S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 1347–1369 (2024) УДК 517.5
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.085 MSC 31B10

К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЕСОВОЙ ОБОБЩЕННОЙ ГЕЛЬДЕРОВОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С МЕРОЙ

Ю.Е. Дроботов Б.Г. Вакулов

Представлено Е.С. Дубцовым

Abstract: Weighted Zygmund-type estimates are obtained for a hypersingular integral over an almost homogeneous metric measure space. Based on these estimates, theorems on the action of this integral operator in weighted variable generalized Hölder spaces are proved. As the weight function, a representative from the power function class is considered, the exponent of which does not exceed 1. It is shown that the hypersingular integral "degrades" the characteristic of the generalized Hölder space by an order of the hypersingular integral. The conditions of the presented theorems are formulated in terms of the Bary–Stechkin class and a special analog of the Dini continuity condition.

Keywords: bounded operator, continuity, generalized Hölder spaces, hypersingular integral, integral equations, local modulus of continuity, modulus of submetry, Zygmund-type estimates

---

Drobotov Yu. E., Vakulov B. G., On the weighted generalized Holder continuity of a hypersingular integral over a metric measure space.

Работа Дроботова Ю. Е. поддержана РФФИ и ТУБИТАК (грант 20-51-46003).

Работа Дроботова Ю. Е. выполнена в Северо-Кавказском центре математических исследований ВНЦ РАН при поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1379.

Поступила 10 января 2023 г., опубликована 11 декабря 2024 г.

Введение

Как известно, риссово дробное интегродифференцирование функций многих вещественных переменных определяет производную через гиперсингулярный интеграл [1, с. 483] (см. также [4, 5]), в том числе и на однородных пространствах, например – сфере [6]. Кроме того, всякий однородный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами может быть выражен гиперсингулярным интегралом с характеристикой специального вида [1, с. 530], что вызывает особый интерес к исследованию таких операторов в контексте задач математической физики.

Один из основных вопросов качественной теории интегральных операторов состоит в отыскании способа формализации их гладкости, содержательно характеризующего устойчивость соответствующих уравнений. На этом пути неизбежны обобщения классических функциональных пространств, в том числе пространств гёльдеровского типа, введение которых еще в теории эллиптических уравнений в частных производных мотивировано тем же вопросом. В качестве простой аналогии можно отметить, что потребность в описании континуальных свойств функций с помощью условия Гёльдера возникает еще при исследовании классического уравнения Пуассона [2, с. 51], в то время как гиперсингулярный интеграл на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ реализует дробные степени оператора Лапласа.

Обзор исследования. В настоящей работе рассмотрены операторы гиперсингулярного интегрирования по множеству почти однородного метрического пространства. Исследуется отображение такими операторами функций, удовлетворяющих условию типа Гёльдера с локальным модулем непрерывности, представления о котором подробно раскрываются.

Говоря конкретно, в Теореме 2 доказана ограниченность гиперсингулярного интеграла D^α, заданного Определением 1, при отображении функций из весового пространства обобщенной переменной гёльдеровости $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, введенного в Определении 7, в случае, когда вес является степенной функцией вида

$$w_a(x) := d^r(a, x), \quad a, x \in \Omega, \quad 0 < r \leq 1, \qquad (w_a)$$

где $d(a, x)$ означает расстояние на открытом множестве Ω (подробнее см. далее). Это достигается за счет построения оценки типа Зигмунда, представленной Теоремой 1 в терминах локального модуля непрерывности, определенного через понятие субметрии: представляя самостоятельную ценность, подобные неравенства могут быть востребованы в исследовании устойчивости решений интегральных уравнений первого рода.

Приведенные результаты дополняют полученные авторами ранее в работе [3] для степенных весов с показателем, большим единицы. Технически «малость» показателя r у веса (w_a) обнаруживает свою специфику в выборе вспомогательных неравенств, используемых при доказательстве Теоремы 1, что, в качестве полезного следствия, влечет за собой, вообще говоря, иные значения ограничивающих констант, которые часто удается оценить точно.

Если D^{α} выражает дифференциальный оператор (как в случае $X = \mathbb{R}^{n}$), условия полученной здесь теоремы о действии могут рассматриваться как достаточные условия весовой квалифицированной гладкости функции f и быть соотнесены с классическими результатами.

Обзор тематической области. Раздел риссовых интегралов и производных дробного порядка получил развитие методами спектральной теории в таких известных работах С. Г. Самко, как [4–6]. Основным их результатом явилось описание пространства риссовых потенциалов на $\mathbb{R}^n$ в терминах разностных сингулярных интегралов, особенность которых доминирует над размерностью пространства [7]. Результаты об обращении потенциалов Рисса такими, гиперсингулярными, интегралами доказывались на функциях из L^p–пространства, в том числе — в весовых терминах.

Подходы, основанные на исследовании символов интегральных операторов на сфере, позволили качественно обобщить теоретические результаты относительно операторов типа потенциала, в сущности породив самостоятельное направление анализа сферических сверток. В этом отношении стоит отметить работу [8], где рассматривались спектры некоторых наиболее часто встречающихся операторов сферической свертки, а также [9], пионерскую с точки зрения классификации таких операторов на основании асимптотического поведения на бесконечности их мультипликаторов Фурье–Лапласа. В ней же был поставлен вопрос о гладкости сферических сверток в терминах обобщенных пространств Гёльдера, предпосылки к чему имеют довольно богатую историю; значимым же результатом в этом отношении является теорема об изоморфизме вида

$$A^{\alpha}\left(H^{\varphi}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)\right) = H^{\varphi_{\alpha}}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right),$$

где $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n}$, A^{α} — оператор сферической свертки вида

$$A^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} k(x \cdot \sigma)\, f(\sigma)\, \mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

спектр которого $\{k_m\}_{m=0}^{\infty}$ в разложении по сферическим гармоникам (мультипликатор Фурье–Лапласа) имеет заданную асимптотику при $m \to \infty$, а $\varphi(h)$ и $\varphi_{\alpha}(h)$ есть мажоранты модуля непрерывности, характеризующие обобщенную гёльдеровость рассматриваемых функций.

Стоит напомнить, что гладкость как свойство непрерывной дифференцируемости функций может вводиться весьма разнообразными способами. Например, работы [10–12] определяли пространство гладких функций на сфере как частный случай пространств Бесова. В то же время, альтернативная точка зрения предполагала введение гладкости в терминах дифференцируемости по декартовым координатам [13]. Однако работы [14–16] показали возможность эквивалентной нормировки пространств Гёльдера, возникающих в этих двух различных подходах.

Свое развитие тематика обобщенно-гёльдеровских пространств получила в работах [17–19], предлагавших использовать в качестве мажоранты модуля непрерывности произвольный, не обязательно степенной, функциональный параметр. Гармонический анализ в таких пространствах пополнился результатами в области теории потенциала [20–23], в том числе и в последние годы: так, исследования [25–27], развивая результаты работы [9], представили условия ограниченности оператора типа потенциала Рисса со степенно-логарифмическим ядром на сфере, а также связанного с ним стереографической проекцией пространственного потенциала. В частных случаях оператор осуществляет изоморфизм обобщенных пространств Гёльдера, причем обратный оператор выражается композицией с гиперсингулярным интегралом. В работе [28] описаны классы однозначно разрешимых (в пространствах обобщенной гёльдеровости) интегральных уравнений первого рода, ядро оператора в которых имеет слабую особенность.

Интерес к операторам дробного интегродифференцирования переменного порядка [29–33] был естественно сопряжен с рассмотрением функциональных пространств, определяющие параметры которых также имеют функциональную природу. Отметим исследования [34–37], в которых были доказаны, в том числе, теоремы типа Соболева в случае пространств Лебега с переменным показателем; работы [38–44], в которых рассматривались пространства $H^{\lambda(x)}$ переменной гёльдеровости и действие в них сферических, а затем и пространственных потенциалов постоянного и переменного (включая комплексные) порядков, и, наконец, [48, 49], описывающие действие операторов типа потенциала и гиперсингулярных интегралов, определенных на однородных пространствах, в $H^{\lambda(x)}$ в безвесовом и случае специального веса.

