S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 978–989 (2024) УДК 517.521
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.065 MSC 41A10

О РАВНОМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ СРЕДНИХ ВАЛЛЕ ПУССЕНА ПО СИСТЕМЕ ПОЛИНОМОВ МЕЙКСНЕРА

Р.М. Гаджимирзаев

Представлено Е.С. Дубцовым

Abstract: Approximation properties of the de la Vallée Poussin means $V_{n+m,N}^{\alpha}(f,x)$ of Fourier–Meixner sums are studied. In particular, for $an \le m \le bn$ and $n+m \le \lambda N$ the existence of a constant $c(a,b,\alpha,\lambda)$ is established such that $\|V_{n+m,N}^{\alpha}(f)\| \le c(a,b,\alpha,\lambda)\|f\|$, where $\|f\|$ is the uniform norm of the function f on the grid Ω_δ.

Keywords: approximation properties, Meixner polynomials, Fourier series, de la Vallée Poussin means.

1 Введение

Пусть $N>0$, $\delta=1/N$, $\Omega_\delta=\{0,\delta,\ldots\}$. Через $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ обозначим полиномы Мейкснера, образующие при $\alpha>-1$ ортонормированную систему на множестве Ω_δ относительно веса

$$\rho(x)=e^{-x}\frac{\Gamma(Nx+\alpha+1)}{\Gamma(Nx+1)}(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}.$$

Gadzhimirzaev R.M., On the uniform boundedness of Vallée Poussin means in the system of Meixner polynomials.

Поступила 14 мая 2024 г., опубликована 1 ноября 2024 г.

Рассмотрим пространство функций $C_0(\Omega_\delta)$, заданных на сетке Ω_δ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}}|f(x)| = 0.$$

Норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|f\| = \sup_{x\in\Omega_\delta} e^{-\frac{x}{2}}|f(x)|.$$

Сумму Фурье–Мейкснера функции $f \in C_0(\Omega_\delta)$ запишем в виде

$$S^\alpha_{n,N}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c^\alpha_k(f) m^\alpha_{k,N}(x), \tag{1}$$

где

$$c^\alpha_k(f) = \sum_{t\in\Omega_\delta} f(t) m^\alpha_{k,N}(t)\rho(t). \tag{2}$$

Впервые аппроксимативные свойства сумм $S^\alpha_{n,N}(f,x)$ были исследованы в работах [1, 2] при $\alpha = -1/2$ и $n = O(N)$. В частности, была получена оценка сверху для соответствующей функции Лебега. В работах [3, 4] этот результат был обобщен на случай $\alpha > -1$. При этом аппроксимативные свойства линейных средних сумм $S^\alpha_{n,N}(f,x)$ все еще не исследованы. В настоящей работе в качестве аппарата приближения функций из $C_0(\Omega_\delta)$ рассматриваются средние Валле Пуссена

$$V^\alpha_{n+m,N}(f,x) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m} S^\alpha_{k,N}(f,x). \tag{3}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $f \in C_0(\Omega_\delta)$, $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$, $\lambda > 0$, a и b фиксированные действительные числа, причем $0 < a \le b$. Тогда для $an \le m \le bn$ и $n + m \le \lambda N$ имеет место неравенство*

$$\|V^\alpha_{n+m,N}(f)\| \le c(a,b,\alpha,\lambda)\|f\|.$$

Замечание 1. *Ограниченность средних $V^\alpha_{n+m,N}(f,x)$ по норме пространства $C_0(\Omega_\delta)$ при $\alpha \ge \frac{1}{2}$ остается открытой.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекает оценка

$$e^{-\frac{x}{2}}|f(x) - V^\alpha_{n+m,N}(f,x)| \le c(a,b,\alpha,\lambda)E_n(f), \tag{4}$$

где $E_n(f) = \inf_{p_n\in H^n}\|f - p_n\|$ – величина наилучшего приближения функции f алгебраическими полиномами степени не выше n. Здесь и далее через c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\lambda,s)$ мы будем обозначать положительные числа, зависящие только от указанных параметров, причем различные в разных местах.

