + \mu^2_{+\alpha}(t_j) \right) H/\hbar_\alpha + \varepsilon \| y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \left(\frac{1}{\ell_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \| y^{(\alpha)} \|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{24}$$

$$- \left[d_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right] \leqslant c_2 \| y^{(\alpha)} \|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{25}$$

$$\sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\beta_{-\alpha} \left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=0}\right)^2 + \beta_{+\alpha} \left(y^{(\alpha)}|_{i_\alpha=N_\alpha}\right)^2 \right) H/\hbar_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant 2c_2\varepsilon\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + 2c_2\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{26}$$

$$\left[\sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} y^{(\alpha)}_{i_\alpha}\hbar_\alpha, y^{(\alpha)}\right] \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ell_\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{\ell_\alpha}{2}\right]\|y^{(\alpha)}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}, \tag{27}$$

где $\|\cdot\|_{L_2(\alpha)}$ означает, что норма берется по переменной x_α при фиксированных значениях остальных переменных.

Подставляя (23) – (27) в (22) при $\varepsilon = c_0/(3+4c_2)$, находим

$$\begin{gathered}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c_0\tau\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \|y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ +\tau\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c(\varepsilon)\tau\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ +\tau\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha.\end{gathered} \tag{28}$$

Просуммируем (28) сначала по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{gathered}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c_0\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{(\alpha)}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \|y^j\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \tau c(\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ +\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha,\end{gathered}$$

а затем по j' от 0 до j:

$$\begin{gathered}\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c_0\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant \\ \leqslant \|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + c(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ +\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha.\end{gathered} \tag{29}$$

Из (29) имеем

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant c(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + F^j, \tag{30}$$

где

$$\begin{gathered}F^j = \|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \\ +\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha.\end{gathered}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\nu_1\sum_{j'=0}^{j-1}\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\nu_2F^j, \tag{31}$$

где $\nu_1,\ \nu_2$ – известные положительные постоянные.

Возвращаясь к неравенству (28), записываем

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\|y^{j+(\alpha-1)/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+c(\varepsilon)\tau\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$
$$+\tau\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\tau\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha. \tag{32}$$

Просуммируем (32) по α' от 1 до α, тогда получим

$$\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\|y^{j}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+c(\varepsilon)\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$
$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha\Big). \tag{33}$$

Не нарушая общности, можно считать, что

$$\max_{1\leqslant\alpha'\leqslant p}\|y^{j+\alpha'/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}=\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)},$$

в противном случае (32) будем суммировать до такого α, при котором $\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}$ достигает максимального значения при фиксированном j. Тогда (33) перепишем в виде

$$\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant\|y^{j}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+pc(\varepsilon)\tau\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+$$
$$+\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\Big(\|\varphi^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_j)+\mu^2_{+\alpha}(t_j)\right)H/\hbar_\alpha\Big). \tag{34}$$

Так как из (30)

$$\|y^{j}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}\leqslant pc(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j-1}\max_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+F^j,$$

то при малом $\tau<\tau_0=\dfrac{1}{2pc(\varepsilon)}$ получим (31).

Введя обозначение $g_{i+1}=\max\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant p}\|y^{j+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}$, соотношение (31) можно переписать в виде

$$g_{i+1}\leqslant\nu_1\sum_{k=1}^{j}\tau g_k+\nu_2F^j. \tag{35}$$

С помощью неравенства (35) на основании леммы 4 из ([26], с. 171) из неравенства (29) получим априорную оценку

$$\|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\|y^{j'+\alpha/p}_{\overline{x}_\alpha}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant$$

$$\leqslant M(t)\left[\|y^0\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\|\varphi^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}+\sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\mu^2_{-\alpha}(t_{j'})+\mu^2_{+\alpha}(t_{j'})\right)H/\hbar_\alpha\right)\right], \tag{36}$$

где $M(t)>0$ – не зависит от h_α $(\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ p)$ и τ.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (11) – (12) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (11) – (12) справедлива оценка (36).*

5 Равномерная сходимость ЛОС

По аналогии с ([13], с. 493) представим решение задачи (15) в виде суммы

$$z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)},\ z_{(\alpha)} = z^{j+\alpha/p},$$

где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)}-\eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha,\ x\in\omega_h+\gamma_{h,\alpha},\ \alpha=1,2,\ldots,p,\ \eta(x,0)=0, \tag{37}$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \begin{cases}\overset{\circ}{\Psi}_\alpha,\ x_\alpha\in\omega_{h_\alpha},\\ \overset{\circ}{\Psi}_{-\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{-\alpha},\\ \overset{\circ}{\Psi}_{+\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{+\alpha}.\end{cases}$$

Отсюда находим $\eta^{j+1}=\eta_{(p)}=\eta^j+\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=\eta^j=\ldots=\eta^0=0$. Тогда для $\eta_{(\alpha)}$ имеем $\eta_{(\alpha)}=\tau(\overset{\circ}{\Psi}_1+\overset{\circ}{\Psi}_2+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_\alpha)=-\tau(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1}+\ldots+\overset{\circ}{\Psi}_p)=O(\tau)$.