Стоит заметить, что ослабление требований к множеству интегрирования за счет введения интегралов на множествах почти однородных квазиметрических пространств [48–50], является существенной проблемой. Отличие подхода, применяемого в этом случае, от известных в классической теории состоит в необходимости локализации аналитических свойств функций на таких пространствах на основании более общих геометрических соображений. Неприменимы более замечательные следствия евклидовой метризации пространства: например, тождество параллелограмма, которое, в случае сферы, приводит исследование в область сферических сверток. Получение оценок типа Зигмунда затруднено отсутствием формулы Каталана, что потребовало создания аналогичного аппарата в работах [48, 49] (здесь он также используется в виде Лемм 2 и 3). Наконец, оценки вблизи особых точек, например «весовой» точки a, требует применения специальных неравенств, выводимых, как правило, непосредственно из неравенства треугольника или, в случае квазиметрических пространств, его обобщения. Немаловажно, что при этом параметризация констант, с которыми ограничены соответствующие интегралы, усложняется и в качественном аспекте: они теперь становятся зависимы от постулируемых характеристик самого множества интегрирования, что, конечно, играет свою роль в приложении полученных результатов для решения уравнений.

В настоящее время наибольший интерес представляют пространства обобщенной переменной гёльдеровости, введенные впервые в работе [45]. Исследования их с точки зрения риссова интегродифференцирования переменного порядка в [46, 47], ставили задачу на гиперсфере и гиперплоскости многомерного евклидова пространства; известны также результаты для этих пространств в нестандартном анализе голоморфных функций [51]. Большую значимость имеют современные исследования классов Никольского–Бесова, осуществляемые с введением нового модуля непрерывности [52, 53].

В завершение обзора следует заметить, что генерализация известных функциональных пространств затрагивает не только отдельные пространства квалифицированной гладкости. Так, большой интерес представляет развитие анализа в пространствах Морри и их обобщениях [54–59], причем спектр подходов к постановке и решению соответствующих задач демонстрирует разнообразие даже в такой небольшой выборке референтных работ. Стоит отметить интенсивное развитие теории гранд-пространств, которая результатами ряда современных исследований [60–69] превращена в самодостаточную область анализа. Во многом такой широкий спрос на новые результаты в анализе на нестандартных пространствах продиктован приложениями в математической физике и задачах математического моделирования — такими, как обсуждались, например, в [70, 71].

Предварительные сведения

Основные определения. Пусть (X,d,μ) — произвольное метрическое пространство, где $d(x,\sigma)$ означает расстояние, а $\mu(\sigma)$ — меру для всяких $x,\sigma\in X$. Будем предполагать (X,d,μ) таковым, что все его открытые шары

$$B(x,h):=\{\,\sigma\in X:\, d(x,\sigma)<h\,\}$$

измеримы и удовлетворяют следующему условию роста:

$$\forall x\in X:\quad \mu\, B(x,h)\le K\, h^{\nu},\quad \text{когда}\quad h\to 0,\quad K>0, \tag{B}$$

где K не зависит от x, а показатель $\nu>0$ полагается действительным в рамках данной статьи. Будем полагать также, что все сферы в X удовлетворяют условию

$$\mu\, S(x,h)=0,\quad S(x,h):=\{\,\sigma\in X:\, d(x,\sigma)=h\,\}.$$

Условимся обозначать замкнутые шары в X символом $B[x,h]$.

Метрику $d(x, y)$ будем полагать симметричной и удовлетворяющей классическому прямому неравенству треугольника:

$$d(x, \sigma) \le d(x, y) + d(y, \sigma). \qquad (\Delta_1)$$

В дальнейшем используется также обратное неравенство треугольника,

$$|\, d(x, y) - d(y, \sigma)\,| \le d(x, \sigma), \quad x, y, \sigma \in X, \qquad (\Delta_2)$$

эквивалентное (Δ_1) для симметричных метрик. Наконец, условимся рассматривать произвольно выбранное множество Ω такое, что

$$\Omega \subset X, \quad 0 < \operatorname{diam}(\Omega) < \infty, \quad \Omega \text{ — открытое}. \qquad (\Omega)$$

Определение 1. *Пусть выбрано число, понимаемое как порядок гиперсингулярного интеграла:*

$$\alpha \in \mathbb{C}: \quad 0 < \operatorname{Re} \alpha < 1.$$

Гиперсингулярный интеграл определим следующим выражением:

$$D^{\alpha} f(x) := \int\limits_{\Omega} \frac{f(\sigma) - f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x, \sigma)} \, \mathrm{d}\,\sigma, \quad x \in \Omega.$$

Здесь и далее символ $\mathrm{d}\,\sigma$ *указывает на интегрирование по мере* $\mu(\sigma)$ *в смысле главного значения:*

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(x, \sigma) \, \mathrm{d}\,\sigma = \lim_{h \to +0} \int\limits_{\Omega \setminus B[x,h]} \varphi(x, \sigma) \, \mathrm{d}\,\sigma.$$

Отметим, что в дальнейшем будем опускать явное указание меры, пользуясь ее свойствами имплицитно через Леммы 2 и 3, а также Теорему 2.

Напомним, далее, что отображение φ между метрическими пространствами M и N называется субметрией, если для каждой точки $x \in M$ образ всякого замкнутого шара при отображении φ является замкнутым шаром того же радиуса с центром в точке $\varphi(x)$ [72]. Оттолкнувшись от этого понятия, введем следующую характеристику для случая, когда в качестве φ рассматривается функция:

Определение 2. *Будем называть модулем субметрии функции* f*, определенной на* Ω*, функцию*

$$\omega_{\Omega}(f, x, h) := \sup_{\sigma \in \Omega \cap B[x,h]} |\, f(x) - f(\sigma)\,|, \quad x \in \Omega, \quad h > 0.$$

Наряду с Определением 2 рассмотрим, вслед за [18, с. 49], общее определение модуля непрерывности, адаптировав его под текущую постановку задачи:

Определение 3. *Пусть выбрано число* $l : 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega)$*. Функцию*

$$M(x, h), \quad x \in \Omega, \quad 0 < h \le l,$$

будем называть локальным модулем непрерывности, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

(3.1) $\forall x \in \Omega: \quad M(x,0) = 0$*;*
(3.2) $M(x,h)$ *является неубывающей функцией от* h *равномерно по* x*;*
(3.3) $M(x,h)$ *полуддитивна по* h*, т.е.*

$$\forall x \in \Omega: \quad M(x,h_1+h_2) \leq M(x,h_1) + M(x,h_2);$$

(3.4) $M(x,h)$ *есть непрерывная по* h *функция для всякого* $x \in \Omega$*.*

Модуль субметрии из Определения 2 не обязательно является локальным модулем непрерывности в смысле Определения 3, поскольку свойство (3.3) полуаддитивности по h, вообще говоря, не гарантировано. В то же время, важное следствие свойства (3.3) составляет

Лемма 1. *Пусть* $x \in \Omega$, $0 < l \leq \operatorname{diam}(\Omega)$, $M(x,h)$ *— локальный модуль непрерывности в смысле Определения 3. Имеет место оценка:*

$$\frac{M(x,h_2)}{h_2} \leq 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}, \quad 0 < h_1 \leq h_2 \leq l. \tag{M.1}$$

Доказательство. Рассуждения в основе доказательства леммы ничем принципиально не отличаются от классического случая, изложенного в [18, с. 50]. Прежде всего, из свойства (3.3) в Определении 3 следует, что

$$\forall x \in \Omega: \quad M(x,n\,h) \leq n\,M(x,h), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{M.2}$$

Положим:

$$h_2 = h_1 + h, \quad 0 \leq (n_0 - 1)\,h_1 \leq h \leq n_0\,h_1,$$

где $n_0 = 1 + [h/h_1]$ и (причем только в этом контексте) через $[k]$ обозначена целая часть числа k. Тогда имеем в силу свойства (3.3) и оценки (M.2), зафиксировав некоторую точку $x \in \Omega$:

$$\frac{M(x,h_2)}{h_2} \leq \frac{M(x,h_1)}{h_1+h} + \frac{M(x,h)}{h_1+h} \leq \\ \leq \frac{M(x,h_1)}{h_1} + \frac{M(x,n_0\,h_1)}{h_1+(n_0-1)\,h_1} \leq 2\,\frac{M(x,h_1)}{h_1}.$$