Отметим, что в работах [5]–[9] были исследованы аналогичные задачи о приближении функций посредством средних Валле Пуссена частичных сумм ряда Фурье по различным ортогональным системам. В частности, в [5] были рассмотрены средние Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби

$$\mathcal{V}_{n,m}^{\alpha,\beta}(f,x) = \frac{1}{n+1}\left[S_m^{\alpha,\beta}(f,x) + \cdots + S_{m+n}^{\alpha,\beta}(f,x)\right]$$

и доказана следующая

Теорема A. *Пусть* $-1 < \alpha, \beta \leq 0$, a, b *- положительные числа* ($a \leq b$). *Тогда средние Валле Пуссена* $\mathcal{V}_{n,m}^{\alpha,\beta}(f,x)$ *равномерно относительно* $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ *ограничены как линейные операторы, действующие в пространстве* $C[-1,1]$.

Аналогичная теорема доказана в работе [6] в случае средних Валле Пуссена для сумм Фурье по дискретным полиномам Чебышева $T_n^{\alpha,\beta}\left(\frac{N-1}{2}(1+x), N\right)$ при $\alpha = \beta = 0$, $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ и $n = O(\sqrt{N})$. Далее, в [7] были рассмотрены дискретные полиномы Якоби $P_0^{\alpha,\beta}(x), P_1^{\alpha,\beta}(x), \ldots,$ $P_{N-1}^{\alpha,\beta}(x)(N = 1, 2, \ldots)$, которые образуют ортогональную относительно веса $\mu(x)$ систему на сетке $\Omega_N = \{x_1, \ldots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. При $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $a \leq \frac{m}{n} \leq b$ и $n = O(N)$ была доказана равномерная ограниченность в $C[-1,1]$ нормы операторов Валле Пуссена $v_{n,m,N}^{\alpha,\beta}(f)$ частичных сумм ряда Фурье по полиномам $\{P_k^{\alpha,\beta}(x)\}_{k=0}^{N-1}$. В работах [8, 9] было исследовано приближение функций по норме пространства Лебега L_w^p, $w(x)$ – вес типа Якоби, средними Валле Пуссена для сумм Фурье–Якоби. В [8] также был рассмотрен вопрос об ограниченности средних Валле Пуссена $\mathcal{V}_{2n}^{\alpha}(f,x)$ для сумм Фурье–Лагерра. В частности была доказана

Теорема B. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $u(x) = x^\gamma e^{-x/2}$, $\alpha > -1$ *и* $\max\{\alpha/2 - 1/4, 0\} < \gamma + 1/p < \min\{\alpha/2 + 7/6, \alpha + 1\}$. *Тогда для любого* $f \in L_u^p$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{V}_{2n}^{\alpha}(f)\|_{L_u^p} \leq c\|f\|_{L_u^p}, \ c \neq c(n,f).$$

2 Некоторые сведения о полиномах Мейкснера

Приведем некоторые свойства полиномов Мейкснера $M_{n,N}^{\alpha}(x)$, которые можно найти в [10]. Полиномы $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ можно определить с помощью равенства

$$M_{n,N}^{\alpha}(x) = \binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(-Nx)_k}{(\alpha+1)_k k!}(1-e^{\delta})^k, \tag{5}$$

в котором $(n)_k = n(n+1)\cdots(n+k-1)$. При $\alpha > -1$ полиномы $M_{n,N}^{\alpha}(x)$ ортогональны относительно веса $\rho(x)$:

$$\sum_{x\in\Omega_\delta} M_{n,N}^{\alpha}(x)M_{k,N}^{\alpha}(x)\rho(x) = h_n^{\alpha}\delta_{nk},$$

где δ_{nk} – символ Кронекера, $h_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} e^{n\delta}\Gamma(\alpha+1)$. Формула Кристоффеля–Дарбу для этих полиномов имеет вид

$$K_{n,N}^\alpha(t,x) = \sum_{k=0}^{n} m_{k,N}^\alpha(t) m_{k,N}^\alpha(x) =$$
$$\frac{\delta\sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}}{e^{\frac{\delta}{2}} - e^{-\frac{\delta}{2}}} \frac{m_{n+1,N}^\alpha(t) m_{n,N}^\alpha(x) - m_{n,N}^\alpha(t) m_{n+1,N}^\alpha(x)}{x-t}. \quad (6)$$

В работах [10, 11] при $0 < \delta \le 1$, $\lambda > 0$, $1 \le n \le \lambda N$, $\alpha > -1$, $0 \le x < \infty$, $s \ge 0$, $\theta_n = 4n + 2\alpha + 2$ была получена весовая оценка:

$$e^{-\frac{x}{2}} \left| M_{n,N}^\alpha(x \pm s\delta) \right| \le c(\alpha,\lambda,s) A_n^\alpha(x), \quad (7)$$

