S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 21, № 2, стр. 972–977 (2024) УДК 519.21
https://doi.org/10.33048/semi.2024.21.064 MSC 60G10

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ M-ОРТОГОНАЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАДАННЫМИ КОВАРИАЦИЯМИ

И.С. Борисов

Представлено Н.С. Аркашовым

Abstract: Necessary and sufficient conditions are studied for a covariance matrix of finite size to be interpreted as a covariance matrix of a finite segment of an infinite stationary sequence of random variables.

Keywords: stationary sequence, m-dependent random variables, covariance matrix.

1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – стационарная в широком смысле последовательность случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Напомним, что стационарность в широком смысле (в дальнейшем – стационарность) означает независимость коэффициентов корреляции $r(k) := \mathbf{E}\xi_l\xi_{l+k}$ от l для каждого фиксированного $k \geq 0$. Наша цель – получить необходимые и достаточные условия на набор $r(k)$, $k = 0, 1, \ldots, m$

Borisov, I.S., On the existence of stationary sequences of M-orthogonal random variables with specified covariances.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Поступила 29 сентября 2024 г., опубликована 1 ноября 2024 г.

при любом $m \geq 1$, гарантирующие существование стационарной последовательности m-ортогональных случайных величин, для которой данный набор совпадает с коэффициентами корреляции первых m членов этой последовательности. Напомним, что m-ортогональность определяется соотношением $r(k) = 0$ при всех $k > m$ (см. [1]). Понятно, для гауссовских стационарных последовательностей определение m-ортогональности равносильно классическому определению m-зависимости.

Скажем, при $m = 1$ эту задачу можно переформулировать следующим образом. Пусть на некотором вероятностном пространстве у нас задана пара центрированных случайных величин ξ_1 и ξ_2 с единичными вторыми моментами и ненулевым коэффициентом корреляции. Спрашивается, при каких ограничениях на указанный коэффициент корреляции можно достроить рассматриваемую пару случайных величин до 1-ортогональной стационарной (бесконечной) последовательности? Эта задача допускает и простую геометрическую интерпретацию. Пусть в некотором бесконечномерном евклидовом пространстве имеется пара неортогональных векторов единичной длины с некоторым "углом" (или фиксированным скалярным произведением) между ними. Спрашивается, при каких условиях на этот угол данную пару можно достроить до бесконечной системы векторов единичной длины, удовлетворяющих следующему условию: вновь построенный вектор с номером $j \geq 3$ будет ортогонален каждому из векторов с номерами от 1 до $j - 2$, а с вектором, имеющим номер $j - 1$, он будет составлять тот же угол, что и в исходной паре. Понятно, что соответствующее скалярное произведение двух исходных векторов по модулю не должно быть близким к 1. Например, для системы из трех векторов в R^3 эта задача решается элементарно: с необходимостью угол между исходными векторами должен быть не меньше $\pi/4$, т. е. соответствующее скалярное произведение по модулю должно быть не больше $1/\sqrt{2}$. С увеличением числа рассматриваемых векторов с указанным выше свойством в евклидовом пространстве соответствующей размерности отмеченная верхняя граница уменьшается и "геометрическое" решение этой задачи становится менее тривиальным.

Нижеследующие две теоремы дают нам необходимые и достаточные условия на элементы ковариационной матрицы размера $m \times m$ для того, чтобы ее можно было бы рассматривать как ковариационную матрицу первых m элементов бесконечной стационарной последовательности.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – стационарная последовательность m-ортогональных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Тогда с необходимостью*

$$|\sum_{k=1}^{m} kr(k)| \leq m/2 + \sum_{k=1}^{m-1} kr(m-k), \tag{1}$$

где сумма в правой части (1) при $m = 1$ по определению полагается равной нулю.

Теорема 2. *Пусть*

$$M := \|r(|i-j|)\|_{m\times m}$$

– ковариационная матрица размера $m \times m$, где $r(0) = 1$. Для того, чтобы M была ковариационной матрицей первых m координат бесконечной стационарной последовательности, достаточно потребовать, чтобы была разрешима следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_{m+1}^2 = 1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_mx_{m+1} = r(1), \\ x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{m-1}x_{m+1} = r(2), \\ \qquad\qquad \ldots \qquad , \\ x_1x_{m+1} = r(m). \end{cases} \tag{2}$$

Пример 1. Пусть $m = 1$. Тогда из (1) следует, что с необходимостью $|r(1)| \le 1/2$. С другой стороны, при любом значении $r(1)$ из указанного диапазона система (2) будет разрешимой. В самом деле, при $m = 1$ система уравнений (2) имеет вид

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1x_2 = r(1). \end{cases}$$

Решение этой системы вычисляется элементарно:

$$x_1 = (1/2 + \sqrt{1/4 - r^2(1)})^{1/2}, \quad x_2 = (1/2 - \sqrt{1/4 - r^2(1)})^{1/2}.$$

Стало быть, при любом значении $r(1) \in [-1/2, 1/2]$ существует бесконечная стационарная последовательность случайных величин с указанной корреляцией ее элементов.