□

Отметим, что из свойства (M.2), а также (3.3) полуаддитивности и (3.2) неубывания по h следует следующая оценка с произвольным $k > 0$:

$$\begin{aligned} M(f,x,k\,h) &\leq [k]\,M(f,x,h) + M(f,x,\lambda\,h) \leq \\ &\leq (k+1)\,M(f,x,h), \quad k = [k] + \lambda, \quad 0 \leq \lambda < 1. \end{aligned} \tag{M.3}$$

Укажем частного представителя класса локальных модулей непрерывности, который составляет интерес в дальнейшем изложении:

$$M_\Omega(f,x,h) := \sup_{\substack{\sigma_1,\sigma_2 \in \Omega \cap B[x,l]: \\ d(\sigma_1,\sigma_2) \leq h}} |\,f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\,|, \quad x \in \Omega, \quad 0 < h \leq l < \infty. \tag{M_Ω}$$

Если f непрерывна, свойства (3.1), (3.2) и (3.4) из Определения 3, очевидно, выполнены для (M_Ω); свойство (3.3) легко проверяется: пусть

$$\sigma_k \in \Omega \cap B[x,l], \quad h_k := d(x,\sigma_k), \quad k = 1,2,$$

тогда, согласно (Δ_1), $d(\sigma_1,\sigma_2) \le h_1 + h_2$, и справедливо:

$$| f(\sigma_1) - f(\sigma_2) | \le | f(\sigma_1) - f(x) | + | f(x) - f(\sigma_2) | \le$$
$$\le \sum_{k=1}^{2} \sup_{\substack{\sigma_1',\sigma_2' \in \Omega\cap B[x,l]:\\ d(\sigma_1',\sigma_2')\le h_k}} \left| f(\sigma_1') - f(\sigma_2') \right| = M_\Omega(f,x,h_1) + M_\Omega(f,x,h_2).$$

Вспомогательный аппарат. Раздел введения завершим, напомнив

Определение 4. *Будем говорить, что неотрицательная функция $L(x,t)$, определенная на $\Omega\times[0,l]$, $0<l<\infty$, почти возрастает по t равномерно по x, если найдется константа $c_L \ge 1$ такая, что выполнено неравенство*

$$L(x,t) \le c_L\, L(x,\tau) \quad \text{для всех} \quad 0<t<\tau\le l.$$

Для оценки возникающих далее интегральных конструкций используются следующие леммы:

Лемма 2. *Пусть $L(x,t)$ – неотрицательная функция на $\Omega\times[0,l]$, $0< l<\infty$, почти возрастающая по t равномерно по x и удовлетворяющая неравенству*

$$L(x,2\,t) \le C\,L(x,t), \quad 0<C<\infty.$$

Для всякого λ, $0\le\lambda<\infty$, имеет место оценка:

$$\int\limits_{B(x,h)} \frac{L\left(x,d(x,\sigma)\right)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0 \int\limits_0^h \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0<c_0<\infty,$$

где $x\in\Omega$, $0<h<l$, постоянные C и c_0 не зависят от x.

Лемма 3. *Пусть выполнены предпосылки Леммы 2. Тогда*

$$\int\limits_{\Omega\setminus B(x,h)} \frac{L\left(x,d(x,\sigma)\right)}{\left[d(x,\sigma)\right]^{\lambda}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0 \int\limits_h^l \frac{t^{\,\nu-1}L(x,t)}{t^{\,\lambda}}\,\mathrm{d}\,t, \quad 0<c_0<\infty,$$

где $0<h<l\,/\,k$, $k>1$, постоянная c_0 не зависит от $x\in\Omega$.

Леммы 2 и 3 доказаны в работе [49] в более общем случае, когда вместо λ может быть рассмотрена неотрицательная, ограниченная на Ω функция. Их роль для анализа на произвольных метрических, а также квазиметрических пространствах аналогична роли следствий из формул типа Каталана в случае пространств евклидовых. Небезынтересно отметить, что константа c_0 в обеих леммах допускает точную оценку, связанную с постулируемыми свойствами пространства X.

В работах [48, 49] Леммы 2 и 3 (в указанном выше обобщенном виде) были использованы для доказательства оценок типа Зигмунда и теорем об ограниченности гиперсингулярного интеграла переменного порядка $\alpha(\cdot)$ при отображении функций из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$. Одна из этих теорем используется в завершающем отделе статьи — в релевантной поставленным задачам формулировке.

Оценка типа Зигмунда

Прибавив и вычтя под знаком интеграла в D^{α} произведение $w(\sigma)f(\sigma)$, получаем следующее представление, справедливое для произвольного веса w:

$$\begin{aligned} w(x)\int_{\Omega}\frac{f(\sigma)-f(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma = \int_{\Omega}\frac{f_w(\sigma)-f_w(x)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma + \\ + \int_{\Omega}\frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\,\frac{f_w(\sigma)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma, \end{aligned} \tag{1}$$

где обозначено:

$$f_w(x) := w(x)f(x), \quad x\in\Omega.$$

Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(x) := \int_{\Omega}\frac{w(x)-w(\sigma)}{w(\sigma)}\,\frac{f_w(\sigma)-f_w(a)}{d^{\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma. \tag{$\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$}$$

Если вес w является степенной функцией вида (w_a), то $f_w(a)=0$, и из общего представления (1) имеем

$$w(x)\,D^{\alpha}f(x) = D^{\alpha}f_w(x) + \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(x), \quad x\in\Omega. \tag{2}$$

Для оператора $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}$ докажем следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $0<l<\infty$, а под $M(f,x,h)$ подразумеваются:*

- *модуль субметрии $\omega_{\Omega}(f,x,h)$, если он полуаддитивен по h;*
- *минимальная мажоранта модуля ω_{Ω} из класса локальных модулей непрерывности, если $\omega_{\Omega}(f,x,h)$ не обладает свойством полуаддитивности по h для данной функции f на Ω;*
- *определенный выше локальный модуль непрерывности (M_{Ω}).*

Имеет место оценка типа Зигмунда:

$$|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega}f_w(y)\,| \le c\,\Bigg\{\sum_{z\in\{a,x,y\}}\int\limits_0^h\frac{M\,(f_w,z,t)}{t^{\,1+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\, + $$

$$+\,h^{\,r}\sum_{z\in\{a,x\}}\int\limits_h^l\frac{M(f_w,z,t)}{t^{\,1+r+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\Bigg\}, \quad y\in B[x,h], \quad 0<h<l, \quad 0<c<\infty.$$

Доказательство. Отметим, что в условиях теоремы выполнено:

$$x, y \in \Omega : \quad d(x,y) \le h < k\,h, \quad k > 1. \tag{A}$$

Имеет место следующая декомпозиция множества Ω:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_3 \cap \Omega_4)\,,$$

где введены подмножества [1]

$$\begin{aligned} \Omega_{1\,|\,2} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\, d(x\,|\,a,\sigma) < k\,h \,\}\,, \\ \Omega_{3\,|\,4} &:= \{\, \sigma \in \Omega :\, d(x\,|\,a,\sigma) \ge k\,h \,\}\,. \end{aligned} \tag{Ω_s}$$

В терминах (Ω_s) имеет место представление

$$\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y) = \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y) +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{(w(x) - w(y)) + (w(y) - w(\sigma))}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma -$$

$$- \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)}\, \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

из которого следует оценка

$$\begin{aligned} |\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega} f_w(y)\,| \le \left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\right| + \left|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\,\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y)\,\right| + \\ + |\,w(x) - w(y)\,| \cdot |\,I\,| + |\,J\,|\,, \end{aligned} \tag{3}$$

где явно выделены следующие интегралы:

$$I := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{f_w(\sigma) - f_w(a)}{w(\sigma)\, d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

$$J := \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{w(y) - w(\sigma)}{w(\sigma)} \left(\frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)} - \frac{1}{d^{\,\nu+\alpha}(y,\sigma)} \right) f_w(\sigma)\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Будем последовательно оценивать слагаемые из правой части (3), конструируя мажоранты необходимого вида.