где

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} \theta_n^\alpha, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta_n}, \\ \theta_n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta_n} < x \le \frac{\theta_n}{2}, \\ \left[\theta_n(\theta_n^{\frac{1}{3}} + |x-\theta_n|)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta_n}{2} < x \le \frac{3\theta_n}{2}, \\ e^{-\frac{x}{4}}, & \frac{3\theta_n}{2} < x < \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Приведем еще одно свойство полиномов Мейкснера, которое представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $\alpha > -1$, $\lambda > 0$, $1 \le n \le \lambda N$, $0 \le x \le \frac{\lambda(\alpha+1)}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}n}$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{n,N}^\alpha(x) \ge \frac{1}{2}\binom{n+\alpha}{n}.$$

Доказательство. Так как $(-n)_k = (-1)^k n(n-1)\cdots(n-k+1) = (-1)^k n^{[k]}$, $(-Nx)_k = (-1)^k (Nx)^{[k]}$, то из (5) имеем

$$2M_{n,N}^\alpha(x) - \binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n} + 2\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^{[k]}(Nx)^{[k]}}{(\alpha+1)_k k!}(1-e^\delta)^k. \quad (9)$$

Далее, нам понадобится некоторая информация о числах Стирлинга первого рода $s(n,k)$, $0 \le k \le n$, которые могут быть определены из равенства [12, стр.824]

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k. \quad (10)$$

В частности, $s(0,0) = s(n,n) = 1$, $s(n,0) = 0$ при $n \ge 1$. Числа $s(n,k)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \ 1 \le k < n.$$

Кроме того, для $s(n,k)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} |s(n,k)| = 1. \quad (11)$$

Таким образом, из (9) и (10) получаем

$$2M_{n,N}^{\alpha}(x) - \binom{n+\alpha}{n} \geq$$
$$\binom{n+\alpha}{n} - 2\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k(e^{\delta}-1)^k}{(\alpha+1)_k}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}|s(k,j)|(Nx)^j \geq$$
$$\binom{n+\alpha}{n} - 2\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(e^{\delta}-1)^k}{(\alpha+1)_k\delta^k}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}|s(k,j)|\frac{\lambda^j(\alpha+1)^j}{e^{2(\lambda+\alpha+1)j}}n^{k-j}N^{j-k}.$$

Так как $(\alpha+1)_k = (\alpha+1)\cdots(\alpha+k) > (\alpha+1)\cdot(k-1)!$, $\frac{(e^{\delta}-1)^k}{\delta^k} < e^{k\delta}$, $\frac{\alpha+1}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}} < 1$ и $n^{k-j}N^{j-k} \leq \lambda^{k-j}$, то с учетом (11) мы можем записать

$$2M_{n,N}^{\alpha}(x) - \binom{n+\alpha}{n} \geq \binom{n+\alpha}{n} - \frac{2\lambda(\alpha+1)}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}(\alpha+1)}\binom{n+\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \geq$$
$$\binom{n+\alpha}{n} - \frac{2(\alpha+1)\lambda e^{\lambda}}{e^{2(\lambda+\alpha+1)}}\binom{n+\alpha}{n} = \binom{n+\alpha}{n} - \frac{\lambda}{e^{\lambda}}\frac{2(\alpha+1)}{e^{2(\alpha+1)}}\binom{n+\alpha}{n} \geq 0.$$

□

3 Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 2. [4] *Пусть* $-1 < \alpha \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $N = 1/\delta$, $0 < \delta \leq 1$. *Тогда для* $1 \leq n \leq \lambda N$ *имеет место следующая оценка*

$$e^{-x}K_{n,N}^{\alpha}(x,x) \leq c(\alpha,\lambda)\begin{cases} n^{1-\alpha}(A_n^{\alpha}(x))^2, & x \in [0,\frac{\theta_n}{2}] \cup [\frac{3\theta_n}{2},\infty), \\ n^{-\alpha}, & x \in [\frac{\theta_n}{2},\frac{3\theta_n}{2}]. \end{cases}$$

Следующие леммы доказаны в работе [13].