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)}-v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha v_{(\alpha)} + \widetilde{\Psi}_\alpha,\ x\in\omega_{h_\alpha},\ \alpha=1,2,\ldots,p, \tag{38}$$

$$\frac{v_{(\alpha)}-v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^-_\alpha v_{(\alpha)} + \frac{\widetilde{\Psi}_{-\alpha}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{-\alpha}, \tag{39}$$

$$\frac{v_{(\alpha)}-v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda^+_\alpha v_{(\alpha)} + \frac{\widetilde{\Psi}_{+\alpha}}{0.5h_\alpha},\ x_\alpha\in\gamma_{+\alpha}, \tag{40}$$

$$v(x,0)=0, \tag{41}$$

$$\widetilde{\Psi}_\alpha = \Lambda_\alpha\eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_\alpha,$$

$$\widetilde{\Psi}_{-\alpha} = \Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{-\alpha} - \sum_{i_\alpha=0}^{N_\alpha} \eta_{(\alpha)i_\alpha} \hbar_\alpha,$$

$$\widetilde{\Psi}_{+\alpha} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} + \overset{*}{\Psi}_{+\alpha}.$$

Так как в силу (37)

$$\Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)} = -\tau \Lambda_\alpha \left(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+2} + \ldots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O(\tau),$$

$$\Lambda_\alpha^- \eta_{(\alpha)} = \Lambda_\alpha^+ \eta_{(\alpha)} = O(\tau),$$

то

$$\widetilde{\Psi}_\alpha = O(h_\alpha^2 + \tau), \ \widetilde{\Psi}_{\pm\alpha} = O(h_\alpha^2 + \tau).$$

Решение задачи (38) – (41) оценим с помощью теоремы 1:

$$\|v_{(\alpha)}^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|v_{(\alpha)\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} \leqslant$$

$$\leqslant M(t) \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\|\widetilde{\Psi}_\alpha^{j'+\alpha/p}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{i_\beta \neq i_\alpha} \left(\widetilde{\Psi}^2_{-\alpha}(t_{j'}) + \widetilde{\Psi}^2_{+\alpha}(t_{j'}) \right) H/\hbar_\alpha \right). \tag{42}$$

Так как

$$\eta^j = 0, \ \eta_{(\alpha)} = O(\tau), \ \|z^j\| \leqslant \|v^j\|,$$

то из оценки (42) следует

Теорема 2. *Пусть задача (5) – (7) имеет единственное непрерывное в $\overline{Q}_T$ решение $u(x,t)$ и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \ \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (11) – (12) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что

$$\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1^2 \leqslant M \left(|h|^2 + \tau \right),$$

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2,$$

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \|y^{j+1}\|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)} + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \|y_{\overline{x}_\alpha}^{j'+\alpha/p}]|^2_{L_2(\overline{\omega}_h)}.$$

Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации нелокальных краевых задач, следует использовать метод окаймления ([27], с.187).

Заключение

В работе рассматривается третья краевая задача для многомерного интегро-дифференциального уравнения с нелокальным источником в p-мерном параллелепипеде. Для приближенного решения дифференциальной задачи построена цепочка локально-одномерных разностных схем с порядком аппроксимации $O(|h|^2 + \tau)$. Показано, что построенная ЛОС обладает суммарной аппроксимацией. С помощью метода энергетических неравенств получена априорная оценка для решения разностной задачи, из чего следуют устойчивость и единственность решения ЛОС. Также доказана сходимость приближенного решения к решению исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы.

References

[1] A.A. Samarskii, P.N. Vabishevich, *Chislennye metody resheniya zadach konvekcii-diffuzii*. M.: Editorial URSS, 2015.pp.246. (In Russian).

[2] L.I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., **4**:6 (1964), 33–59.