Оценка первого слагаемого. Множество $\Omega_1 \cup \Omega_2$ предполагает четыре взаимоисключающих варианта расположения точек x и a:

$$\begin{aligned} \Lambda_{1\,|\,2} = \Lambda_{1\,|\,2}(x) &:= \{\, \sigma \in \Omega :\, d\,(a\,|\,x,\sigma) \le d\,(x\,|\,a,\sigma) < k\,h \,\}\,, \\ \Theta_{1\,|\,2} = \Theta_{1\,|\,2}(x) &:= \{\, \sigma \in \Omega :\, d\,(a\,|\,x,\sigma) < k\,h \le d\,(x\,|\,a,\sigma) \,\}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где принципиально важным является соотношение $d(a,\sigma)$ и $d(x,\sigma)$. Исходя из двух вариантов последнего, а именно:

$$\Lambda_1(x) \cup \Theta_1(x) \quad \text{и} \quad \Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x),$$

---

[1] Здесь и далее запись вида «$a\,|\,b$» употребляется для обозначения выбора из двух вариантов, условия которого очевидны или явно представлены.

составим мажоранту как сумму соответствующих интегралов.

Оценка интеграла по $\Lambda_1 \cup \Theta_1$. Очевидно неравенство:

$$|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| \le M\left(f_w, a, d(a,\sigma)\right), \quad \sigma \in \Lambda_1 \cup \Theta_1.$$

Имея в виду соотношение расстояний вида $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$, характерное для $\Lambda_1 \cup \Theta_1$, запишем, применив Лемму 2:

$$\begin{aligned} \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)\,\right| &\le \int\limits_{\Lambda_1\cup\Theta_1} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d^{\,r}(a,\sigma)\,[d(x,\sigma)]^{\,-r+\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le \int\limits_{B(a,k\,h)} \frac{M\left(f_w, a, d(a,\sigma)\right)}{[d(a,\sigma)]^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma \le c_0\,c_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, \tau\right)}{\tau^{\,1+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где использована замена $t = k\,\tau$, $\tau \in (0,h)$, вследствие чего константа c_1 выражается исходя из свойства (M.2) как $c_1 = k^{\,1-\mathrm{Re}\,\alpha}$ в случае натурального k и, согласно (M.3), как $c_1 = (k+1)\,k^{\,-\,\mathrm{Re}\,\alpha}$ в общем случае.

Оценка интеграла по $\Lambda_2 \cup \Theta_2$. Для интеграла по $\Lambda_2(x) \cup \Theta_2(x)$ рассуждения во многом аналогичны. Выше модуль субметрии вычислялся в точке a, поскольку $d(a,\sigma)$ полагалось минимальным. Теперь же оценим числитель подынтегрального выражения, ориентируясь на гладкостные свойства функции f_w в окрестности точки x:

$$\begin{aligned} |\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,| &\le |\, f_w(\sigma) - f_w(x)\,| + |\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le \\ &\le 3\,M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right), \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma). \end{aligned} \tag{6}$$

Поясним, что для второго слагаемого требуемая оценка следует из неравенства

$$d(x,a) \le d(x,\sigma) + d(a,\sigma) \le 2\,d(a,\sigma),$$

и свойства (M.2):

$$|\, f_w(x) - f_w(a)\,| \le M\left(f_w, x, d(x,a)\right) \le 2\,M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right).$$

Далее, в силу свойства (M.1) модуля непрерывности имеет место:

$$\frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d(a,\sigma)} \le 2\,\frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d(x,\sigma)}, \quad d(x,\sigma) \le d(a,\sigma), \tag{7}$$

а значит, вновь применив Лемму 2, имеем:

$$\begin{aligned} \left|\, \mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\cup\Theta_2} f_w(x)\,\right| &\le 3 \int\limits_{\Lambda_2\cup\Theta_2} \frac{M\left(f_w, x, d(a,\sigma)\right)}{d^{\,r}(a,\sigma) d^{\,\nu-r+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le \\ &\le 6 \int\limits_{B(x,kh)} \frac{M\left(f_w, x, d(x,\sigma)\right)}{d^{\,\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le C_1 \int\limits_0^h \frac{M\left(f_w, a, t\right)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t, \quad C_1 = 6\,c_0\,c_1. \end{aligned}$$

Таким образом, мажоранта первого слагаемого из генерального представления (3) имеет вид:

$$\big|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(x)\,\big| \le C_1\left\{\int\limits_0^h \frac{M(f_w,x,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t+\int\limits_0^h \frac{M(f_w,a,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t\right\}. \qquad (R_1)$$

Оценка второго слагаемого. В силу (A) и (Δ_1) имеет место:

$$d(y,\sigma)\le d(x,y)+d(x,\sigma)\le (k+1)\,h,\quad \forall\sigma\in\Omega_1,$$

а значит

$$\Omega_1\subseteq\{\,\sigma\in\Omega:\ d(y,\sigma)\le (k+1)\,h\,\}=:G,\quad G\cup\Omega_2=\bigcup_{i=1}^{2}\Lambda_i(y)\cup\Theta_i(y),$$

где $\Lambda_i(y)$ и $\Theta_i(y)$ заданы выражением (4). Повторив рассуждения из предыдущего пункта, приходим к искомой оценке вида (R_1):

$$\big|\,\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega_1\cup\Omega_2} f_w(y)\,\big| \le C_1\left\{\int\limits_0^h \frac{M(f_w,y,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t+\int\limits_0^h \frac{M(f_w,a,t)}{t^{\,\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t\right\}. \qquad (R_2)$$

Оценка третьего слагаемого. Прежде всего отметим неравенство

$$|\,w(x_1)-w(x_2)\,|=|\,d^{\,r}(x_1,a)-d^{\,r}(x_2,a)\,|\le d^{\,r}(x_1,x_2), \qquad (8)$$

следующее из (Δ_2), а также числового результата

$$|\,d_1^r-d_2^r\,|\le|\,d_1-d_2\,|^{\,r},\quad d_1,d_2\ge 0,\quad 0<r\le 1,$$

известного, например, из работы [18, с. 27]. Применив (8), имеем:

$$|\,w(x)-w(y)\,|\cdot|\,I\,|\le k^{\,r}\,h^{\,r}\int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4}\frac{|\,f_w(\sigma)-f_w(a)\,|}{w(\sigma)\,d^{\,\nu+\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma. \qquad (9)$$

Множество $\Omega_3\cap\Omega_4$ оставляет два равновозможных варианта расположения точек x и a относительно y:

$$H_{1\,|\,2}:=\{\,\sigma\in\Omega:\ kh\le d(a\,|\,x,\sigma)\le d(x\,|\,a,\sigma)\,\},$$
$$\Omega_3\cap\Omega_4=H_1\cup H_2. \qquad (H_s)$$

Представим интеграл в правой части (9) суммой интегралов с тем же подынтегральным выражением, но взятых по H_1 и H_2 соответственно; обозначим последние через I_1 и I_2.

Оценка I_1. Интеграл по I_1 оценивается в тех же соображениях, что и слагаемое $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_1\cup\Theta_1} f_w(x)$, отсылая к (5). Именно, поскольку $d(a,\sigma)$ минимально на H_1, запишем, применив Лемму 3:

$$|\,I_1\,|\le\int\limits_{\Omega\setminus B(a,\,k\,h)}\frac{M\,(f_w,a,d(a,\sigma))}{[d(a,\sigma)]^{\,r+\nu+\mathrm{Re}\,\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma\le C\int\limits_h^l\frac{M(f_w,a,t)}{t^{\,r+\mathrm{Re}\,\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t,\quad C=c_0\,c_1.$$

Оценка I_2. Для оценки интеграла I_2 воспользуемся теми же рассуждениями, что лежали в основе оценки $\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Lambda_2\cup\Theta_2} f_w(x)$. Обратимся к (6) и затем (7):

$$|\, I_2\, | \le 3 \int\limits_{H_2} \frac{M\,(f_w, x, d(a,\sigma))}{d^{\,r}(a,\sigma) d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\,\mathrm{d}\,\sigma \le 6 \int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)} \frac{M(f_w, x, d(x,\sigma))}{[d(x,\sigma)]^{\,\nu+r+\operatorname{Re}\alpha}}\,\mathrm{d}\,\sigma,$$

где осталось лишь применить Лемму 3.