Лемма 3. *Пусть* $x \neq y$. *Тогда для*

$$\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}K_{k,N}^{\alpha}(x,y)$$

имеет место равенство

$$
\begin{gathered}
\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y) = -\frac{\delta}{(e^{\delta}-1)e^{(n-1)\delta}}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{1}{(x-y)^2}\cdot \\
\Big\{xM_{n,N}^{\alpha}(x-\delta)M_{n,N}^{\alpha}(y)+yM_{n,N}^{\alpha}(x)M_{n,N}^{\alpha}(y-\delta)- \\
\frac{x}{n}M_{n,N}^{\alpha}(y)\Big[\frac{e^{\delta}(x-\delta)}{x-y-\delta}M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x-2\delta)+\alpha M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x-\delta)\Big]- \\
\frac{y}{n}M_{n,N}^{\alpha}(x)\Big[\alpha M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y-\delta)-\frac{e^{\delta}(y-\delta)}{x-y+\delta}M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y-2\delta)\Big]+ \\
\frac{xy}{n}\Big[\frac{e^{\delta}}{x-y-\delta}+\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\Big]M_{n,N}^{\alpha}(x-\delta)M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y-\delta)- \\
\frac{xy}{n}\Big[\frac{e^{\delta}}{x-y+\delta}-\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\Big]M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x-\delta)M_{n,N}^{\alpha}(y-\delta)+ \\
\frac{2xy}{n}\frac{e^{\delta}-1}{\delta}M_{n-1,N}^{\alpha+1}(x-\delta)M_{n-1,N}^{\alpha+1}(y-\delta)\Big\}.
\end{gathered}
$$

Лемма 4. *Если* $x>0$, $y>0$ *и* $|x-y|\ge\frac{\theta_n}{4}$, *то*

$$e^{-\frac{x+y}{2}}|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)|\le c(\alpha,\lambda)\theta_n^{-(\alpha+1)}A_n^{\alpha}(x)A_n^{\alpha}(y).$$

Лемма 5. *Если* $0<x,y<\frac{\theta_n}{2}$ *и* $x>2y$ $(y>2x)$, *то*

$$e^{-\frac{x+y}{2}}|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)|\le\frac{c(\alpha,\lambda)\theta_n^{-\alpha}}{\max(x,y)}A_n^{\alpha}(x)A_n^{\alpha}(y).$$

Лемма 6. *Если* $x\in\left[\frac{2}{\theta_n},\frac{\theta_n}{2}\right]$, $y\in\left[\frac{1}{\theta_n},\frac{3\theta_n}{4}\right]$ *и* $|x-y|\ge\sqrt{\frac{x}{\theta_n}}$, *то*

$$e^{-\frac{x+y}{2}}|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)|\le\frac{c(\alpha,\lambda)(xy)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+y)}{\sqrt{n}(x-y)^2}.$$

Лемма 7. *Если* $\frac{\theta_n}{4}\le x,y\le\frac{7\theta_n}{2}$ *и* $|x-y|>1$, *то*

$$e^{-\frac{x+y}{2}}|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,y)|\le\frac{c(\alpha,\lambda)\theta_n^{-\alpha}}{|x-y|^{\frac{3}{2}}}.$$

4 Доказательство теоремы 1

Из (1)–(3) имеем

$$V_{n+m}^{\alpha}(f,x)=\sum_{t\in\Omega_\delta}f(t)\rho(t)\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}\sum_{j=0}^{k}m_{j,N}^{\alpha}(x)m_{j,N}^{\alpha}(t).$$

Отсюда

$$e^{-\frac{x}{2}}|V_{n+m}^{\alpha}(f,x)|\le\|f\|\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x),$$

где

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x)=(1-e^{-\delta})^{\alpha+1}\sum_{t\in\Omega_\delta}e^{-\frac{x+t}{2}}\frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}\frac{1}{m+1}\left|\sum_{k=n}^{n+m}K_{k,N}^{\alpha}(x,t)\right|.$$

Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что при $x\in[0,\infty)$ и $-1<\alpha<1/2$ имеет место равномерная оценка

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x)\le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{12}$$

Пусть $x\in\left[0,\frac{2}{\theta_n}\right]$. Так как $\frac{\Gamma(Nt+\alpha+1)}{\Gamma(Nt+1)}\le c(\alpha)(Nt+1)^{\alpha}=c(\alpha)N^{\alpha}(t+\delta)^{\alpha}$, то мы можем записать

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x)\le c(\alpha)\delta\left[\sum_{t\in B_1}+\sum_{t\in B_2}\right](t+\delta)^{\alpha}\frac{e^{-\frac{x+t}{2}}}{m+1}\left|\sum_{k=n}^{n+m}K_{k,N}^{\alpha}(x,t)\right|=I_1+I_2, \tag{13}$$