[3] A.F. Chudnovskii, *Nekotorye korrektivy v postanovke i reshenii zadach teplo- i vlagoperenosa v pochve [Some corrections in the formulation and solution of problems of heat and moisture transfer in soil]*, Collection of Proceedings of the Agrophysical Institute, **23** (1969), 41-–54 (in Russian)

[4] A.V. Bitsadze, A.A. Samarskii,*On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems*, Sov. Math., Dokl., **10** (1969), 398–400. Zbl 0187.35501

[5] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differ. Uravn., **1**3:2 (1977), 294–304. Zbl 0349.35040

[6] N.I. Ionkin, *Uniform convergence of the difference scheme for one nonstationary nonlocal boundary-value problem*, Comput. Math. Model., **2**:3 (1991), 223–328. Zbl 0799.65095

[7] V.A. Il'in, E.I. Moiseev, *A nonlocal boundary value problem for the Sturm-Liouville operator in the differential and difference treatments*, Sov. Math., Dokl.,**34** (1987), 507–511. Zbl 0643.34016

[8] N.I. Ionkin,E.I. Moiseev, *A problem for a heat equation with two-point boundary conditions*, Differ. Uravn., **1**5:7 (1979), 1284–1295. Zbl 0415.35032

[9] D.G. Gordeziani, *On the methods of solution for one class of non-local boundary value problems(O metodakh resheniya odnogo klassa nelokal'nykh kraevykh zadach)* , Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, Tbilisi, 1981. Zbl 0464.35037

[10] A.M. Nakhushev, *A nonlocal problem and the Goursat problem for a loaded equation of hyperbolic type, and their applications to the prediction of ground moisture*, Sov. Math., Dokl., **19** (1978), 1243–1247. Zbl 0433.35043

[11] A.P. Soldatov, M. Kh. Shkhanukov, *Boundary value problems with general nonlocal Samarskij condition for pseudoparabolic equations of higher order*, Sov. Math., Dokl.,**36**:3 (1988), 507–511. Zbl 0701.35092

[12] A.A. Samarskii, *Some problems in differential equation theory*, Differ. Equations, **16** (1981), 1221–1228. Zbl 0519.35069

[13] A.A. Samarskii, *Theory of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1977. Zbl 0462.65055

[14] V.N. Abrashin, V.A. Asmolik, *Locally one-dimensional difference schemes for multidimensional quasilinear hyperbolic equations.* Differ. Equations. **18** (1983), 767–774. Zbl 0513.65063

[15] I.V. Fryazinov, *O raznostnoy approksimatsii granichnykh usloviy dlya tret'yey krayevoy zadachi [On difference approximation of boundary conditions for the third boundary value problem]* , Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **4**:6 (1964), 1106–1112

[16] A.K. Bazzaev, *Local one-dimensional scheme for the third boundary value problem for the heat equation*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **13**:1 (2011), 3–12. Zbl 1220.65108

[17] A.K. Bazzaev, D.K. Gutnova, D.K.,M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for parabolic equations with a nonlocal condition*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,**52**:6 (2012), 1048–1057. Zbl 1274.35032

[18] Z. V. Beshtokova, Locally one-dimensional scheme for parabolic equation of general type with nonlocal source, News of the Kabardin-Balkar scientific center of RAS, **3** (2017), 5–12.

[19] Z.V. Beshtokova, Finite-difference methods for solving a nonlocal boundary value problem for a multidimensional parabolic equation with boundary conditions of integral form, Dal'nevost. Mat. Zh. **22**:1 (2022), 3–27. Zbl 1500.65038

[20] Z.V. Beshtokova, Stability and convergence of the locally one-dimensional scheme A. A. Samarskii, approximating the multidimensional integro-differential equation of convection-diffusion with inhomogeneous boundary conditions of the first kind Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, **27**:3 (2023), 407–426. Zbl 7815840

[21] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with Robin boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **50**:7 (2010), 1141–1149. Zbl 1224.65198

[22] A.K. Bazzaev, A.V. Mambetova, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for the heat equation of fractional order with concentrated heat capacity*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **52**:9 (2012), 1656–1665. Zbl 1274.35154

[23] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional schemes for the diffusion equation with a fractional time derivative in an arbitrary domain*, Comput. Math. Math. Phys., **56**:1 (2016), 106–115. Zbl 1416.65253

[24] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shhanukov-Lafishev, *On the convergence of difference schemes for fractional differential equations with Robin boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys., **57**:1 (2017), 133–144. Zbl 1371.65095

[25] V.B. Andreev, *On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **8**:6 (1968), 1218–1231. Zbl 0174.47701

[26] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0304.65003

[27] D.K. Faddeev, V.N. Faddeeva, *Numerical methods of linear algebra*, Fizmatgiz, Moscow, 1960. Zbl 0094.11005

Alexander K. Bazzaev
1) North Ossetian State University after K.L. Khetagurov,
Vatutina str. 44 — 46,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia,
2) Vladikavkaz Institute of Management,
Borodinskaya str. 14,
362025, North Ossetia - Alania, Vladikavkaz, Russia
Email address: a.k.bazzaev@yandex.ru