Таким образом, имеем для третьего слагаемого:

$$|\, w(x) - w(y)\, | \cdot |\, I\, | \le C_1\, h^{r} \left\{ \int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, x, t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_h^l \frac{\omega_\Omega(f_w, a, t)}{t^{\,r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\,\mathrm{d}\,t \right\}. \tag{R_3}$$

Оценка четвертого слагаемого. Для удобства обозначим $\lambda := \nu + \operatorname{Re}\alpha$. Имеем следующую мажоранту:

$$|\, J\, | \le \int\limits_{\Omega_3\cap\Omega_4} \frac{|\, d^{\,r}(a,y) - d^{\,r}(a,\sigma)\, |}{d^{\,r}(a,\sigma)} \left| d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma) \right| |\, f_w(\sigma) - f_w(a)\, |\,\mathrm{d}\,\sigma.$$

Для оценки отношения воспользуемся тем, что для всякой пары различных положительных чисел d_1 и d_2 имеет место следующая оценка:

$$|\, d_1^r - d_2^r\, | \le r\ (d_1\, |\, d_2)^{\,r-1}\ |\, d_1 - d_2\, |, \quad 0 < r \le 1, \tag{10}$$

которая является следствием классического двойного неравенства

$$r\, t_1^{r-1}\,(t_1 - t_2) < t_1^r - t_2^r < r\, t_2^{r-1}\,(t_1 - t_2), \quad 0 < r < 1, \tag{11}$$

приведенного в [73, с. 39] за ссылкой (2.15.2). Поясним, что под произвольным выбором $d_1\,|d_2$ в правой части (10) подразумевается следующее рассуждение: пусть $d_2 > d_1$, тогда

$$0 < d_2^r - d_1^r = d_2^r \left[1^{\,r} - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{r} \right] \le r\, d_1^r \left(1 - \frac{d_1}{d_2}\right) \le r\, d_2^{r-1}\,(d_2 - d_1),$$

где воспользовались (11) для оценки выражения в квадратных скобках, а затем возрастанием функции $t^{\,r}$, $r > 0$. Заметим, что в [46, 49] аналогичный выражению (11) результат был получен применением к функции $t^{\,r}$ теоремы о среднем в интегральной форме. Таким образом, имеем:

$$\frac{|\, d^{\,r}(a,y) - d^{\,r}(a,\sigma)\, |}{d^{\,r}(a,\sigma)} \le r\, \frac{d(y,\sigma)}{d(a,\sigma)}. \tag{12}$$

Напомним также известное неравенство С. Л. Соболева [74, с. 251]:

$$\left| \frac{1}{d_1^\gamma} - \frac{1}{d_2^\gamma} \right| \le c_\gamma\, \frac{|\, d_1 - d_2\, |\ (d_1 + d_2)^{\,\gamma-1}}{(d_1\, d_2)^{\,\gamma}}, \quad \gamma > 0, \tag{13}$$

где положительная постоянная c_γ зависит только от γ. Применим (13) к оценке второго модуля в правой части мажоранты $|\,J\,|$:

$$\Big|\, d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma)\,\Big| \le \frac{c_\lambda\, k\, h}{d^{\,\lambda}(x,\sigma)\, d(y,\sigma)} \left[1 + \frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)}\right]^{\lambda-1}.$$

Ясно, что при $\nu < 1 - \operatorname{Re}\alpha$, то есть $\lambda < 1$, последняя скобка мажорируется единицей. Покажем, что она ограничена и в противоположном случае.

Принимая во внимание конструкцию множества интегрирования (Ω_s), а также изначальное условие (A), констатируем истинность двойного неравенства

$$d(x,y) < k\, h \le d(x,\sigma), \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4,$$

а значит, и нижней оценки

$$d(y,\sigma) \ge d(x,\sigma) - d(x,y) > (k-1)\, h, \quad \sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4.$$

Как следствие представленных выше соотношений имеем

$$\frac{d(x,\sigma)}{d(y,\sigma)} \le \frac{d(x,y) + d(y,\sigma)}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k\, h}{d(y,\sigma)} < 1 + \frac{k}{k-1}, \quad k > 1.$$

Таким образом, в случае $\sigma \in \Omega_3 \cap \Omega_4$ справедлива оценка

$$\Big|\, d^{\,-\lambda}(x,\sigma) - d^{\,-\lambda}(y,\sigma)\,\Big| \le \frac{c_\lambda\, h}{d^{\,\lambda}(x,\sigma)\, d(y,\sigma)}, \tag{14}$$

в которой постоянная c_λ зависит от параметров α, ν, а также значения $k > 1$.

Объединив теперь оценки (12) и (14), имеем:

$$|\,J\,| \le C_2\, h \sum_{s=1}^{2} \int\limits_{H_s} \frac{|\, f_w(\sigma) - f_w(a)\,|}{d(a,\sigma)\, d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma = C_2\, h\, (J_1 + J_2), \quad C_2 = r\, c_0\, c_\lambda,$$

где интегралы J_1 и J_2 имеют то же подынтегральное выражение, но взяты, соответственно, по множествам H_1 и H_2, определенным выражением (H_s).

Оценка J_1. На H_1 выполняется $d(a,\sigma) \le d(x,\sigma)$, так что имеем, применив Лемму 3:

$$J_1 \le \int\limits_{\Omega\setminus B(a,kh)} \frac{M(f_w, a, d(a,\sigma))}{d\,[(a,\sigma)]^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha+1}}\, \mathrm{d}\,\sigma \le c_0\, c_1 \int\limits_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{\,\operatorname{Re}\alpha+2}}\, \mathrm{d}\,t.$$

Оценка J_2. На H_2 воспользуемся (6), (7) и Леммой 3:

$$J_2 \le 6 \int\limits_{\Omega\setminus B(x,kh)} \frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\nu+\operatorname{Re}\alpha+1}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma \le C_1 \int\limits_h^l \frac{M\,(f_w, x, d(x,\sigma))}{d^{\,\operatorname{Re}\alpha+2}(x,\sigma)}\, \mathrm{d}\,\sigma.$$

В заключение отметим, что

$$\frac{h}{t^{\operatorname{Re}\alpha+2}} \le \frac{h^r\, t^{1-r}}{t^{\operatorname{Re}\alpha+2}} = \frac{h^r}{t^{r+\operatorname{Re}\alpha+1}}, \quad h \le t, \quad r \le 1.$$

Таким образом, имеем для последнего слагаемого из представления (3):

$$|\, J\,| \le C_1\, C_2\, h^r \left\{ \int\limits_h^l \frac{M(f_w, x, t)}{t^{r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\, \mathrm{d}\, t + \int\limits_h^l \frac{M(f_w, a, t)}{t^{r+\operatorname{Re}\alpha+1}}\, \mathrm{d}\, t \right\}. \qquad (R_4)$$

Завершающие выводы. Объединив полученные выше оценки (R_1) – (R_4), получаем утверждение доказываемой теоремы. Интересно отметить, что константа c, с которой оно справедливо, представляет собой произведение C_1 и C_2, значения которых могут быть исследованы в контексте конкретной задачи. □

Теоремы о действии

Доказанные далее теоремы утверждают условия ограниченности интегральных операторов D^α (из Определения 1) и ($\mathfrak{D}^{\,\alpha}_{\Omega}$), в пространствах обобщенной переменной, а также локальной обобщенной гёльдеровости со степенным весом (w_a). Они существенно опираются на результат, полученный в [48], и сформулированы в контексте применяемых в этой работе понятий: восстановим последний.

Пространства обобщенной переменной гёльдеровости. Пусть Ω удовлетворяет условиям (Ω). Востребовано

Определение 5. *Будем говорить, что*

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad \text{где} \quad \omega : \Omega \times (0, l] \to [0, \infty),$$

если выполнены следующие условия:

(1) $\forall x \in \Omega$: $\omega(x, h)$ *— непрерывная, почти возрастающая по* $h \in (0, l]$, *и*

$$\lim_{h \to +0} \omega(x, h) = 0;$$

(2) $\inf\limits_{x\in\Omega} \omega(x, h) > 0$ *при* $h > 0$.