где $B_1=[0,4/\theta_n]\cap\Omega_\delta$, $B_2=(4/\theta_n,\infty)\cap\Omega_\delta$. Из (6) и (7) имеем

$$I_1\le c(\alpha,\lambda)\frac{\delta}{m+1}\sum_{t\in B_1}(t+\delta)^{\alpha}\sum_{k=n}^{n+m}\sum_{j=0}^{k}\theta_j^{\alpha}\le$$
$$c(\alpha,\lambda)\frac{\theta_{n+m}^{\alpha+2}}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{14}$$

Для оценки I_2 воспользуемся равенством

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=n}^{n+m}K_{k,N}^{\alpha}(x,t)=\frac{n+m+1}{m+1}\mathcal{K}_{n+m+1,N}^{\alpha}(x,t)-\frac{n}{m+1}\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,t). \tag{15}$$

Тогда

$$I_2\le c(b,\alpha)\delta\sum_{t\in B_2}(t+\delta)^{\alpha}e^{-\frac{x+t}{2}}\left(|\mathcal{K}_{n+m+1,N}^{\alpha}(x,t)|+|\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,t)|\right)=I_{21}+I_{22}.$$

Величины I_{21} и I_{22} оцениваются по одной и той же схеме, поэтому ограничимся оценкой I_{21}. Пусть $B_3=(4/\theta_n,\theta_{n+m+1}/2)\cap\Omega_\delta$. Тогда

$$I_{21}=c(b,\alpha)\delta\left(\sum_{t\in B_3}+\sum_{t\in B_2\setminus B_3}\right)(t+\delta)^{\alpha}e^{-\frac{x+t}{2}}|\mathcal{K}_{n+m+1,N}^{\alpha}(x,t)|=I_{21}^{1}+I_{21}^{2}.$$

Из лемм 4 и 5 получаем:

$$I_{21}^{1}\le c(b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha}A_{n+m+1}^{\alpha}(x)\delta\sum_{t\in B_3}\frac{t^{\alpha}A_{n+m+1}^{\alpha}(t)}{\max(x,t)}\le$$
$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\delta\sum_{t\in B_3}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}\le c(a,b,\alpha,\lambda),$$

$$I_{21}^2 \le c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha-1} A_{n+m+1}^{\alpha}(x)\delta \sum_{t\in B_2\setminus B_3} t^{\alpha} A_{n+m+1}^{\alpha}(t) \le$$

$$c(a,b,\alpha,\lambda)n^{-\frac{5}{4}}\left(n^{\alpha}n^{\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3n}{4}}\right) \le c(a,b,\alpha,\lambda)n^{\alpha-\frac{1}{2}} \le c(a,b,\alpha,\lambda).$$

Из (13), (14) и оценок для I_{21}^1, I_{21}^2 выводим

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) \le c(a,b,\alpha,\lambda), \quad x \in \left[0, \frac{2}{\theta_n}\right].$$

Пусть теперь $x \in [2/\theta_n, \theta_{n+m+1}/2]$. Пользуясь равенством (15), мы можем записать

$$\Lambda_{n,m}^{\alpha}(x) \le c(b)\delta \sum_{t\in\Omega_\delta} (t+\delta)^{\alpha} e^{-\frac{x+t}{2}} \left(|\mathcal{K}_{n+m+1,N}^{\alpha}(x,t)| + |\mathcal{K}_{n,N}^{\alpha}(x,t)|\right) = J_1 + J_2.$$

Для оценки величины J_1 введем обозначения:

$$D_1 = [0, x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}] \cap \Omega_\delta,\ D_2 = (x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, x + \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}) \cap \Omega_\delta,$$

$$D_3 = (x + \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, 3\theta_{n+m+1}/4] \cap \Omega_\delta,\ D_4 = (3\theta_{n+m+1}/4, \infty) \cap \Omega_\delta.$$

С учетом этих обозначений запишем J_1 в следующем виде

$$J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13} + J_{14}, \tag{16}$$

в котором

$$J_{1i} = c(b)\delta \sum_{t\in D_i} (t+\delta)^{\alpha} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_{n+m+1,N}^{\alpha}(x,t)|,\ \ i = 1,2,3,4.$$