Пример 2. Пусть $m = 2$. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & r(1) & r(2) \\ r(1) & 1 & r(1) \\ r(2) & r(1) & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Для того чтобы эта матрица была ковариационной, необходимо и достаточно, чтобы она была положительно определенной. Иными словами, с учетом неравенств $|r(k)| \le 1$ нам достаточно потребовать, чтобы детерминант этой матрицы был неотрицательным, поскольку два других угловых минора, очевидно, неотрицательны. Это приводит к требованию, чтобы $1 + r(2) - 2r^2(1) \ge 0$. Последнее неравенство заведомо будет выполнено, если $0 \le r(1) \le r(2)$. Это соотношение далее предполагается выполненным. В этом случае неравенство (1) принимает вид $0 \le r(2) \le 1/2$. Система уравнений (2) для $m = 2$ записывается как

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \\ x_2(x_1 + x_3) = r(1), \\ x_1x_3 = r(2). \end{cases} \tag{4}$$

Например, если $r(1) = 0$ и $r(2) = 1/2$, то система (4), очевидно, разрешима: $x_2 = 0$, $x_1 = x_3 = 1/\sqrt{2}$. Если же $0 < r(1) \leq 1/2$ и $r(2) = 1/2$, то решения нет. Последнее следует из элементарного факта, что уравнение $x_1 x_3 = 1/2$ при условии $x_1^2 + x_3^2 \leq 1$ имеет единственное решение $x_1 = x_3 = 1/\sqrt{2}$. Отсюда и из (4) получаем, в свою очередь, равенство $x_2 = 0$, что несовместимо с предположением $r(1) > 0$. Так что в первом случае мы можем рассматривать матрицу (4) как ковариационную матрицу трех подряд стоящих элементов бесконечной стационарной последовательности, а во втором случае, строго говоря, мы не можем дать подобную гарантию. Во втором случае можно только определенно утверждать, что не существует гауссовской 3-зависимой последовательности, у которой $r(0) = 1$, $r(1) > 0$ и $r(2) = 1/2$, хотя матрица (1) в вышеприведенных ограничениях является ковариационной для трехмерного гауссовского распределения.

Пример 3. Рассмотрим следующую симметричную трехдиагональную матрицу размера $m \times m$ для любого $m \geq 2$:

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & \ldots & 0 \\ r & 1 & r & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & r & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно (см. [2]), что m собственных чисел матрицы A_m представимы в виде

$$\lambda_j = 1 - 2|r| \cos \frac{\pi j}{m+1}, \quad j = 1, ..., m.$$

Поэтому для того чтобы A_m была ковариационной матрицей 1-ортогонального конечного набора случайных величин, необходимо и достаточно, чтобы A_m была положительной определенной. В свою очередь, для этого необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_j \geq 0$ при всех $j = 1, \ldots, m$. Отсюда для величины r получаем точную оценку

$$|r| \leq \frac{1}{2\cos(\pi/(m+1))} \equiv \alpha(m).$$

Например, $\alpha(2) = 1$, $\alpha(3) = 1/\sqrt{2} = 0.7071...$, $\alpha(4) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180...$, $\alpha(5) = 1/\sqrt{3} = 0.5773...$. Ясно, что при условии $|r| \leq 1/2$ матрица A_m будет ковариационной при любом m (см. пример 1).

2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала случай $m = 1$. Для любого натурального n имеем, во-первых,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{2i-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_{2i}\right) = (2n-1)\mathbf{E}\xi_1\xi_2 = (2n-1)r(1),$$

и, во-вторых, в силу неравенства Коши – Буняковского, центрированности и ортогональности элементов последовательности $\{\xi_i\}$ "через одного" мы имеем

$$\left|\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_{2i-1}\sum_{i=1}^{n}\xi_{2i}\right)\right| \le n.$$

Из этих двух соотношений следует оценка

$$|r(1)| \le \frac{1}{2-1/n}.$$

В силу произвольности n получаем соотношение (1) при $m=1$:

$$|r(1)| \le \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Пусть теперь $m>1$. Введем в рассмотрение новую последовательность центрированных случайных величин

$$\eta_k := \sum_{j=(k-1)m+1}^{km}\xi_j, \quad k=1,2,...,$$

которая, очевидно, является стационарной 1-ортогональной. Поэтому в силу (5) с учетом нормировки получаем следующее усиление неравенства Коши – Буняковского:

$$|\mathbf{E}\eta_1\eta_2| \le \frac{1}{2}\mathbf{E}\eta_1^2.$$

Остается только заметить, что

$$\mathbf{E}\eta_1\eta_2 = \sum_{k=1}^{m}kr(k), \quad \mathbf{E}\eta_1^2 = m + 2\sum_{k=1}^{m-1}kr(m-k).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательность $\{\eta_i\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями. Теперь введем стационарную последовательность m-зависимых случайных величин (так называемых скользящих средних)

$$\xi_i := x_1\eta_i + x_2\eta_{i+1}\ldots + x_{m+1}\eta_{i+m}, \tag{6}$$

где $x_1,\ldots,x_{m+1}$ – свободные неслучайные переменные. Нам остается только конкретизировать условия $\mathbf{E}\xi_i^2=1$ и $\mathbf{E}\xi_i\xi_{i+k}=r(k)$. В результате мы придем к системе уравнений (2). Теорема 2 доказана.

Замечание. На самом деле теорема 2 описывает необходимые и достаточные условия для существования последовательности скользящих средних вида (6) (не обязательно гауссовских) с заданной $(2m+1)$-диагональной ковариационной матрицей. Отметим, что любая стационарная гауссовская последовательность m-зависимых случайных величин может быть представлена в виде скользящих средних (6), где $\{\eta_i\}$

— независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением.

Автор благодарит рецензента за ряд полезных замечаний.

References

[1] V.V. Petrov, *Sequences of m-orthogonal random variables*, J. Sov. Math., **27** (1984), 3136–3139. Zbl 0551.60032

[2] S.K. Godunov, A.G. Antonov, O.P. Kirilyuk, V.I. Kostin, *Guaranteed accuracy of solving a system of linear equations in Euclidean spaces*, Novosibirsk, Nauka, 1992. Zbl 0793.65014

Igor Semyonovich Borisov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: sibam@math.nsc.ru