В дальнейшем будем использовать $\omega(x, h)$ как функциональный параметр, который называют *характеристикой* обобщенного пространства Гёльдера.

Определение 6. *Будем называть пространством* $H^{\,\omega(\cdot)}(\Omega)$ *обобщенной переменной гёльедровости линейное пространство функций, удовлетворяющих неравенству*

$$\forall (x, h) \in \Omega \times (0, l] : \quad M(f, x, h) \le c\, \omega(x, h), \quad \omega \in W_l(\Omega), \quad 0 < c < \infty,$$

где M означает модуль субметрии ω_Ω, если, для данных f и Ω, он полуаддитивен по $h \in (0, l]$, или его минимальную мажоранту из класса локальных модулей непрерывности в смысле Определения 3.

Пространство $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{H^{\omega(\cdot)}(\Omega)} = \|f\|_{C(\Omega)} + \sup_{\substack{x\in\Omega,\\ h\in(0,l]}} \frac{M(f,x,h)}{\omega(x,h)},$$

где через $C(\Omega)$ обозначено пространство непрерывных на Ω функций.

Весовое пространство $C(\Omega, w)$ определим обычным образом, но для работы с весом (w_a) приведем

Определение 7. *Пусть $\Omega_0 \subset \Omega$. Функцию $f \in C(\Omega, w)$ отнесем к $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w)$, если*

$$w\,f \in H^{\omega(\cdot)}(\Omega) \quad \text{и} \quad \forall x \in \Omega_0: \quad (w\,f)(x) = 0.$$

Докажем ограниченность гиперсингулярного интеграла D^α при отображении функции из $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$, считая $\Omega_0 = \{a\}$.

Основной результат. Спецификацией класса W_l является класс Бари–Стечкина, который имеет следующее определение:

Определение 8. *Функция $\omega \in W_l(\Omega)$ принадлежит классу Бари–Стечкина Φ_β^δ, $0 \le \delta < \beta$, если одновременно выполнены следующие условия:*

$$\int_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^\delta \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h), \quad \int_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^\beta \frac{\omega(x,t)}{t}\,\mathrm{d}\,t \le c\,\omega(x,h), \tag{15}$$

где $x \in \Omega$, $0 < h \le l$, постоянная $c > 0$ не зависит ни от x, ни от h.

Теорема 2. *Пусть гёльдеровская характеристика*

$$\omega \in \Phi_{1+\mathrm{Re}\,\alpha}^{\mathrm{Re}\,\alpha}, \quad 0 < \mathrm{Re}\,\alpha < 1, \tag{16}$$

а также удовлетворяет условию непрерывности типа Дини:

$$\begin{gathered} c_1\,\omega\,(y, d(x,y)) \le \omega\,(x, d(x,y)) \le c_2\,\omega\,(y, d(x,y))\,, \\ x, y \in \Omega, \quad 0 < c_1, c_2 < \infty. \end{gathered} \tag{17}$$

Тогда оператор D^α ограничен из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ в $H^{\omega_{-\alpha}(\cdot)}(\Omega)$ с характеристикой

$$\omega_{-\alpha}(x,h) := h^{-\mathrm{Re}\,\alpha}\,\omega(x,h), \quad 0 < h \le l < \infty. \tag{ω_α}$$

Теорема 2 доказывалась в работе [49]. Новый результат представляет

Теорема 3. *Пусть характеристика $\omega(x,h)$ удовлетворяет условиям (16) и (17), а также, для всякого $h > 0$, условию*

$$\sup_{x\in\Omega} \frac{\omega(a,h)}{\omega(x,h)} \le c_\omega, \quad 0 < c_\omega < \infty. \tag{18}$$

Тогда оператор D^{α} ограничен из $H^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ в $H^{\omega-\alpha(\cdot)}(\Omega, w_a)$ с характеристикой (ω_α) и степенным весом (w_a).

Доказательство. По предположению теоремы выполнено:

$$\forall x \in \Omega: \quad M(w_a\, f, x, h) \le C\, \omega(x, h), \quad h \in (0, l], \quad 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega), \tag{19}$$

где в качестве M выступает ω_Ω или его минимальная мажоранта из класса локальных модулей непрерывности.

Воспользуемся аддитивным представлением (2). Ограниченность первого слагаемого в правой его части утверждается Теоремой 2. Ограниченность же оператора $\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega}$ на функции $H_0^{\omega(\cdot)}(\Omega, w_a)$ следует из оценки типа Зигмунда, указанной в Теореме 1.

Действительно, на основании (19) имеет место неравенство:

$$\frac{|\,\mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(x) - \mathfrak{D}^{\alpha}_{\Omega} f_w(y)\,|}{h^{-\operatorname{Re}\alpha}\, \omega(x, h)} \le \frac{c}{\omega(x, h)} \left\{ \sum_{z \in \{a, x, y\}} \int\limits_0^h \left(\frac{h}{t}\right)^{\operatorname{Re}\alpha} \frac{\omega(z, t)}{t}\, \mathrm{d}\, t + \right.$$

$$\left. + \sum_{z \in \{a, x\}} \int\limits_h^l \left(\frac{h}{t}\right)^{r+\operatorname{Re}\alpha} \frac{\omega(z, t)}{t}\, \mathrm{d}\, t \right\}, \quad 0 < c < \infty,$$

Справедливы следующие рассуждения:

- слагаемые с $z = a$ получают мажоранту нужного вида немедленно ввиду условия (18) доказываемой теоремы, которое влечет оценку
$$\frac{c}{\omega(x, h)} \le \frac{c}{\omega(a, h)} \sup_{x \in \Omega} \frac{\omega(a, h)}{\omega(x, h)} \le \frac{c\, c_\omega}{\omega(a, h)}, \quad h > 0;$$
- слагаемые, где $z = x$, оцениваются непосредственно исходя из определения класса Бари–Стечкина;
- для оценки слагаемых, у которых $z = y$, учтем требование (17), которое сводит этот случай к предыдущему.

$\square$

Заметим, что, если при всяком $h > 0$ функция $\omega(x, h)$ достигает минимума в точке $x = a$, то условие (18) может быть очевидным образом переформулировано с константой $c_\omega = 1$.

Локальное обобщенное пространство Гёльдера. Предложим одно обобщение локальной непрерывности по Гёльдеру в терминах введенного выше модуля (M_Ω). Как и ранее, рассматривается метрическое пространство X с мерой, которое удовлетворяет условиям (B), (Δ_1), (Δ_2).

Определение 9. *Пусть $\Omega \subset X$ удовлетворяет (Ω). Будем понимать под локальным обобщенным пространством Гёльдера $\mathcal{H}^{\omega(\cdot)}(\Omega)$ линейное* *пространство функций, удовлетворяющих условию*

$$M_\Omega(f,x,h) \le c\,\omega(x,h), \quad x \in \Omega, \quad h \in (0,l], \quad 0 < c < \infty,$$

где предполагается

$$\omega \in W_l(\Omega), \quad 0 < l \le \operatorname{diam}(\Omega).$$

Аналогично Определению 7 составим определение $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega,w)$. В силу (M.2) выполнено следующее соотношение:

$$\forall x \in \Omega: \quad \omega_\Omega(f,x,h) \le 2\,M_\Omega(f,x,h), \quad h \in (0,l], \quad 0 < l < \infty,$$

что позволяет утверждать о теоретико-множественном включении $\mathcal{H}$-прос-
транств в H-пространства хотя бы в том случае, когда ω_Ω принадлежит классу локальных модулей непрерывности; обратное же не гарантировано.