Оценим J_{11}. Пусть $D_1^1 = [0, 1/\theta_n] \cap \Omega_\delta$, $D_1^2 = (1/\theta_n, x - \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}] \cap \Omega_\delta$. Тогда из лемм 5 и 6 получим

$$J_{11} \le c(b,\alpha,\lambda)\delta \sum_{t\in D_1^1} (t+\delta)^{\alpha} \frac{\theta_{n+m+1}^{-\alpha}}{\max(x,t)} A_{n+m+1}^{\alpha}(x) A_{n+m+1}^{\alpha}(t) +$$

$$c(b,\alpha,\lambda)\delta \sum_{t\in D_1^2} (t+\delta)^{\alpha} \frac{(xt)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(x+t)}{\sqrt{n+m+1}(x-t)^2} \le$$

$$c(b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} \delta \sum_{t\in D_1^1} (t+\delta)^{\alpha} +$$

$$c(b,\alpha,\lambda)\frac{x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}{\sqrt{n+m+1}} \delta \sum_{t\in D_1^2} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(x-t)^2} \le c(a,b,\alpha,\lambda) +$$

$$\frac{c(b,\alpha,\lambda)x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{n+m+1}} \frac{\delta}{x} \left(\sum_{\frac{1}{x\theta_n} \le y \le \frac{1}{3}} + \sum_{\frac{1}{3} \le y \le 1 - \sqrt{\frac{1}{x\theta_{n+m+1}}}} \right) \frac{y^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(1-y)^2} \le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{17}$$

Для оценки J_{12} применим к $K^{\alpha}_{k,N}(x,t)$ неравенство Коши–Буняковского и воспользуемся леммой 2:

$$J_{12} \le \frac{c(a,b)}{n+m+1}\delta \sum_{t\in D_2}(t+\delta)^{\alpha}e^{-\frac{x+t}{2}}K^{\alpha}_{0,N}(x,t)+$$

$$\frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{n+m+1}\delta\sum_{t\in D_2}(t+\delta)^{\alpha}\sum_{k=1}^{n+m}k^{1-\alpha}\theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14} \le$$

$$\frac{c(a,b,\alpha)x^{\alpha}}{n+m+1}\sqrt{\frac{x}{\theta_{n+m+1}}}+c(a,b,\alpha,\lambda)(n+m)^{\frac12}x^{-\frac12}\sqrt{\frac{x}{\theta_{n+m+1}}} \le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{18}$$

Чтобы оценить величину J_{13}, введем обозначения:

$$D_3^1 = (x+\sqrt{x/\theta_{n+m+1}}, 3x/2]\cap\Omega_\delta, D_3^2 = (3x/2, 3\theta_{n+m+1}/4]\cap\Omega_\delta.$$

Заметим, что $t-x \ge \sqrt{x/\theta_{n+m+1}}$ при $x\in[2/\theta_n, \theta_{n+m+1}/2]$ и $t\in D_3$. Тогда из леммы 6 получим

$$J_{13} \le \frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{\sqrt{n+m+1}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{t\in D_3}\frac{(t+\delta)^{\alpha}(x+t)t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}}{(x-t)^2} \le$$

$$\frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{\sqrt{n+m+1}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{t\in D_3}\frac{t^{\frac{\alpha}{2}+\frac34}}{(x-t)^2} \le \frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{\sqrt{n+m+1}}\sqrt{x}\delta\sum_{t\in D_3^1}\frac{1}{(t-x)^2}+$$

$$\frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{\sqrt{n+m+1}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{t\in D_3^2}t^{\frac{\alpha}{2}-\frac54} \le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{19}$$

Перейдем теперь к оценке J_{14}. Пусть $D_4^1 = (3\theta_{n+m+1}/4, 3\theta_{n+m+1}/2]\cap\Omega_\delta$, $D_4^2 = (3\theta_{n+m+1}/2,\infty)\cap\Omega_\delta$. Тогда из леммы 4 и равенства (8) имеем

$$J_{14} \le c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-(\alpha+1)}A^{\alpha}_{n+m+1}(x)\delta\sum_{t\in D_4}(t+\delta)^{\alpha}A^{\alpha}_{n+m+1}(y) \le$$

$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\frac{\alpha}{2}-\frac54}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\theta_{n+m+1}^{\alpha-\frac14}\delta\sum_{t\in D_4^1}\frac{1}{(\theta_{n+m+1}^{\frac13}+|t-\theta_{n+m+1}|)^{\frac14}}+$$

$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\frac{\alpha}{2}-\frac54}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\delta\sum_{t\in D_4^2}t^{\alpha}e^{-\frac{t}{4}} \le$$

$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{\frac{\alpha}{2}-\frac32}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\left(\theta_{n+m+1}^{\frac34}+e^{-\frac{3n}{4}}\right) \le c(a,b,\alpha,\lambda). \tag{20}$$

Из (16)–(20) получаем следующую оценку

$$J_1 \le c(a,b,\alpha,\lambda).$$

А поскольку для J_2 справедлива аналогичная оценка, то

$$\Lambda^{\alpha}_{n,m}(x) \le c(a,b,\alpha,\lambda),\ x\in\left[\frac{2}{\theta_n}, \frac{\theta_{n+m+1}}{2}\right].$$

Рассмотрим случай, когда $x \in (\theta_n/2, 3\theta_{n+m+1}/2]$. Величину J_1 запишем в виде

$$J_1 = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5, \tag{21}$$

в котором

$$H_i = c(a,b)\delta \sum_{G_i} (t+\delta)^\alpha e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}^\alpha_{n+m+1,N}(x,t)|, \quad i = 1,2,3,4,5,$$

$G_1 = [0, x - \theta_{n+m+1}/4] \cap \Omega_\delta$, $G_2 = (x - \theta_{n+m+1}/4, x-1) \cap \Omega_\delta$, $G_3 = [x-1, x+1] \cap \Omega_\delta$, $G_4 = (x+1, x+\theta_{n+m+1}/4) \cap \Omega_\delta$, $G_5 = [x+\theta_{n+m+1}/4, \infty) \cap \Omega_\delta$. Для величины H_3 справедлива оценка (18). Чтобы оценить величины H_1 и H_5, воспользуемся леммой 4 и равенством (8):

$$H_1 \le \frac{c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{5}{4}}}{(\theta_{n+m+1}^{\frac{1}{3}} + |x - \theta_{n+m+1}|)^{\frac{1}{4}}} \delta \sum_{t\in G_1} (t+\delta)^\alpha A^\alpha_{n+m+1}(t) \le$$
$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{\theta_{n+m+1}} + \theta_{n+m+1}^{\alpha+\frac{1}{2}} \right) \le c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\frac{5}{6}},$$

$$H_5 \le c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \delta \sum_{t\in G_5} (t+\delta)^\alpha A^\alpha_{n+m+1}(t) \le$$
$$c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\alpha-\frac{4}{3}} \left(\theta_{n+m+1}^{\alpha-\frac{1}{4}} \theta_{n+m+1}^{\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3n}{4}} \right) \le c(a,b,\alpha,\lambda)\theta_{n+m+1}^{-\frac{5}{6}}.$$

С помощью леммы 7 оценим величины H_2 и H_4:

$$H_2 \le \frac{c(a,b,\alpha,\lambda)}{\theta^\alpha_{n+m+1}} \delta \sum_{t\in G_2} \frac{(t+\delta)^\alpha}{(x-t)^{\frac{3}{2}}} \le c(a,b,\alpha,\lambda)\delta \sum_{t\in G_2} (x-t)^{-\frac{3}{2}} \le c(a,b,\alpha,\lambda),$$

$$H_4 \le c(a,b,\alpha,\lambda)\delta \sum_{t\in G_4} (t-x)^{-\frac{3}{2}} \le c(a,b,\alpha,\lambda).$$

Из оценок для H_i и равенства (21) имеем

$$J_1 \le c(a,b,\alpha,\lambda).$$

Следовательно,

$$\Lambda^\alpha_{n,m}(x) \le c(a,b,\alpha,\lambda), \quad x \in \left(\frac{\theta_{n+m+1}}{2}, \frac{3\theta_{n+m+1}}{2} \right].$$

Пусть $x \in (3\theta_{n+m+1}/2, \infty)$. В силу неравенства Коши–Буняковского мы можем записать

$$\Lambda^\alpha_{n,m}(x) \le \frac{1}{m+1} \delta \sum_{t\in\Omega_\delta} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} \left(e^{-x} K^\alpha_{k,N}(x,x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{-t} K^\alpha_{k,N}(t,t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Из леммы 2 получим

$$\Lambda^\alpha_{n,m}(x) \le c(\alpha,\lambda) \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{m+1} \delta \sum_{t\in\Omega_\delta} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} \left(e^{-t} K^\alpha_{k,N}(t,t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $E_1 = [0, 1/\theta_n] \cap \Omega_\delta$, $E_2 = (1/\theta_n, \theta_{n+m}/2] \cap \Omega_\delta$,
$E_3 = (\theta_{n+m}/2, 3\theta_{n+m}/2] \cap \Omega_\delta$, $E_4 = (3\theta_{n+m}/2, \infty) \cap \Omega_\delta$. Тогда