Из Теоремы 1 непосредственно следует ограниченность оператора $\mathfrak{D}_\Omega^{\,\alpha}$ при отображении функции из $\mathcal{H}_0(\Omega,w)$:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия Теоремы 3. Оператор $\mathfrak{D}_\Omega^{\,\alpha}$ ограничен из $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega,w_a)$ в $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega,w_a)$, где имеют место определения (ω_α), (w_a).*

Рассуждения в основе доказательства Теоремы 4 повторяют таковые для Теоремы 3, не представляя существенной новизны. Относительно оператора D^α из Определения 1 сформулируем, имея в виду методику получения оценок типа Зигмунда в безвесовом случае,

Предложение 1. *В предпосылках Теоремы 3 гиперсингулярный интеграл D^α ограничен из $\mathcal{H}_0^{\omega(\cdot)}(\Omega,w_a)$ в $\mathcal{H}_0^{\omega_\alpha(\cdot)}(\Omega,w_a)$.*

References

[1] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*, Gordon and Breach, New York, 1993. Zbl 0818.26003

[2] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 2001. Zbl 1042.35002

[3] Yu.E. Drobotov, B.G. Vakulov, *Hypersingular integrals in power-weighted variable generalized Hölder spaces over metric measure spaces*, J. Math. Sci. (2024), 1–20.

[4] S.G. Samko, *On spaces of Riesz potentials*, Math. USSR, Izv., **10**:5 (1976), 1089–1117. Zbl 0379.46026

[5] S.G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals, their symbols and inversion*, Sov. Math., Dokl., **18** (1977), 97–101. Zbl 0373.47027

[6] S.G. Samko, *Spherical potentials, spherical Riesz differentiation, and their applications*, Russian Math. (Iz. VUZ), **21**:2 (1977), 106–110. Zbl 0362.31007

[7] S.G. Samko, *Generalized Riesz potentials and hypersingular integrals with homogeneous characteristics, their symbols and inversion*, Proc. Steklov Inst. Math., **156**, 1983, 173–243. Zbl 0518.42025

[8] S.G. Samko, *Singular integrals over the sphere and construction of characteristics with respect to the symbol*, Russian Math. (Iz. VUZ), **27**:4 (1983), 35–52. Zbl 0525.45014

[9] B.G. Vakulov, *An operator of potential type in a sphere in Hölder generalized classes*, Sov. Math., **30**:11 (1986), 90–94. Zbl 0632.42011

[10] A.S. Dzhafarov, *A constructive description of generalized Besov classes on the multidimensional sphere*, Sov. Math., Dokl., **32** (1985), 722–726. Zbl 0617.46037

[11] A.D. Gadzhiev, Kh.P. Rustamov, *Equivalent normalization in Besov spaces on a sphere and properties of the symbol of a multidimensional singular integral*, Sov. Math., **28**:9 (1984), 95–99. Zbl 0617.42011

[12] I.V. Petrova, *Jackson's theorem and Besov spaces on the sphere*, Sov. Math., Dokl., **30** (1984), 425–429. Zbl 0601.41019

[13] S.M. Nikol'sky, P.I. Lizorkin, *Approximation by spherical polynomials*, Tr. Mat. Inst. Steklova, **166**, 1984, 186–200. Zbl 0582.41008

[14] B.G. Vakulov, S.G. Samko, *Equivalent normings in spaces of piecewise-smooth functions on a sphere of type $C^\lambda(\mathbb{S}_{n-1})$, $H^\lambda(\mathbb{S}_{n-1})$*, Sov. Math., **31**:12 (1987), 90–95. Zbl 0653.46033

[15] S.G. Samko, B.G. Vakulov, *On equivalent norms in fractional order function spaces of continuous functions on the unit sphere*, Fract. Calc. Appl. Anal., **3**:4 (2000), 401–433. Zbl 1033.46500

[16] B.G. Vakulov, *Ob ekvivalentnyh normirovkah v prostranstvah funkcij kompleksnoj gladkosti na sfere*, Proceedings of the Institute of Mathematics Belarusi, **9** (2001), 41–44.

[17] A.S. Dzhafarov, *The best approximation using finite spherical sums and certain differential properties of functions harmonic in a sphere*, in *Teoremy vlozenija priloz.*, Trudy Simpoz. Teoremam Vlozenija, Baku 1966, Nauka, 1970, 75–81. Zbl 0259.31005

[18] A.I. Gusejnov, Kh.Sh. Muhtarov, *Introduction to the theory of nonlinear singular integral equations*, Nauka, Moscow, 1980. Zbl 0474.45003

[19] H.P. Rustamov, *O tochnosti gladkostnyh svojstv simvola mnogomernogo singuljarnogo operatora s nepreryvnoj harakteristikoj*, Deponirovanie VINITI, Baku, 1981, №5014-81 DEP.

[20] L.D. Shankishvili *Operatory tipa sfericheskogo potenciala kompleksnogo porjadka v obobshhjonnyh prostranstvah Gjol'dera*, Deponirovanie VINITI 23.03.98, №860-B98.

[21] B.G. Vakulov, *Spherical operators of potential type in generalized weighted Hölder spaces on a sphere*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki, **1999**:4 (1999), 5–10. Zbl 1014.31002

[22] B.G. Vakulov, N.K. Karapetians, L.D. Shankisdvili, *Spherical hypersingular operators of imaginary order and their multipliers*, Fract. Calc. Appl. Anal., **4**:1 (2001), 101–112. Zbl 1072.47513

[23] B.G. Vakulov, N.K. Karapetjanc, L.D. Shankishvili, *Spherical convolution operators with a power-logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Russ. Math., **47**:2 (2003), 1–12. Zbl 1076.42010

[24] B.G. Vakulov, G.S. Kostetskaya, Yu.E. Drobotov, *Riesz potentials in generalized Hölder spaces*, in *Handbook of research on in-country determinants and implications of foreign land acquisitions*, IGI Global, 2018, 249–273.

[25] B.G. Vakulov, Yu.E. Drobotov, *Riesz potential with logarithmic kernel in generalized Hölder spaces*, Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management, IGI Global, 2021, 275–296.

[26] B.G. Vakulov, Yu.E. Drobotov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, In Parinov, I.A., Chang, SH., Kim, YH., Noda, NA. (eds), *Physics and mechanics of new materials and their applications*, Springer, Cham, 2021, 147–159.

[27] Yu.E. Drobotov, B.G. Vakulov, *Smoothness properties of a Riesz potential type operator with logarithmic characteristic*, University News. North-Caucasus Region. Natural Sciences Series, **1** (2022), 4–11.

[28] Yu.E. Drobotov, B.G. Vakulov, *The Riesz potential type operator with a power-logarithmic kernel in the generalized Hölder spaces on a sphere*, Springer Proceedings in Materials, **20** (2023), 120–132.

[29] S.G. Samko, B. Ross, *Integration and differentiation to a variable fractional order*, Integral Transform. Spec. Funct, **1**:4 (1993), 277–300. Zbl 0820.26003

[30] S.G. Samko, *Fractional integration and differentiation of variable order*, Anal. Math., **21**:3 (1995), 213–236. Zbl 0838.26006

[31] B.G. Vakulov, E.S. Kochurov, *Fractional integrals and differentials of variable order in Hölder spaces $H^{\omega(x,t)}$*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **12**:4 (2010), 3–11. Zbl 1218.26006

[32] B.G. Vakulov, E.S. Kochurov, *Zygmund-type estimates for fractional integration and differentiation operators of variable order*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev. Kavk. Region. Estestv. Nauki, Specvypusk (2011), 15–17.

[33] B. G. Vakulov, E. S. Kochurov, N. G. Samko, *Zygmund-type estimates for fractional integration and differentiation operators of variable order*, Russian Mathematics, **55**:6 (2011), 20–28. Zbl 1266.47053

[34] S.G. Samko, *Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$*, Contemporary Mathematics, **212** (1998), 203–219.