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \le c(\alpha, \lambda) \frac{e^{-\frac{x}{4}}}{m+1} \left(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4\right), \tag{22}$$

где

$$\mathcal{H}_1 \le c(\alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in E_1} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} \theta_k^\alpha \le c(\alpha, \lambda) \frac{(n+m)^2}{\theta_n^{\alpha+1}} \le c(a, b, \alpha, \lambda) n^{1-\alpha},$$

$$\mathcal{H}_2 \le c(\alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in E_2} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} \theta_k^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} t^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \le$$
$$c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{7}{4}-\frac{\alpha}{2}} \delta \sum_{t \in E_2} t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \le c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{5}{2}},$$

$$\mathcal{H}_3 \le c(\alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in E_3} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}} k^{-\frac{\alpha}{2}} \le c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{5}{2}},$$

$$\mathcal{H}_4 \le c(\alpha, \lambda)\delta \sum_{t \in E_4} (t+\delta)^\alpha \sum_{k=n}^{n+m} k^{1-\alpha} e^{-\frac{t}{4}} \le c(a, b, \alpha, \lambda) n^{2-\alpha} e^{-\frac{3n}{4}}.$$

Из (22) и оценок для $\mathcal{H}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ находим

$$\Lambda_{n,m}^\alpha(x) \le c(a, b, \alpha, \lambda) n^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x}{4}}, \quad x \in \left(\frac{3\theta_{n+m+1}}{2}, \infty\right).$$

Тем самым доказана справедливость оценки (12).

References

[1] Z.D. Gadzhieva, *Mixed Series in Meixner Polynomials*, Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Saratov Gos. Univ., Saratov, 2004.

[2] Z.D. Gadzhieva, F.E. Esetov, M.N. Yuzbekova *Approximation properties of Fourier-Meixner sums on* $[0, \infty)$, Dagestan State Pedagogical University, J. Est.Toch. Nauki, **3(32)** (2015), 6–8.

[3] R.M. Gadzhimirzaev, *Approximative properties of Fourier-Meixner sums*, Probl. Anal. Issues Anal., **7(25)**:1 (2018), 23–40. Zbl 1428.41006

[4] R.M. Gadzhimirzaev, *Estimate of the Lebesgue function of Fourier sums in terms of modified Meixner polynomials*, Math. Notes, **106**:4 (2019), 526–536. Zbl 1447.42002

[5] I.I. Sharapudinov, I.A. Vagabov, *Convergence of the Vallée Poussin means for Fourier-Jacobi sums*, Math. Notes, **60**:4 (1996), 425–437. Zbl 0907.42018

[6] I.I. Sharapudinov, *Boundedness in* $C[-1, 1]$ *of the de la Vallée Poussin means for discrete Chebyshev-Fourier sums*, Sb. Math., **187**:1 (1996), 141–158. Zbl 0866.42017

[7] F.M. Korkmasov, *Approximate properties of the de la Vallée Poussin means for the discrete Fourier-Jacobi sums*, Sib. Math. J., **45**:2 (2004), 273–293. Zbl 1048.42026

[8] G. Mastroianni, W. Themistoclakis, *De la Vallée Poussin means and Jackson's theorem*, Acta Sci. Math., **74**:1-2 (2008), 147–170. Zbl 1174.41008

[9] W. Themistoclakis, *Weighted* L^1 *approximation on* $[-1, 1]$ *via discrete de la Vallée Poussin means*, Math. Comput. Simul., **147** (2018), 279–292. Zbl 1540.41028

[10] I.I. Sharapudinov, *Polynomials orthogonal on the grid. Theory and Applications*, DSU publishing, Makhachkala, 1997.
[11] I.I. Sharapudinov, *Asymptotics and weighted estimates of Meixner polynomials orthogonal on the gird* $\{0, \delta, 2\delta, \ldots\}$, Math. Notes, **62**:4 (1997), 501–512. Zbl 0919.33011
[12] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York, 1972. (MR0167642, 1964)
[13] R.M. Gadzhimirzaev, *Approximation properties of de la Vallée Poussin means of partial Fourier series in Meixner-Sobolev polynomials*, Mat. Sbornik, **215**:9 (2024), 77–98.

Ramis Makhmudovich Gadzhimirzaev
Department of Mathematics and Computer Science,
Dagestan Federal Research Center of the RAS,
st. M.Gadzhieva, 45,
367032, Makhachkala, Russia
Email address: ramis3004@gmail.com