[35] B.G. Vakulov, S.G. Samko, *A weighted Sobolev theorem for spatial and spherical potentials in Lebesgue spaces with variable exponents*, Dokl. Math., **72**:1 (2005), 487–490. Zbl 1124.31003

[36] S. Samko, E. Shargorodsky, B. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem with variable exponent for spatial and spherical potential operators, II*, J. Math. Anal. Appl., **325**:1 (2007), 745–751. Zbl 1107.47016
[37] N.G. Samko, S.G. Samko, B.G. Vakulov, *Weighted Sobolev theorem in Lebesgue spaces with variable exponent*, J. Math. Anal. Appl., **335**:1 (2007), 560–583. Zbl 1142.46018
[38] A.I. Ginsburg, N.K. Karapetyants, *Fractional integrodifferentiation in Hölder classes of variable order*, Russ. Acad. Sci., Dokl., Math., **50**:3 (1995), 441–444. Zbl 0884.26006
[39] B. Ross, S.G. Samko, *Fractional integration operator of a variable order in the Hölder spaces $H^{\lambda(x)}$*, Int. J. Math. Math. Sci., **18**:4 (1995), 777–788. Zbl 0838.26005
[40] B.G. Vakulov, *Spherical operators of potential type in weighted Holder spaces of variable order*, Vladikavkaz. Mat. Zh., **7**:2 (2005), 26–40. Zbl 1299.42047
[41] B.G. Vakulov, *Spherical potentials in weighted Hölder spaces of variable order*, Doklady Mathematics, **71**:1 (2005), 1–4.
[42] B.G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in the variable order Hölder spaces*, Integral Transforms Spec. Funct., **16**:5-6 (2005), 489–497. Zbl 1077.46019
[43] B.G. Vakulov, *Spherical convolution operators in spaces of variable Hölder order*, Math. Notes, **80**:5 (2006), 645–657. Zbl 1139.47027
[44] B.G. Vakulov, Yu.E. Drobotov, *Riesz potential with integrable density in Hölder-variable spaces*, Math. Notes, **108**:5 (2020), 652–660. Zbl 1454.42021
[45] B.G. Vakulov, *Spherical potentials of complex order in generalized Hölder spaces of variable order*, Doklady Akademii Nauk, **407**:1 (2006), 12–15.
[46] N. Samko, B. Vakulov, *Spherical fractional and hypersingular integrals of variable order in generalized Hölder spaces with variable characteristic*, Math. Nachr., **284**:2-3 (2011), 355–369. Zbl 1220.46018
[47] B.G. Vakulov, Yu.E. Drobotov, *Variable order Riesz potential over $\dot{\mathbb{R}}^n$ on weighted generalized variable Hölder spaces*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **14** (2017), 647–656. Zbl 1375.31007
[48] B.G. Vakulov, N.G. Samko, S.G. Samko, *Operatory tipa potenciala i gipersingulyarnye integraly v prostranstvah Gyol'dera peremennogo poryadka na odnorodnyh prostranstvah*, Izv. Vuzov. Sev. Kavk. Region. Estestv. Nauki. Specvypusk, (2009), 40–45.
[49] N. Samko, S. Samko, B. Vakulov, *Fractional integrals and hypersingular integrals in variable order Hölder spaces on homogeneous spaces*, J. Funct. Spaces Appl., **8**:3 (2010), 215–244. Zbl 1211.46024
[50] S.G. Samko, *Potential operators in generalized Hölder spaces on sets in quasi-metric measure spaces without the cancellation property*, Nonlinear

Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, **78** (2013), 130–140. Zbl 1269.46017

[51] A. Karapetyants, S. Samko, *Variable order fractional integrals in variable generalized Hölder spaces of holomorphic functions*, Anal. Math. Phys., **11**:4 (2021), Paper No. 156. Zbl 7420453

[52] E.D. Kosov, *A characterization of Besov classes in terms of a new modulus of continuity*, Dokl.Math., **96**:3 (2017), 587–590. Zbl 1393.46026

[53] E.D. Kosov, *Besov classes on finite and infinite dimensional spaces*, Sb. Math., **210**:5 (2019), 663–692. Zbl 1434.46021

[54] M.L. Gol'dman, E.G. Bakhtigareeva, *Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces*, Math. Methods Appl. Sci., **43**:16 (2020), 9435–9447. Zbl 1466.46017

[55] S.G. Samko, S.M. Umarkhadzhiev, *Grand Morrey type spaces*, Vladikavkaz. Math. J., **22**:4 (2020), 104–118. Zbl 1474.46066

[56] O.G. Avsyankin, *On integral operators with homogeneous kernels in Morrey spaces*, Eurasian Math. J., **12**:1 (2021), 92–96. Zbl 1474.47089

[57] V.I. Burenkov, M.A. Senouci, *Boundedness of the generalized Riesz potential in local Morrey type spaces*, Eurasian Math. J., **12**:4 (2021), 92–98. Zbl 1511.42022

[58] V.I. Burenkov, E.D. Nursultanov, *Interpolation theorems for nonlinear operators in general Morrey-type spaces and their applications*, Proc. Steklov Inst. Math., **312**, 2021, 124–149. Zbl 1523.47059

[59] I. Ekincioglu, S.M. Umarkhadzhiev, *Oscillatory integrals with variable Calder/'on-Zygmund kernel on generalized weighted Morrey spaces*, Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., **42**:1 (2022), 99–110. Zbl 1513.42037

[60] S.M. Umarkhadzhiev, *Generalization of a notion of grand Lebesgue space*, Russ. Math., **58**:4 (2014), 35–43. Zbl 1314.46037

[61] S.M. Umarkhadzhiev, Yu.E. Drobotov, *Riesz potential in generalized grand Lebesgue space*, Bulletin Academy Sciences Chechen Republic, **2015**:4 (2015), 26–29.

[62] Yu.E. Drobotov, S.M. Umarkhadzhiev, *Riesz potential with homogeneous kernel in grand Lebesgue spaces on semi-axis*, Bulletin Academy Sciences Chechen Republic, **2018**:1 (2018), 18–25.

[63] S.M. Umarkhadzhiev, *On elliptic homogeneous differential operators in grand spaces*, Russ. Math., **64**:3 (2020), 57–65. Zbl 1442.35094

[64] S.M. Umarkhadzhiev, *Unilateral ball potentials in grand Lebesgue spaces*, In: Karapetyants (ed.) et al., *Operator theory and harmonic analysis*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **357**, Springer, Cham, 2021, 569–576.

[65] S.G. Samko, S.M. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces*, Vladikavkaz. Math. J., **23**:4 (2021), 96–108. Zbl 1513.46056

[66] S.G. Samko, S.M. Umarkhadzhiev, *Weighted Hardy operators in grand Lebesgue spaces on* $\mathbb{R}^n$, J. Math. Sci., New York, **268**:4 (2022), 509–522. Zbl 1520.47088

[67] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Grand Lebesgue space for $p = \infty$ and its application to Sobolev-Adams embedding theorems in borderline cases*, Math. Nachr., **295**:5 (2022), 991–1007. Zbl 1535.46036

[68] H. Rafeiro, S. Samko, S. Umarkhadzhiev, *Local grand Lebesgue spaces on quasi-metric measure spaces and some applications*, Positivity, **26**:3 (2022), Paper No. 53. Zbl 1494.42029

[69] S.M. Umarkhadzhiev, *Embedding of grand central Morrey-type spaces into local grand weighted Lebesgue spaces*, J. Math. Sci., New York, **266**:3, Series A (2022), 483–490. Zbl 1543.46022

[70] V.E. Tarasov *Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, Berlin, 2010. Zbl 1214.81004

[71] I.A. Parinov, S.V. Zubkov, A.S. Skaliukh, V.A. Chebanenko, A.V. Cherpakov , Yu.E. Drobotov, *Advanced ferroelectric and piezoelectric materials: With improved properties and their applications*, World Scientific, 2024.

[72] V.N. Berestovskii, *Submetries of space forms of negative curvature*, Sib. Math. J., **28**:4 (1987), 552–562. Zbl 0643.53053

[73] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934. JFM 60.0169.01

[74] S.L. Sobolev, *Introduction to the theory of cubature formulas*, Nauka, Moscow, 1974. Zbl 0294.65013

Yuri Evgenievich Drobotov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences I.I. Vorovich,
ul. Milchakova, 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
North-Caucasus Center for Mathematical Research of the Vladikavkaz Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences,
ul. Vil'yamsa, 1,
363110, RSO-Alaniya, Prigorodnyj rajon, s.Mihajlovskoe, Russia
Don State Technical University,
Gagarina squ., 1,
344000, Rostov-on-Don, Russia
Email address: yu.e.drobotov@yandex.ru

Boris Grigorievich Vakulov
Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences I.I. Vorovich,
Milchakova str., 8a,
344090, Rostov-on-Don, Russia
Email address: bvak1961@bk.ru